数理解析研究所講究録
第 797 巻 1992 年 25-31

2 次体上の単項化問題

名古屋大学・教養部　中野 伸 (SHIN NAKANO)

1. 序

有限次代数体 k と素数 p に対して k の p-類群を C_k で表す。k の不分岐アーベル拡大 K に対して、C_k から C_K への自然な準同型

$$j_{K/k} : C_k \longrightarrow C_K$$

の核 $\ker j_{K/k}$ が C_k と一致するとき、C_k は K で単項化するという。単項化定理により C_k は k の Hilbert p-類体 k_p (最大不分岐アーベル p-拡大) で単項化する。また、k_p の真の部分体で単項化する例や、どのような真の部分体でも単項化しない例などがいくつか見つかっている。これに関しては、鈴木の定理 [Su] "K/k が不分岐アーベル拡大のとき、体次数 $(K:k)$ は核の位数 $|\ker j_{K/k}|$ を割る" があり、さらに K/k が巡回拡大ならば、公式

$$|\ker j_{K/k}| = (K:k)(E_k : N_{K/k}E_K) \tag{1}$$

の成り立つことが知られている (cf. [Sc])。ここで E_k, E_K はそれぞれ k, K の単数群を表す。

以下、k が 2 次体で $p=2$ のときを扱い、Hilbert 2-類体の真の部分体で単項化するような 2 次体の、公式 (1) による構成法について論ずる。

2. 実 2 次体 — 岩澤の例

実 2 次体でその Hilbert 2-類体の真の部分体で単項化する例が岩澤 [I] によって構成されている。実 2 次体 k の Hilbert 2-類体を k_2 で表す。k が

(C1) $N_{k/\mathbf{Q}}E_k = \{\pm 1\}$

を満たし、さらに k_2 が

(C2) $N_{k'/\mathbf{Q}}E_{k'} = \{+1\}$

なる実2次体 k' を含むものとする。このとき4次体 $K = kk'$ に対して、

$$|\ker j_{K/k}| \geq 4$$

が成り立つ。実際、(C2) より

$$N_{k/\mathbf{Q}}N_{K/k}E_K = N_{k'/\mathbf{Q}}N_{K/k'}E_K = \{+1\}$$

だから、(C1) から $N_{K/k}E_K \subsetneqq E_k$ よって公式 (1) より目的の不等式を得る。さらに、条件

(C3) C_k は $(2,2)$ 型アーベル群、すなわち rank 2 の 基本アーベル 2-群と同型

を追加すれば $C_k = \ker j_{K/k}$ すなわち C_k は k_2 の真の部分体 K で単項化することになる。

EXAMPLE R1: 岩澤 [**I**] によれば、このような k, k' を実現するためには、たとえば

$$p \equiv p_1 \equiv p_2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$$

$$\left(\frac{p}{p_1}\right) = \left(\frac{p}{p_2}\right) = -1$$

なる相異なる素数 p, p_1, p_2 をとり $k = \mathbf{Q}(\sqrt{pp_1p_2})$, $k' = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1p_2})$ とおけばよい。ただし、(C2) を満たすように p_1, p_2 を選ぶ必要がある (cf. [**O**])。

条件 (C3) については §4 で詳しく述べる。

3. 虚2次体

k が虚2次体の場合でも同様の例を見つけることができる。ここでも実の場合と同様、k を含む $\mathbf{Q}$ 上の $(2,2)$ 型のアーベル拡大 K について、指数 $(E_k : N_{K/k}E_K)$ を K の2次の部分体 k' の単数群 $E_{k'}$ を経由して調べるのだが、これに関して次の補題が役に立つ。

LEMMA. 虚2次体 k の Hilbert 2-類体が実2次体 k' を含むとする。このとき $K = kk'$ とおくと $E_K = W_K E_{k'}$ が成り立つ。ただし W_K は K に属する 1 のべき根のなす群である。

PROOF: K は CM-体 でありその最大実部分体は k' である。よって、たとえば [**W**, Theorem 4.12] から $(E_K : W_K E_{k'}) = 1$ or 2。とくに K の基本単数を ϵ とすると $\epsilon^2 = \zeta\eta$, $\zeta \in W_K$, $\eta \in E_{k'}$ と書ける。ここで ζ は ± 1、または 1 の原始 3, 4 or 6 乗根である。それぞれの場合に応じて ϵ の置き換えを行い、$\zeta = 1$, $\eta > 0$ とできることが示され、したがって $\epsilon = \pm\sqrt{\eta} \in K \cap \mathbf{R} = k'$、すなわち $E_K = W_K E_{k'}$ を得る。∎

