

## 層流の不安定化と Bateman の関数

日本総合研 宗像健一 (Ken-iti Munakata)

## 0. はじめに

Bateman<sup>1)</sup> の関数  $k_n(x)$  が最初に研究されてから既に 60 年以上が経過している。原論文の冒頭には二つの文献が引用されているが、(Kármán<sup>2)</sup> および Tollmien<sup>3)</sup> によるもの)、それらが共に乱流の発生に関連するものであることから、Bateman の関数と流体力学の問題との間に深い関係が存在することが推察される。筆者<sup>4)</sup> は円管内の Poiseuille 流の不安定性の問題において、Bateman の微分方程式に遭遇して以来、この関数と関わりをもってきたものである。

この小論では、Bateman の微分方程式の特解の、具体的な表現に関して得られた二三の結果と、それらの関数の波形について 1 章において簡単に記述しておく。

次に、これまでに明らかになっていることであるが、円管 Poiseuille 流の不安定性の問題に関して、互いに矛盾する結果に達する場合があります。即ち、直交関数展開法を適用して問題を解こうとする場合に、主流の上に三次元の微小攪乱を重ねて、その成長あるいは減衰を調べようとするとき、座標関数の選択が適切であれば、レイノルズ数が大きい時流れは不安定であるという、経験とよく一致する結論が得られるのに対して、他の座標関数を採用する場合には、これと反対に、流れは安定であるという、矛盾する結論に達することがある。

このような事態を解消するために、その背後にある物理的な問題点と、数学的な定式化に関する考察を行ったので、2 章においてそれらの結果について報告しておく。

1. Bateman の微分方程式の解  $k$ -関数について1-1.  $n$ : 偶数 のばあい -- Bateman の解

この論文では,  $x \geq 0$ ,  $n$ : 整数とする.

Bateman の微分方程式:

$$x \cdot k_n''(x) = (x - n) k_n(x). \quad (1)$$

この式から直ちに判ることは, この関数を表す曲線は  $x = n$  が常に変曲点になっていることである. 一般に,  $x < n$  なるとき曲線は振動し,  $x > n$  では単調である.

漸化式:

$$n k_n(x) = (4x + 4 - 2n) k_{n-2}(x) - (n-4) k_{n-4}(x), \quad (2)$$

$$4x k_n'(x) = (n-2) k_{n-2}(x) - (n+2) k_{n+2}(x). \quad (3)$$

Bateman の微分方程式の4つ ( $n$  の偶奇に対して2つずつ) の特解を区別する為には, ここでは便宜上第三の引数  $i$  を使用することにして,  $k_n(x; i)$  という表現を使うが,  $i$  は  $K, I, E$  あるいは  $B$  を代表するものとする.  $i = B$  のときは, オリジナルの  $k$ -関数を表すものとし, これに関して成立する種々の関係式については, 原論文<sup>1)</sup> に詳細に記述してあるから参照されたい.

結論から先にいうならば, Bateman 方程式の特解はすべて次の形をしている.

$$k_n(x; i) = (\text{多項式} \cdot \text{超越関数})_1 + (\text{多項式} \cdot \text{超越関数})_2 \quad (4)$$

ここで, 更に多項式を  $F_n(x; i, j)$ , ( $j = 1, 2$ ) の形に表現すると, この多項式に対しては (2) と同じ形の漸化式が成立する:

$$\begin{aligned} n F_n(x; i, j) &= (4x + 4 - 2n) F_{n-2}(x; i, j) \\ &\quad - (n-4) F_{n-4}(x; i, j). \end{aligned} \quad (5)$$

