

ナワバリをめぐる 9人ゲーム

姫路工大理 寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)

岡山理大工 仲川勇二 (Yuji Nakugawa)

1. 序論

ここで扱う問題は、生物進化の説明づけへの理論的道具としてゲーム理論が注目されることとなったモデル [2], 2種の動物が1つの縄張りをめぐって競うゲームから抽出された問題である。

出発点となった基本モデルは、次のようにまとめられる：

2人の players (Player I, II) は、価値 V を持った縄張りをめぐって対立している。この対戦に際して、各 player は誇示 (display), 挑み (escalate), 逃げ (retreat) の3つの行動がとれるものとし、この行動にもとづいて、次の2つの純戦略の中から一方を選択するものとする。

タカ戦略 H: 勝ち負けがはっきりするまで戦いを挑む。

ハト戦略 D: まず誇示をし、相手が戦いを挑むようであれば、直ちに逃げ出す。

もし両者共戦いを挑むときは、いずれか一方が傷つき逃げ出すこととなる。そして敗れた方は、価値 V が入手できなだけでなく、価値 C をも失うものとする。そして、上記の戦略 H と D に対して、以下のように payoff が定められる。

(i) I, II 共に戦略 H を選んだ時は、確率 p で I が勝ち(II が負け)、確率 β で I が負け(II が勝ち)ものとする。ここに $p > 0, \beta > 0, p + \beta = 1$ である。

(ii) 一方の player が戦略 H を選び、他方が戦略 D を選んだ時は、戦略 H を選んだ方が価値 V を手に入れ、 D を選んだ方は価値 C を失うものとする。

(iii) I, II 共に戦略 D を選んだ時は、 I と II は $p:\beta$ の比で価値 V を分け合うことにする。

2人の players は H か D のどちらの戦略を選ぶのが最適であるかを考えなければならぬ。このような仮定のもとで、以下のような利得双行列が得られる:

		II		
		H	D	
I	{	H	$pV - \beta C, \beta V - pC$	$V, 0$
	D	$0, V$	$pV, \beta V$	

上記の利得双行列に対する平衡戦略は容易に求まる[3]。この平衡戦略の1つに進化的に安定な戦略 (evolutionarily

stable strategy) 略して ESS と呼ばれるものがある。ESS の厳密な定義と数学的な構造については Danme の書物 [1] 第9章にくわしく述べられている。

2. 縄張りの持久戦 — n 人ゲーム

前節のモデルには 時間的経緯が入っていない。しかしながら現実の場面にあつては、対戦は誇示ではじまるが、しばらくはにらみ合いが続き、このにらみ合いでどこまで誇示を持続できるかという問題が生じてくる。この場合、より長い時間持続できた方が勝ちとなる。ところが、この際誇示を持続するためには何らかのコストがかかるはずである。たとえば、生物進化学では繁殖をはじめるのが遅れるというコストが、ある新製品の市場獲得の競争では広告費用というコストが、考えられる。したがって誇示のコストは時間につき増加と仮定できる。このような状況のもとで、各 player にとって最適な持続時間を決めるのが、本報告の目的である。ここでは、payoff の形が全 players に共通となっているような非協力 n 人ゲームで取扱うことにする。

この問題を次のようにモデル化する：

n 人の players (Player 1, ..., n) は各々 $[0, \infty)$ 内のどの時点まで頑張りかを決めようとしている。大きな時点を選ぶ

だ方が勝ちとなり、勝者は価値 V を敗者は価値 0 を得る。しかしながら時刻 $t \in [0, \infty)$ まで持続するためには、各々 $K(t)$ のコストを費やさなければならぬ。ここにコストは

$$K(0) = 0, K'(t) > 0 \text{ for } t \in [0, \infty), \text{ さらに}$$

$$K(t) \rightarrow \infty \text{ as } t \rightarrow \infty$$

であると仮定する。次に n 人の players のうち k 人が最後まで頑張り同時刻で断念したときは、価値 V を k 人で平等に分割するものとする。各 player は他の $n-1$ 人の players の持続時間を考へに入れた上での自分の最適持続時間を決めなければならぬ。

