数理解析研究所講究録
第 798 巻 1992 年 49-53

2 状態信頼性システムの構造とエントロピーとの関係について

愛知工業大学　大鋳　史男

平成3年11月11日

1　序

本稿では 2 状態信頼性システムの構造とエントロピートとの関係について述べる．主な結果は次の通りである．

エントロピーを最小にするシステムの構造は並列システムか，もしくは直列システムのいずれかである．又，寿命分布関数を考えた時は，エントロピーを最小にする構造は $k-out-of-n$ システムであり，指数寿命分布関数の時は直列システムが最小エントロピーを与える．

2　寿命分布関数を考えない場合

定義1．n 次の 2 状態システムとは次の条件を満たす組 $(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i,\varphi,S)$ である．

（1）S, Ω_i $(i=1,...,n)$ はそれぞれ 2 つの要素からなる全順序集合である．

（2）φ は直積順序集合 $\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$ から S への単調増加な全射である．<定義終わり>

$S=\Omega_i=\{0,1\}$ $(i=1,...,n)$ と書く．$0<1$ である．$x\in\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$，$C_1(x)=\{i\mid(x)_i=1\}$ とする．一般に集合 A の濃度を $\sharp A$ と書く．又，次の記号を用いる．

$$a_k=\{x\mid\varphi(x)=1,\sharp C_1(x)=k\},\ A_k=\sharp a_k$$

命題2．

$$\frac{A_k}{\binom{n}{k}}\ \le\ \frac{A_{k+1}}{\binom{n}{k+1}},\ k=1,2,...,n-1$$

である．

証明：φ の単調性から

$$\cup_{x\in a_k}\{x\}\times\{y\mid\varphi(y)=1,\ y\ge x,\ \sharp C_1(y)=k+1\}$$

$$\subseteq\cup_{y\in a_{k+1}}\{x\mid x\le y,\ \sharp C_1(x)=k\}\times\{y\}$$

故，濃度に関する簡単な計算から

$$(\sharp a_k)\times(n-k)\le(k+1)\times(\sharp a_{k+1})$$

これで証明は終わる．<証明終わり>

定義3．システム $(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i,S,\varphi)$ の信頼度関数 h_φ とは，次のように定義される $\{(p_1,...,p_n)\mid 0\le p_i\le 1,1\le i\le n\}$ から $[0,1]$ への写像である．

$(p_1, ..., p_n)$ に対して，各 Ω_i 上の確率 P_i で $P_i(\{1\}) = p_i$，$P_i(\{0\}) = 1 - p_i$ なるものが定まる．$\otimes_{i=1}^n P_i$ を $\prod_{i=1}^n \Omega_i$ 上の $P_i (i = 1, ..., n)$ の直積確率とし，

$$h_\varphi(p_1, ..., p_n) = (\otimes_{i=1}^n P_i)(\varphi^{-1}(\{1\}))$$

と定める．＜定義終わり＞

h_φ の定義域を $\{(p, ..., p) \mid 0 \le p \le 1\}$ 上に制限したとき，$h_\varphi(p, ..., p)$ を簡単に $h_\varphi(p)$ と書く．

定理4．システム $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$ に於いて，

$$h_\varphi(p) = \sum_{j=1}^n A_j p^j (1-p)^{n-j} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

$$\alpha_j = (A_j / \binom{n}{j}) - (A_{j-1} / \binom{n}{j-1})$$

である．

証明：$(p, ..., p)$ から定まる $\prod_{i=1}^n \Omega_i$ 上の確率を P と書く．

$$\varphi^{-1}(1) = \cup_{j=1}^n a_j,\ a_i \cap a_j = \phi\ (i \ne j)$$

であるから

$$h_\varphi(p) = P(\varphi^{-1}(\{1\})) = \sum_{j=1}^n P(a_j) = \sum_{j=1}^n A_j p^j (1-p)^{n-j}.$$

定理中２番目の等号は明らかである．＜証明終わり＞

システム $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$ が $j - out - of - n$ システムであるとは

$$A_k = \begin{cases} \binom{n}{k}, & \text{for } k \ge j \\ 0, & \text{for } k < j \end{cases}$$

である時で，その信頼度関数を $h_{j,n}$ と書けば

$$h_{j,n}(p) = \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

である．

定理4を書き換えれば次の通りである．

系5．システム $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$ に於いて

$$h_\varphi(p) = \sum_{j=1}^n \alpha_j h_{j,n}(p)$$

である．$0 \le \alpha_j \le 1\ (1 \le j \le n)$，$\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ に注意すれば，$h_\varphi(p)$ が $h_{j,n}(p)\ (j = 1, ..., n)$ の凸結合で表せる事がわかる．