例えば,  $k_0(x) = e^{-x}$ ,  $k_2(x) = 2x e^{-x}$ ,

$$k_4(x) = 2(x^2 - x)e^{-x}, \quad k_6(x) = (4/3x^3 - 4x^2 + 2x)e^{-x},$$

等の関数を得る為には,  $F_0(x; B, 1) = 1$ ,  $F_2(x; B, 1) = 2x$ ,

$F_n(x; B, 2) \equiv 0$  として, 漸化式(5)を適用すればよい. 一般に,

$$k_n(x; B) = k_n(x) = F_n(x; B, 1)e^{-x}, \quad \text{となる.}$$

### 1-2. $n$ : 偶数 のばあい -- 第2の特解

$n=0$  のときは例外として,  $k_0(x; E) = e^x/2$  とする. また, 指数積分として, 次の式で定義される関数  $Ei(x)$  を使用する.

$$Ei(x) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^x e^t/t \, dt. \quad (6)$$

$n=2, 4, \dots$  に対する第2の特解は次のように求めることができる.

$$k_2(x; E) = k_2(x; B) \cdot Ei(2x) - e^x,$$

$$k_4(x; E) = k_4(x; B) \cdot Ei(2x) - (x - 1/2)e^x,$$

$$k_6(x; E) = k_6(x; B) \cdot Ei(2x) - (2/3x^2 - 5/3x + 1/3)e^x.$$

即ち,  $F_n(x; E, 1) = F_n(x; B, 1)$ , ( $n \geq 2$ ) とおく. また第2項に関し

ては,  $F_2(x; E, 2) = 1$ ,  $F_4(x; E, 2) = x - 1/2$  として漸化式(5)

を  $n \geq 6$  に対して適用すればよい. 従って, この場合の一般式は

$$k_n(x; E) = F_n(x; B, 1)(e^{-x} \cdot Ei(2x)) - F_n(x; E, 2)e^x,$$

という形になる.

### 1-3. $n$ : 奇数 のばあい -- 第1, 第2の特解

原論文<sup>1)</sup>では  $n$  が奇数の場合についても, 簡単に触れているが, 次のようにして,

変形 Bessel 関数  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$  と  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$  をもちいて, Bateman

の微分方程式を解くことができる.

$n=1, 3, \dots$  に対しては, 一般に次の式が成立する.

$$k_n(x; I) = F_n(x; I, 1) I_0(x) - F_n(x; I, 2) I_1(x),$$

$$k_n(x; K) = F_n(x; K, 1) K_0(x) + F_n(x; K, 2) K_1(x),$$

$$F_n(x; I, 1) = F_n(x; K, 1),$$

$$F_n(x; I, 2) = F_n(x; K, 2).$$

従って、多項式は  $I$  または  $K$  のいずれか一方に関して計算を行えばよい。即ち、始めの項を、

$$F_1(x; I, 1) = F_1(x; I, 2) = x,$$

$$F_3(x; I, 1) = 4/3 x^2 - x, \quad F_3(x; I, 2) = 4/3 x^2 - x/3,$$

として漸化式(5)を利用すれば、一般解を求めることができる。例を挙げれば、

$$k_1(x; I) = x I_0(x) - x I_1(x), \quad k_1(x; K) = x K_0(x) + x K_1(x),$$

$$k_3(x; I) = (4/3 x^2 - x) I_0(x) - (4/3 x^2 - x/3) I_1(x),$$

$$k_3(x; K) = (4/3 x^2 - x) K_0(x) + (4/3 x^2 - x/3) K_1(x),$$

から出発して、例えば "MATHEMATICA" のような数式処理言語を利用すれば、次に示す正確な表現を求めることができる。

$$k_5(x; I) = (x - 12x^2/5 + 16x^3/15) I_0(x) - (x/5 - 28x^2/15 + 16x^3/15) I_1(x),$$

$$k_{17}(x; I) = (x - 144x^2/17 + 17190496x^3/765765 - 19993216x^4/765765$$

$$+ 59648x^5/3927 - 3577856x^6/765765 + 249856x^7/328185 - 704512x^8/11486475$$

$$+ 65536x^9/34459425) I_0(x) - (x/17 - 2375728x^2/765765 + 10463968x^3/765765$$

$$- 2188928x^4/109395 + 286976x^5/21879 - 3303424x^6/765765 + 1200128x^7/1640925$$