この n 人ゲームにおいては、各 player にとっての競争相手は、他の $n-1$ 人というよりはむしろ、他の $n-1$ 人の中で最後まで頑張り player であろう。そして player に与えられた情報様式によつて 2 つの型の定式化が考えられる。全員が互に他の $n-1$ 人の players がまだ頑張りつているのか、もう既に断念してしまつたのかが常に観測できる場合を、このゲームは Noisy 型であるといい、逆に他の $n-1$ 人の行動が観測できない状態に置かれているとし、自分の予定した計画時間が実現されてみてはじめて、既に何人が断念してしまつたのかあるいはまだ何人が頑張りつているのかが知らされる場合をこのゲームは Silent 型であるという [3]。

3. Silent 型の持久戦

n 人の players の各々は 互に他の $n-1$ 人の行動を観測できない状態に置かれており, $(0, \infty)$ のどの時点までわばるかを決め, 自らの決めたその計画時間が実現されてみてはじめて, 既に何人が断念してしまっていたのか, あるいはまだ何人が頑張っているのかが知らされる ということだから, Player i の純戦略は $x_i \in [0, \infty)$ とする。 $i = 1, \dots, n$ 。

$M_i(x_1, \dots, x_n)$ を Player i が純戦略 x_i を用いたときの Player 1 への期待利得とし, Player 2 から Player n の選んだ純戦略 x_2, \dots, x_n の中で最大な値を y とする。そして, $x_i = y$ のときは Player 2 から Player n の中の $k-1$ 人が最大値 y を選ぶことになったとする。ただし $k = 1, \dots, n$ 。 そうすると

$$(3.1) \quad M_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} -h(x_i), & x_i < y \\ \frac{1}{k} \nabla - h(x_i), & x_i = y \\ \nabla - h(x_i), & x_i > y \end{cases}$$

が得られる。混合戦略はゲームの対称性より全 players に共通な cdf $F(x_i)$ とし, 区間 $(0, u) \subset (0, \infty)$ 上の density part $f(x_i) > 0$ のみで構成される, というクラスから平復戦略をみつけ出すことにする。点 0 での mass part を 0 としこよいことは, 2人ゲームの解析から容易にわかる [4]。

Player 1 が純戦略 x を用い, 他の $n-1$ 人が混合戦略 $F(x_i)$ を用

いたときの Player 1 への期待利得 $M_1(x, F, \dots, F)$ は, Player 2 から Player n が選んだ純戦略のうち最大な値 y が

$$(n-1)f(y)\{F(y)\}^{n-2} \quad \text{for } y \in (0, u)$$

で与えられる pdf をもつから, 次のようになる:

$$(3.2) \quad M_1(x, F, \dots, F) = \begin{cases} \int_0^x (n-1)f(y)\{F(y)\}^{n-2} dy \\ -R(x) \int_0^u (n-1)f(y)\{F(y)\}^{n-2} dy, & 0 \leq x \leq u \\ \{V - R(u)\} \int_0^u (n-1)f(y)\{F(y)\}^{n-2} dy, & x \geq u. \end{cases}$$

したがって, $M_1(x, F, \dots, F) = v_1^*$ for all $x \in (0, u)$, および, $\int_0^u (n-1)f(t)\{F(t)\}^{n-2} dt = 1$ を解くと

$$(3.3) \quad (n-1)f(t)\{F(t)\}^{n-1} = R'(t)/V, \quad 0 < t < u$$

が得られ, (3.3) を (3.2) に代入すると

$$M_1(x, F, \dots, F) = \begin{cases} \left[\frac{V - R(u)}{V} \right] R(u), & 0 \leq x < u \\ \left[\frac{V - R(x)}{V} \right] R(u), & x \geq u \end{cases}$$

が成立する. 以上より次の定理を得る.