定義6．システム $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$ の $(p, ..., p)$ に於けるエントロピー　$H_\varphi(p)$ とは

$$H_\varphi(p) = -h_\varphi(p) \log h_\varphi(p) - \overline{h}_\varphi(p) \log \overline{h}_\varphi(p)$$

である．ここで，$\overline{h}_\varphi(p) = 1 - h_\varphi(p)$ である．$j - out - of - n$ システムのエントロピーを $H_{j,n}(p)$ と書く．＜定義終わり＞

一般に $-x\log x$ は $[0,\infty)$ 上で上に凸である．従って次の命題は容易である．

命題7．システム $(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i, S, \varphi)$ に対して

$$H_\varphi(p) \geq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j H_{j,n}(p) \geq min_{1\leq j\leq n} H_{j,n}(p)$$

証明：

$$h_\varphi(p) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j h_{j,n}(p)\ ,\ \overline{h}_\varphi(p) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{h}_{j,n}(p)$$

であるから $-x\log x$ の凸性から命題は明かである．＜証明終わり＞

命題8．(1) $p \geq 1/2 \Longrightarrow 1 \leq \forall j \leq n, H_{j,n}(p) \geq H_{1,n}(p)$

(2) $p < 1/2 \Longrightarrow 1 \leq \forall j \leq n, H_{j,n}(p) \geq H_{n,n}(p)$

この命題の証明には次の２つの補題を用いるが，まず次の事に注意する．

$$0 \leq p \leq 1,\ 1 \leq \forall j \leq n,\ H_{j,n}(p) = H_{n-j+1,n}(1-p). \tag{8.1}$$

$f(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x)$ と置けば $f(x)\uparrow_{x\in[0,1/2]}$，$f(x)\downarrow_{x\in[1/2,1]}$ である．

補題9．(1) $p \geq 1/2,\ 1 \leq j \leq [(n+1)/2] \Longrightarrow H_{j,n}(p) \geq H_{1,n}(p)$.

(2) $p \leq 1/2,\ n \geq j > [n/2] \Longrightarrow H_{j,n}(p) \geq H_{n,n}(p)$.

証明：(1) $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \geq \sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \geq \sum_{k=[(n+1)/2]}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \geq 1/2$

故 $f(x)$ の性質から $H_{j,n}(p) \geq H_{1,n}(p)$ である．

(2) $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \geq \sum_{k=0}^{j-1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \geq \sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \geq 1/2$

故 $f(x)$ の性質から $H_{j,n}(p) \geq H_{n,n}(p)$ である．＜証明終わり＞

補題１０．$p \geq 1/2$ とする．この時 $p \geq 1-p$ であるから

$$h_{j,n}(p) \geq h_{j,n}(1-p),\ \overline{h}_{j,n}(p) \leq \overline{h}_{j,n}(1-p)$$

であるが，次の事が成立する．

(1) $1/2 \geq h_{j,n}(p)(\Longleftrightarrow 1/2 \leq \overline{h}_{j,n}(p)) \Longrightarrow H_{j,n}(p) \geq H_{j,n}(1-p)$.

(2) $h_{j,n}(1-p) \geq 1/2(\Longleftrightarrow \overline{h}_{j,n}(p) \leq 1/2) \Longrightarrow H_{j,n}(1-p) \geq H_{j,n}(p)$.

(3) $h_{j,n}(p) \geq \overline{h}_{j,n}(1-p) \geq 1/2(\Longrightarrow h_{j,n}(p) \geq 1/2 \geq h_{j,n}(1-p), \overline{h}_{j,n}(p) \leq 1/2 \leq \overline{h}_{j,n}(1-p))$
$\Longrightarrow H_{j,n}(1-p) \geq H_{j,n}(p)$.

(4) $\overline{h}_{j,n}(1-p) \geq h_{j,n}(p) \geq 1/2(\Longrightarrow h_{j,n}(p) \geq 1/2 \geq h_{j,n}(1-p), \overline{h}_{j,n}(p) \leq 1/2 \leq \overline{h}_{j,n}(1-p))$
$\Longrightarrow H_{j,n}(p) \geq H_{j,n}(1-p)$.