$$- 2080768x^8/34459425 + 65536x^9/34459425) I_1(x).$$

#### 1-4. 関数のグラフ

次に、4つの  $k$ -関数の関係を判り易くするために図をいくつか示しておこう。

但し、ここでは  $k_I$ ,  $k_K$  あるいは  $k_K$  の形で、添字によって関数を区別している。

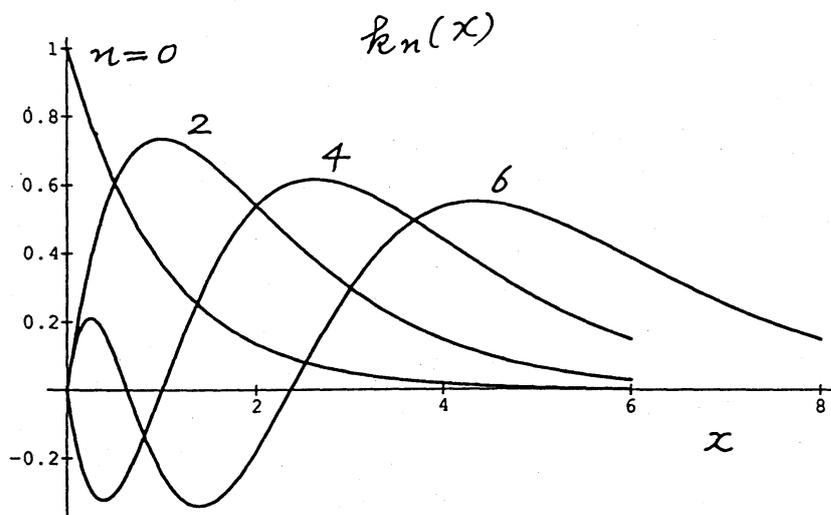


图1  $k_n(x; B)$   $n=0, 2, 4, 6$ .