定理 1. 次のような cdf $F^*(x)$ を考える:

$$F^*(x) = \begin{cases} \left\{ \frac{R(u)}{V} \right\}^{\frac{1}{n-1}}, & 0 \leq x \leq u^* \\ 1, & x > u^* \end{cases}$$

ここに $u^* = R^{-1}(V)$ である.

そうすると, (F^*, \dots, F^*) は (3.1) の形, で与えられる n 人非 0 和ゲームの 1 つの平衡点であり, この平衡点に対応す

る Player i への平衡値を v_i^* とすると

$$v_1^* = \dots = v_n^* = 0$$

となる。□

4. Noisy 型の持久戦

ここでは、前節とは逆に、各 player は互に他の $n-1$ 人のうちの何人がまだ頑張っているのか、あるいはもう既に断念してしまっただのかが常に観測できるものとする。このモデルに対して、とりあえず次のような定式化を行うこととする。

Player i の純戦略を $x_i \in (0, \infty)$ とし、この純戦略に対して Player i への期待利得が次式で与えられるような n 人非0和ゲーム $M_i(x_1, \dots, x_n)$ を考える：

$$(4.1) \quad M_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} -h(x_i), & x_i < y \\ \frac{1}{k} \nabla - h(x_i), & x_i = y \\ \nabla - h(y), & x_i > y. \end{cases}$$

ここに、 y は Player 2 から n の $n-1$ 人が選んだ純戦略のうち最大な値であり、 $x_i = y$ となるのは Player 2 から n のうち $k-1$ 人が最大値 y を選ぶことになったとする。 $k=1, \dots, n$ 。このゲームも対称ゲームであるから、(4.1) で与えられる利得関数は全 players に共通であり、したがって混合戦略もまた全 players に共通と考えてよいから、 $[0, \infty)$ 上の cdf $F(x_i)$ とし、平衡戦略としては、点 $x_i=0$ での mass part は 0 で、 $(0, \infty)$

上の density part $f(x_i) > 0$ のみで構成される $F(x_i)$ の中からみつけることとする [3]. したがって, Player 1 が純戦略 x を用い, 他の $n-1$ 人が混合戦略 $F(x_i)$ を用いたときの Player 1 への期待利得を $M_1(x, F, \dots, F)$ と書くことにすると, Player 2 から n が選んだ純戦略のうち最大な値 y は前節と同様に $(n-1)f(y)\{F(y)\}^{n-2}$ for $y \in (0, \infty)$ で与えられる pdf をもつとしてよいから

$$(4.2) \quad M_1(x, F, \dots, F) = \int_0^x \{V - h(y)\} (n-1)f(y)\{F(y)\}^{n-2} dy \\ + \int_x^\infty \{-h(x)\} (n-1)f(y)\{F(y)\}^{n-2} dy, \quad x \geq 0$$

となる。そこで, $M_1(x, F, \dots, F) = v_1^*$ for all $x > 0$ および $\int_0^\infty (n-1)f(t)\{F(t)\}^{n-2} dt = 1$ を解くと

$$(4.3) \quad (n-1)f(t)\{F(t)\}^{n-2} = \frac{h'(t)}{V} e^{-\frac{h(t)}{V}}, \quad \text{for } t > 0$$

が得られる。この pdf をもつ $F(\cdot)$ に対し

$$M_1(x, F, \dots, F) = 0 \quad \text{for all } x \geq 0.$$

そして上記の cdf を F^* とすると

$$\{F^*(x)\}^{n-1} = 1 - e^{-\frac{h(x)}{V}} \geq 0 \quad \text{for all } x \geq 0$$

が得られて 次の定理を得る。

定理 2. 次のような cdf $F^*(\cdot)$ を考える:

$$(4.4) \quad F^*(x) = \left\{ 1 - e^{-\frac{h(x)}{V}} \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad \text{for } x \geq 0.$$

そうすると (F^*, \dots, F^*) は (4.1) の形で与えられる n 人非 0 和ゲームの 1 つの平衡点であり, 対応する Player i への平衡値を v_i^* とすると $v_1^* = \dots = v_n^* = 0$ となる。四

