数理解析研究所講究録
795 巻 1992 年 1-7

On the large time behavior of solutions for some degenerate quasilinear parabolic systems

福岡大 理　仙葉 隆 (Takasi Senba)

§1 Porous media equations

Porous media（多孔質媒体）とは、地中、スポンジ、吸い取り紙などのように小さな穴がたくさんあいている媒体のことである。その穴を流れる流体の密度を記述する方程式として次の方程式（Porous media equation）がある。

$$u_t = (u^m)_{xx} \quad \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty), \qquad (1.1)$$

ただし m は $m>1$ なる定数、$u(x,t)$ は (x,t) における流体の密度である。

$$u(\cdot,0) = u_0 \in C_0(\mathbb{R}), \geq 0, \not\equiv 0 \text{ in } \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

に対して、Cauchy 問題 (1.1)(1.2) の解は次の性質を持つ。

定理1 ([VA], [FR, KA] e.t.c.)

Cauchy 問題 (1.1), (1.2) の解 u は次のことをみたす。

$u \geq 0$ in $\mathbb{R}\times[0,\infty)$, $u \in C(\mathbb{R}\times[0,\infty))$,

$|u(\cdot,t)|_{L^1(\mathbb{R})} = |u_0|_{L^1(\mathbb{R})}$ for $\forall t \geq 0$,

さらに十分大きな t に対して supp $u(\cdot,t)$ は区間となり、

それを $[\zeta_1(t), \zeta_2(t)]$ と書く。そして、任意の定数 $M>0$ に対して $\overline{u}(x,t;M)$ を以下のように定める。

$$\overline{u}(x,t;M) = t^{-1/(m+1)}\left(A^2 - Bx^2 t^{-\frac{2}{m+1}}\right)_+^{\frac{1}{m-1}},$$

ただし、$B=(m-1)/(2m(m+1))$, A は $|\overline{u}(\cdot,t;M)|_{L^1(R)} = M$ $(^\forall t>0)$ となるように定める、$(\cdot)_+ = \max(\cdot,0)$ とする。

$M_0 = |u_0|_{L^1(R)}$, $\overline{x} = M_0^{-1}\int_R x\, u_0(x)\,dx$ とおくとき

$$t^{\frac{1}{m+1}} \left| u(\cdot - \overline{x}, t; M_0) - u(\cdot, t)\right|_{L^\infty(R)} \to 0 \quad (t\to\infty),$$

$$|\zeta_i(t) - \overline{\zeta}_i(t)| \to \infty \quad (t\to\infty) \quad (i=1,2),$$

ただし、$\overline{\zeta}_i(t)$ $(i=1,2)$ は $\mathrm{supp}\,\overline{u}(\cdot,t;M_0) = [\overline{\zeta}_1(t), \overline{\zeta}_2(t)]$ を満たすものとする。

次に、以下の方程式について述べる。

$$u_t = (u^m)_{xx} - u^p \quad \text{in } R\times(0,\infty), \qquad (1.3)$$

ただし、m, p はそれぞれ $m>1$, $p\geq 1$ なる定数とする。そのとき Cauchy 問題 (1.2).(1.3) の解 u に対して以下の定理が成り立つ。

定理２（［KA］,［KN］,［KE］e.t.c.）

Cauchy 問題 (1.2) (1.3) の解 u は、$u\geq 0$ in $R\times(0,\infty)$, $u\in C(R\times[0,\infty))$ を満たし、$|u(\cdot,t)|_{L^1(R)}$ は t に関して単調減少、$\mathrm{supp}\,u(\cdot,t)$ は t に関して単調非減少となる。さらに以下のことが成り立つ。

$\varepsilon = p - m$	$\bigcup_{t\geq 0} \operatorname{supp} u(\cdot,t)$	$\lim_{t\to\infty} \lvert u(\cdot,t)\rvert_{L^1}$
$\varepsilon < 0$	有界集合	0
$0 \leq \varepsilon < 2$	$\mathbb{R}$	0
$\varepsilon = 2$	$\mathbb{R}$	?
$2 < \varepsilon$	$\mathbb{R}$	正の定数

§2. 問題とSection 1との関係

$$
(\mathrm{I.P.})\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} - u^n v^n & \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty), \\ v_t = (v^m)_{xx} - u^n v^n & \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0,\ v(\cdot,0) = v_0 & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}
$$

以下の仮定のもと、上のCauchy問題を考える。

<u>仮定</u>. m, n は $m>1$, $n\geq 1$ なる定数とする。$u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R})$ は $0 \leq (\not\equiv)\, u_0 \leq (\not\equiv)\, v_0$ in $\mathbb{R}$ を満たすものとする。

上の状況下でわれわれは次の問題を考えたい。

<u>問題</u>. $\lvert u(\cdot,t)\rvert_{L^1(\mathbb{R})}$, $\lvert v(\cdot,t)\rvert_{L^1(\mathbb{R})}$, $\operatorname{supp} u(\cdot,t)$, $\operatorname{supp} v(\cdot,t)$ の $t\to\infty$ を調べて定理2の(I.P.)-version を作りたい。