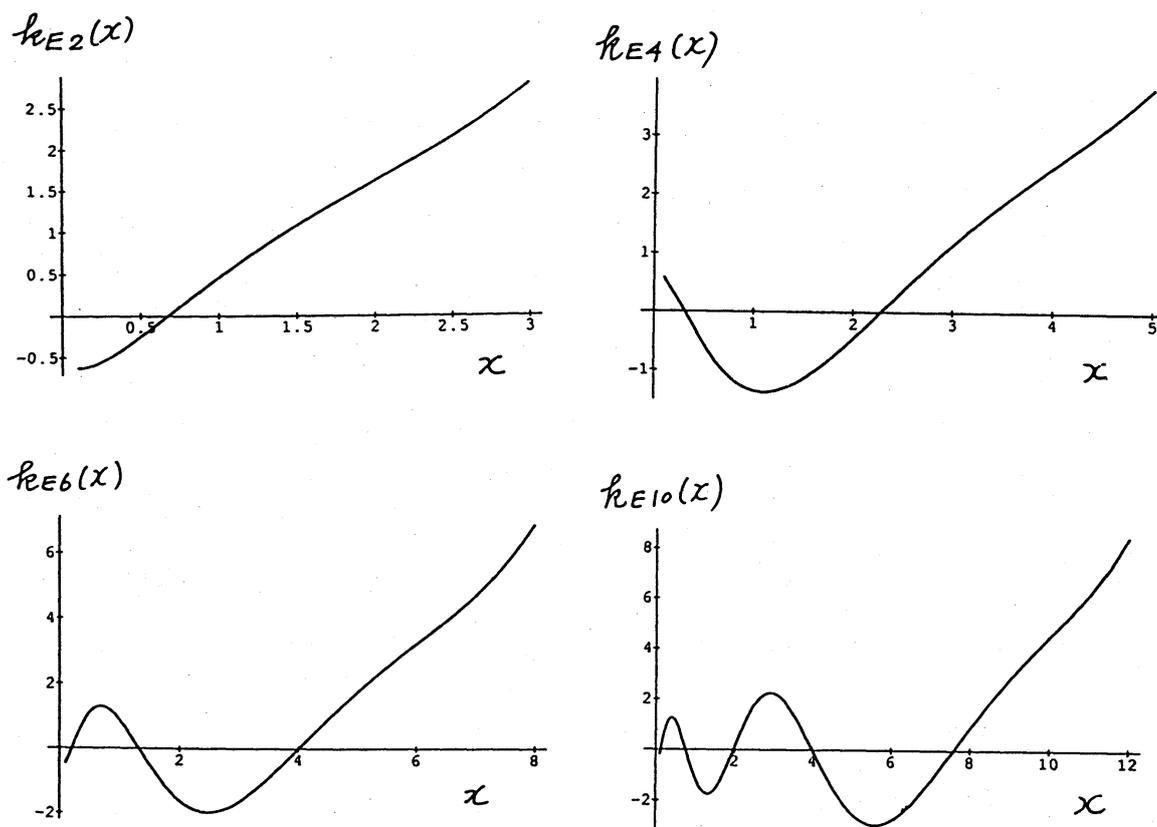
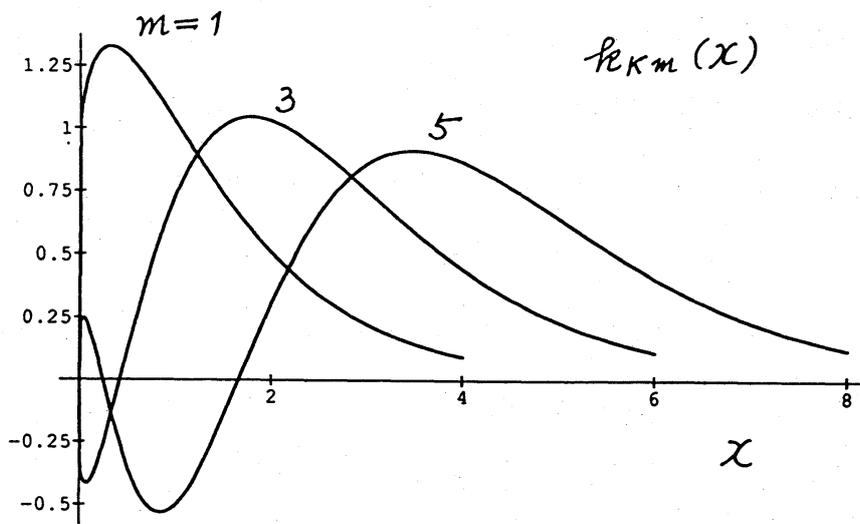
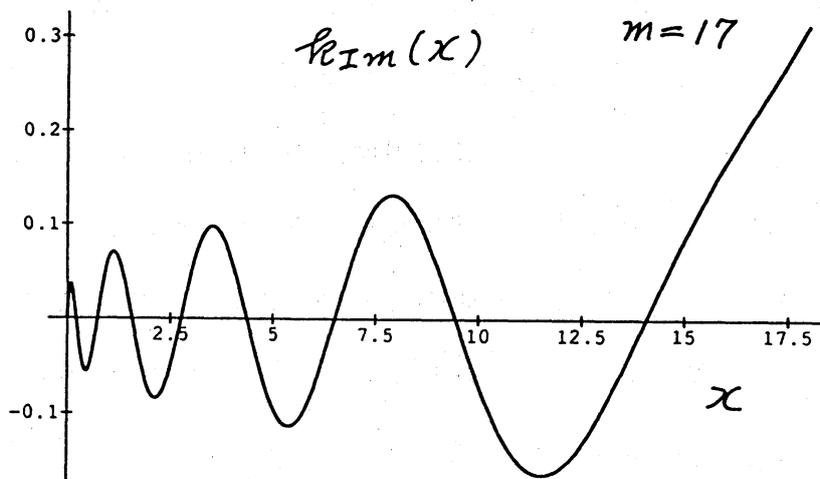
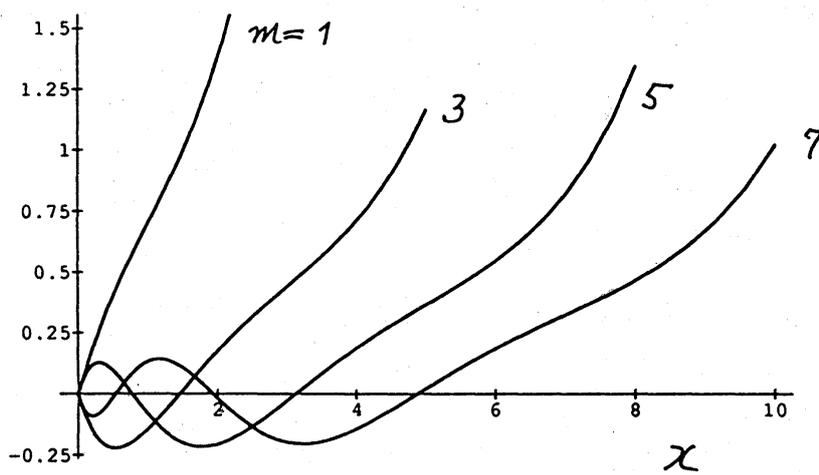