ところで (4.1) の形の payoff では, 他の $n-1$ 人中何人が既に断念したかということへの学習が入っておらず, 最後まで $n-1$ 人を相手にすることを前提とした, しかし最後の player の行動時刻のみ観測できるとした戦略を導くものであった。そして, $F^*(\cdot)$ は, 時々刻々のプレイヤーの数の変化を組み込んだ cdf とはなっていないが, 他の $n-1$ 人が全員途中経過が何であって最も参加者の数のみに依存する cdf $F^*(\cdot)$ を混合戦略として各 player が採用し, 最後まで残る 1 人のみのみを問題にする, という状態で, 互に自己の期待利得を最大化するという意味での 1 つの平衡戦略となっている。しかも平衡値は 0 で維持されている。

そこで, $n-1$ 人中 m 人が残っているという状態で Player i の純戦略を $x_i \in (0, \infty)$ とし, この状態と純戦略に対しての Player 1 への期待利得を $M_1^m(x_1, \dots, x_m)$, m players の選んだ純戦略のうち最大な値を y^m とすると (4.1) は

$$(4.5) \quad M_1^m(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} -h(x_1), & x_1 < y^m \\ \frac{1}{k}V - h(x_1), & x_1 = y^m \\ V - h(y^m), & x_1 > y^m \end{cases}$$

のように書き換えることができる。ここに、 m players がまだ残っているとき Player 1 は断念して引取りとする。

(4.1) と (4.5) を比較し、(4.4) を観察することにより、 m players が残っている場合に対して、次のような cdf $F_{n-1}^m(\cdot)$ を support $[l_m, l_{m+1}]$ 上に定義する：

$$(4.6) \quad F_{n-1}^m(x) = K_m \left\{ e^{-\frac{r(l_m)}{V}} - e^{-\frac{r(x)}{V}} \right\}^{\frac{1}{m}}, \quad l_m < x < l_{m+1},$$

ここに l_m は、残りの競争相手が m 人になった時刻を示す。したがって

$$0 \equiv l_{n-1} \leq l_{n-2} \leq \dots \leq l_1 \leq l_0 \equiv \infty$$

であり、さらに K_m は時刻 l_m までに残こされている確率：

$$K_{n-1} = 1, \quad K_{n-2} = 1 - \left\{ 1 - e^{-\frac{r(l_{n-2})}{V}} \right\}^{\frac{1}{n-2}}, \quad \dots$$

として定まるものとする。そうするとすべての m に対して

$$M_1^m(x, F^m, \dots, F^m) = 0 \quad \text{for all } x \in (l_m, l_{m+1})$$

が成立する。

上記の考察を正確に忠実に定式化するには DP による再帰的關係の最適方程式を用いるのが効率的であるように考えられるが、ここでは (4.1) が残り $n-1$ 人の最後に着目して定式化されたものであり、(4.4) が最後の 1 人に対して Noisy 型の平衡戦略となつていふこと、および平衡値が 0 となる

一連の性質を利用した。

以上をまとめて 次の定理を得る:

定理3. l_m を残っている競争相手が m になった時刻とし, この m に対して cdfの部分(4.6)で与えられる $F_{n+1}^m(x)$ を考えよ. そうするとこの $F_{n+1}^m(x)$ で構成される cdfは(4.5)の形の payoffで構成される n 人非0和ゲームの1つの平衡点となり, その平衡値は0である.

参考文献

- [1] E. Damme: Stability and Perfection of Nash Equilibria, Springer-Verlag (1987).
- [2] J. M. Smith: Evolution and the Theory of Games, Cambridge University Press (1982).
- [3] 寺岡義伸: ナ7バリをめぐる2人ゲーム, 京都大学数理解析研究所講究録 680 「計画数学とその関連分野」 275-284 (1989).
- [4] 寺岡義伸: ナ7バリをめぐる2人ゲームII, 京都大学数理解析研究所講究録 741 「確率ゲーム理論とその周辺」 76-91 (1991).