<u>定義((I.P.)の解)</u>

任意の $(f,g) \in D(A) = \{ f, g \in L^1(\mathbb{R})\,;\ (\lvert f\rvert^{m-1}f),\ (\lvert g\rvert^{m-1}g),\ \frac{d^j}{dx^j}(\lvert f\rvert^{m-1}f),\ \frac{d^j}{dx^j}(\lvert g\rvert^{m-1}g) \in L^1(\mathbb{R})\ \ j=1,2 \}$ に対して

$$A(f,g)=\left((|f|^{m-1}f)_{xx}-|g|^{n}|f|^{m-1}f,\ (|g|^{m-1}g)_{xx}-|f|^{n}|g|^{m-1}g\right)$$

とおくと A は$L^1(\mathbb{R})\times L^1(\mathbb{R})$上の超消散作用素となる。そのとき、$T(\cdot)$を$A$より生成された$L^1(\mathbb{R})\times L^1(\mathbb{R})$上のsemi-groupとする。このとき、解$(u(\cdot,t),v(\cdot,t))$を

$$(u(\cdot,t),v(\cdot,t))=T(t)(u_0,v_0)\quad \text{for } {}^\forall t\geq 0$$

と定義する。

semi-group の存在及び一意性については[SE1]，[SE2]参照。

<u>Section 1 と本問題の関係</u>．$0\equiv u_0\leq(\not\equiv)\,v_0$ in $\mathbb{R}$ なるとき v は(1.1)を満たし $u\equiv 0$ in $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ となる。また、$0\leq(\not\equiv)\,u_0\equiv v_0$ in $\mathbb{R}$ なるとき $u\equiv v$ in $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ となり、u 及び v は(1.3)を満たす。

§3．問題の答

次の二つの補題が成り立つ。

補題3.1.

u,vを(I.P.)の解とする。u_0,v_0が仮定を満たすならば $0\leq u\leq v$ in $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ を満たす。

補題3.2.

(I.P)の解 u,v は、u_0,v_0が仮定を満たすならば以下の式を満たす。

$$\int_{\mathbb{R}} v(x,t)\,dx - \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}} v_0(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx \quad \text{for } {}^\forall t \geq 0 .$$

上の二つの補題から次のことが予想できる。

v はほとんど (1.1) に従う（であろう）。従って、u は方程式（I.P）の v の部分に (1.1) の *self-similar solution* $\bar{u}$（定理1の $\bar{u}$）を代入した方程式、つまり

$$u_t = (u^m)_{xx} - \bar{u}^n u^n \quad \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty) \qquad (3.1)$$

にほとんど従う（であろう）。

実際、$|v(\cdot,t)|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ と $\operatorname{supp} v(\cdot,t)$ の減少のオーダーと拡がるオーダーは (1.1) の解と同様に、それぞれ $t^{-\frac{1}{m+1}}$ と $t^{\frac{1}{m+1}}$ であることがわかった。そして、$|u(\cdot,t)|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ の減少のオーダーと $\operatorname{supp} u(\cdot,t)$ の拡がるオーダーは

$$u_t = (u^m)_{xx} - t^{-\frac{n}{m+1}} u^n \quad \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty) \qquad (3.2)$$

に対する (1.2) をみたす解のそれらとオーダーが同じであることがわかった。これらの結果を、$\bigcup_{t\geq 0} \operatorname{supp} u(\cdot,t)$，$\lim_{t\to\infty} |u(\cdot,t)|_{L^1(\mathbb{R})}$，$\bigcup_{t\geq 0} \operatorname{supp} v(\cdot,t)$，$\lim_{t\to\infty} |v(\cdot,t)|_{L^1(\mathbb{R})}$ に着目してまとめたのが以下の定理である。

定理3．u, v を（I.P）の解とし、u_0, v_0 は、仮定を満たすとする。そのとき，u, v は以下のことをみたす。

$\varepsilon = 2n - m$	$\bigcup_{t\geq 0} \operatorname{supp} v(\cdot,t)$	$\lim_{t\to\infty} \lvert v(\cdot,t)\rvert_{L^1}$
	$\mathbb{R}$	正の定数

$\varepsilon = 2n - m$	$\bigcup_{t \geq 0} \operatorname{supp} u(\cdot, t)$	$\lim_{t \to \infty} \lvert u(\cdot, t) \rvert_{L^1}$
$\varepsilon < 1$	有界集合	0
$1 \leq \varepsilon < 2$	$\mathbb{R}$	0
$\varepsilon = 2$	$\mathbb{R}$	?
$2 < \varepsilon$	$\mathbb{R}$	正の定数

References.

[FR. KA]. A. Friedman & S. Kamin, The asymptotic behaviour of a gas in n-demensional porous medium, Trans. Amer. Math. Soc. 267, 551-563 (1980).

[KA]. A. S. Kalashnikov, The propagation of disturbances in problems of nonlinear heat conduction with absorption, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. 14 (4), 891-905 (1974).

[KE]. R. Kersner, Degenerate parabolic equations with general nonlinearities, Nonlinear Analysis TMA 4 (6), 1043-1062 (1980).

[KN]. B. F. Knerr, The behavior of the support of solutions of the equations of nonlinear heat condition with absorption in one dimension, Trans. Amer. Math. Soc. 249, 409-424 (1979).

[VA]. J. L. Vazquez, Asymptotic behavior and properties of the one-dimensional flow of gas in a porous medium, Trans. Amer. Math. Soc. 277, 507-527 (1983).

[SE1]. T. Senba, On the support properties of solutions for some degenerate quasilinear parabolic systems, Nonlinear Analysis TMA 14 (9), 789-805 (1990).

[SE2]. On the large time behavior of solutions for some degenerate quasilinear parabolic systems, to appear.