この補題によって、岩澤の例 R1 に対応する虚の場合の例を見つけることができる。すなわち、k, k' および K を補題のような体とすれば、条件 (C2) の下で

$$N_{K/k} E_K = N_{K/k} W_K \cdot N_{k'/\mathbf{Q}} E_{k'} = \{+1\}$$

(いまの場合 $N_{K/k} W_K = \{1\}$) が成り立つ。一方 $E_k = \{\pm 1\}$ だから $(E_k : N_{K/k} E_K) = 2$、よって

$$|\ker j_{K/k}| = 4$$

を得る。さらに、(C3) が成り立てば C_k は K で単項化する。

条件 (C2) (C3) が成り立つような虚 2 次体 k および実 2 次体 k' は、たとえば、次のようにして作ることができる。

EXAMPLE I1: 以下を満たす相異なる素数 p, p_1, p_2 をとる;

$$-p \equiv p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 4$$

$$\left(\frac{p}{p_1}\right) = \left(\frac{p}{p_2}\right) = -1.$$

このとき $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-pp_1p_2})$, $k' = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1p_2})$ とおく。ただし Example R1 と同様、p_1, p_2 は (C2) を満たすように選ばなくてはならない。

EXAMPLE I2: 素数 p, p_1, p_2 を

$$p \equiv p_1 \equiv p_2 \equiv -1 \pmod 4$$

$$\left(\frac{p}{p_1}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{p_2}\right) = -1, \quad \left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1$$

を満たすようにとり、Example I1 と同様に k, k' を定義する。この場合は (C2) が無条件に成り立つ。

REMARK 1. Kisilevsky [**K**] によって上述の Lemma と類似の命題が証明され、さらにそれを使って C_k が rank 2 の基本アーベル 2-群である虚 2 次体 k について、単項化の様子が詳しく調べられている (cf. [**Fuj**])。

4. 2次体のイデアル類群の 4-rank

条件 (C3) は Rédei-Reichardt [**R-R**] の criterion によって調べることができる。ここでは、復習も兼ねて、その criterion を以下のように定式化しておこう。

種数 $n-1 \geq 1$ なる 2 次体 (実でも虚でもよい) k の判別式 d を、素判別式の積に分解し $d = d_1 d_2 \cdots d_n$ とする。素判別式とは、ただひとつの素因子を持つ 2 次体の判別式のことである;

$$d_i = -4, \pm 8 \quad \text{or} \quad \pm p (\equiv 1 \bmod 4,\, p : \text{odd prime}).$$

このような分解は一意的に可能である。p_i を d_i の素因子、χ_i を $\mathbf{Q}(\sqrt{d_i})$ の Kronecker character とする。標数 2 の素体 $\mathbf{F}_2$ 係数の n 次正方行列 $A_k = (a_{ij})$ を、$i \neq j$ のとき

$$(-1)^{a_{ij}} = \chi_i(p_j)$$

とし、対角成分は

$$a_{jj} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} a_{ij} \qquad \text{i.e.} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

のように定める。このとき、k の狭義の 2-類群 C_k^+ に対する Rédei-Reichardt の criterion は、次のように述べられる;

$$\text{(2)} \qquad 4\text{-rank}C_k^+ = n - 1 - \ \text{rank}A_k.$$

Gauss の種の理論から 2-rank$C_k^+ = n-1$、また、A_k の行の和は零だから、$0 \leq \mathrm{rank} A_k \leq n-1$ が成り立っている。

さて、k が実 2 次体で $d_i > 0\,(1 \leq i \leq n)$ のとき、$|C_k| \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2^{n-1})$ が示され、このことから

$$|C_k^+| = 2^{n-1} \quad \Longrightarrow \quad N_{k/\mathbf{Q}} E_k = \{\pm 1\}$$

がわかる (cf. [**P**, Satz 2.29])。したがって、(2) より

$$\mathrm{rank} A_k = n-1 \iff 4\text{-rank} C_k^+ = 0 \iff |C_k^+| = 2^{n-1}$$
$$\Longrightarrow N_{k/\mathbf{Q}} E_k = \{\pm 1\} \iff C_k = C_k^+,$$

すなわち

$$\mathrm{rank} A_k = n-1 \iff C_k \text{は}\ \mathrm{rank}\, n-1\ \text{の基本アーベル 2-群と同型、かつ}\ N_{k/\mathbf{Q}} E_k = \{\pm 1\}$$