証明：

$$h_{j,n}(p) + \overline{h}_{j,n}(p) = 1,\ h_{j,n}(1-p) + \overline{h}_{j,n}(1-p) = 1$$

及び $f(x)$ の形から（１）－（４）は明かである．＜証明終わり＞

命題8の証明：（１）$1 \leq j \leq [(n+1)/2]$ の時は補題9（１）から明かである．$n \geq j \geq [(n+1)/2]$ の時を考えると；

（1-i）補題１０（１）によって

$$1/2 \geq h_{j,n}(p) \Longrightarrow H_{j,n}(p) \geq H_{j,n}(1-p)$$

（1-ii）$h_{j,n}(p) \geq 1/2$ ならば，今 $j > (n+1)/2$ であるから $n-j+1 < (n+1)/2$ で，よって

$$1/2 \leq h_{j,n}(p) = \sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}p^j(1-p)^{n-j} \leq \sum_{k=n-j+1}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{j-1} \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} = \overline{h}_{j,n}(1-p).$$

よって，補題１０（４）から

$$H_{j,n}(p) \geq H_{j,}(1-p)$$

である．(1-i) (1-ii) いずれの場合に於いても $H_{j,n}(p) \geq H_{j,n}(1-p)$ の不等号関係は成立する．

$p \geq 1/2$ であるから，$1-p \leq 1/2$，$j > [(n+1)/2] \geq [n/2]$ で，従って補題９（２）を用いて，

$$H_{j,n}(p) \geq H_{j,n}(1-p) \geq H_{n,n}(1-p) = H_{1,n}(p)$$

である．

(2) は (1) と (8.1) 式を用いて

$$H_{j,n}(p) = H_{n-j+1,n}(1-p) \geq H_{1,n}(1-p) = H_{n,n}(p)$$

である．＜証明終わり＞

命題７，８を用いて次の定理を得る．

定理１１．任意のシステム $(\prod_{i=1}^{n} \Omega_i, S, \varphi)$ に対して

$$p \geq 1/2 \Longrightarrow H_\varphi(p) \geq H_{1,n}(p),$$

$$p \leq 1/2 \Longrightarrow H_\varphi(p) \geq H_{n,n}(p)$$

である．＜定理終わり＞

注意．本稿での n 次のシステムの概念にはコヒーレントの概念は含まれない．従って n 次のシステム全体の集合は高々 n 個のユニットからなるシステム全体の集合と同じである．この事に注意すれば定理１１が次の事を主張している事が解る．高々 n 個のユニットからなるシステム全体の集合に於いて

$p \geq 1/2$ の時 n 次並列システムが最小エントロピーを与える．

$p \leq 1/2$ の時 n 次直列システムが最小エントロピーを与える．

3　寿命分布関数を考える場合

システム $(\prod_{i=1}^{n} \Omega_i, S, \varphi)$ に於いて各部品の寿命分布関数を同一で $F(t)$ とし，確率的に独立であるとする．$\overline{F}(t) = 1 - F(t)$ とする．この時システムの寿命分布関数は信頼度関数を用いて $1 - h_\varphi(\overline{F}(t))$ である．以下 $F(t)$ は微分可能であるとする．従って $1 - h_\varphi(\overline{F}(t))$ も微分可能である．

定義１２．１システム $(\prod_{i=1}^{n} \Omega_i S, \varphi)$ の $\overbrace{(F, ..., F)}^{m \text{ times}}$ に於けるエントロピー $H_\varphi(F)$ とは

$$H_\varphi(F) = \int_0^\infty (\frac{d}{dt} h_\varphi(\overline{F}(t)) \log(\frac{d}{dt} h_\varphi(\overline{F}(t)))dt$$

である．＜定義終わり＞

系５から

$$h_\varphi(\overline{F}(t)) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j h_{j,n}(\overline{F}(t))$$

であるから

$$\frac{d}{dt} h_\varphi(\overline{F}(t)) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\frac{d}{dt} h_{j,n}(\overline{F}(t)))$$

で，$-x \log x$ が $[0, \infty)$ 上で上に凸である事から次の定理を得る．

定理１３． システム $(\prod_{i=1}^{n} \Omega_i, S, \varphi)$ に対して

$$H_\varphi(F) \geq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j H_{j,n}(F) \geq min_{1 \leq j \leq n} H_{j,n}(F)$$

＜定理終わり＞

各部品が独立で同一の指数分布関数に従う時，エントロピーを最小にするシステムの構造関数は，簡単な計算から直列システムである事がわかる．

参考文献

[1] R.E.Barlow and F.Proschan. *STATISTICAL THEORY of RELIABILITYN and LIFE TESTING*, Holt, Rinhart and Winston, Inc., 1975.