が成り立つ。Example R1 はこの場合にあてはまっている。実際 $\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right) = (-1)^e$ とすれば、行列 A_k は次のようになる;

$$\begin{pmatrix} 1+e & e & 1 \\ e & 1+e & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで、素判別式を $[d_1, d_2, d_3] = [p_1, p_2, p]$ と割り当てた。これより $\mathrm{rank} A_k = 2$ したがって $C_k \simeq (2,2)$, $N_{k/\mathbf{Q}} E_k = \{\pm 1\}$。これらはそれぞれ条件 (C3)、(C1) にほかならない。また、$A_{k'}$ を考えれば、(C2) が成り立つためには $e = 0$ すなわち $\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right) = 1$ が必要なこともわかる。

k が実で $d_i < 0$ なる i があるときは d は必ず $q \equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4)$ なる素因子 q を持つ。したがって $N_{k/\mathbf{Q}} E_k = \{+1\}$ となるから (C1) が満たされない。その意味で岩澤の例 R1 は (C1)-(C3) を満たす唯一の例といえる。($d = 8p_1p_2$ でも本質的には同じである。)

虚 2 次体 k に対しては、いつでも $C_k = C_k^+$ が成り立つ。Example I1 および I2 の素判別式の組 $[d_1, d_2, d_3]$ はそれぞれ $[p_1, p_2, -p]$, $[-p_1, -p_2, -p]$ であり、対応する行列は以下のようになる;

$$\text{(I1)} \quad \begin{pmatrix} 1+e & e & 1 \\ e & 1+e & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(I2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ただし、(I1) において $\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right) = (-1)^e$ とした。どちらの場合も $\mathrm{rank} A_k = 2$、したがって (2) より $C_k \simeq (2,2)$ となる。

5. 大きい種数の場合

次のような一般的な定理がある ([**Fur**])。

THEOREM. (Furtwängler) 代数体 k の 2-類群 C_k が rank r の 基本アーベル 2-群ならば、C_k の生成系 $c_1, \cdots, c_r$ および r 個の k の不分岐 2 次拡大 $F_1, \cdots, F_r$ が存在して、各 c_i は F_i で単項化する。

§4 で扱った 2 次体 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1 \cdots d_n})$ で $C_k = C_k^+$ なるものに対しては、p_i の k での素因子 $\mathfrak{p}_i$ の属する類を c_i とすれば、$c_1, \cdots, c_n$ のうち $n-1$ 個が C_k の独立な生成系となり、各 c_i は $F_i = k(\sqrt{d_i})$ で単項化している。

PROPOSITION. 2 次体 k の 2-類群 C_k が rank $r \geq 2$ の 基本アーベル 2-群であるとする。k の不分岐 2 次拡大 K で $|\ker j_{K/k}| \geq 4$ なるものが存在するならば、C_k は k の Hilbert 2-類体の真の部分体で単項化する。

PROOF: Furtwängler の定理のように c_i, F_i $(1 \leq i \leq r)$ をとる。$\ker j_{K/k}$ の中から独立な類 a, b を選び、必要ならば $\{c_i\}$ の番号を付け直して a, b, $c_3, \cdots, c_r$ が独立なようにできる。このとき、合成体 $F = KF_3 \cdots F_r$ は k の Hilbert 2-類体の真の部分体であって、$C_k = < a,\ b,\ c_3, \cdots, c_r >$ は F で単項化する。∎

条件 (C1)-(C3) を行列 A_k を用いて調べることにより、Proposition で述べられたような 2 次体 k の例をいくつでも作ることができる。

REFERENCES

[Fur] Ph. Furtwängler, *Über eine Verschärfung des Hauptidealsatzes für algebraische Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. **167** (1932), 379–387.

[Fuj] G. Fujisaki, *A note on a paper of Iwasawa*, Proc. Japan Acad. **66A** (1990), 61–64.

[I] K. Iwasawa, *A note on capitulation problem for number fields*, Proc. Japan Acad. **65A** (1989), 59–61.

[K] H. Kisilevsky, *Number fields with class number congruent to* 4 *mod* 8 *and Hilbert's Theorem* 94, J. Number Theory **8** (1976), 271–279.

[O] R. W. K. Odoni, *A note on a recent paper on Iwasawa on the capitulation problem*, Proc. Japan Acad. **65A** (1989), 180–182.

[P] D. Pumplün, *Über die Klassenzahl und die Grundeinheit des reellquadratischen Zahlkörpers*, J. Reine Angew. Math. **230** (1968), 167–210.

[R-R] L. Rédei and H. Reichardt, *Die Anzahl der durch* 4 *teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers*, J. Reine Angew. Math. **170** (1933), 69–74.

[Sc] B. Schmithals, *Kapitulation der Idealklassen und Einheitenstruktur in Zahlkörpern*, J. Reine Angew. Math. **358** (1985), 43–60.

[Su] H. Suzuki, *A generalization of Hilbert's theorem* 94, Nagoya Math. J. **121** (1991), 161–169.