图2  $k_n(x; E)$   $n=2, 4, 6, 10$ .



⊠ 3  $k_n(x; K)$   $n=1, 3, 5$ .



⊠ 4  $k_n(x; I)$   $n=1, 3, 5, 7, 17$ .

## 2. 座標関数の選択基準

### 2-1. 微小攪乱による安定問題

円管内 Poiseuille 流のレイノルズ数が大きいとき、微小攪乱に対する安定性の問題を考察する。無次元化された円柱座標  $(r, \theta, z)$  において、主流は  $W = 1 - r^2$  で表される軸対称流であるが、これに重ね合わせるべき微小攪乱速度成分  $(u, v, w)$  は、勿論任意の三次元速度を表現できるものでなければならない。それらの間では、連続方程式が常に満足されていなければならないし、線形化された運動方程式に従わなければならない。

この問題を直交関数展開法によって近似的に解こうとするとき、座標関数の選び方が適切であるか否かによって、結論が大きく分かれることがあっても不思議ではない。むしろ、どのような条件を満たす関数列を使用するのが良いかという考察によって、選択の範囲を限定することが望ましい。

関数列の各項が連続方程式と境界条件を満足するように選ぶためのスキームについては文献<sup>4)</sup>に記述してあるから、ここでは繰り返さない。ただ、粘性流体の固体壁上における境界条件に関して、特に注意を要する点がある。壁面に垂直な速度成分は壁の上で2位の零点を持っていなければならない。当面の問題では、 $r = 1$  で  $u = 0$  だけでなく、 $\partial u / \partial r = 0$  となることが必要条件である。

2階の(同次)常微分方程式をみたす関数列は  $r = 0$  及び  $r = 1$  で  $u = 0$  とすれば、それ以外の条件を満足する余地はないから、 $u$  を表現するための関数列としては採用できない。他方で、4階の常微分方程式をみたす関数列はこの条件を満足することが可能であるから、解を表現するのに適切であることは、先に示した通りである。そのほかの適切な関数列を探すために、次に示す解析を行ったので、その要点を記しておこう。

## 2-2. 2位の零点を持つ座標関数

$\phi(r)$  は2階の常微分方程式をみたす関数とし、 $\phi(0)=0$ 、 $\phi(h)=0$  となるように  $h$  をえらぶとき、一般に  $\phi'(h) \neq 0$  である。 $\phi(r)$  の不定積分を  $\psi(r)$  とする：

$$\psi(r) = \int \phi(r) dr. \quad (7)$$

これをもちいて

$$\Psi(r) = \psi(r) - \psi(h), \quad (8)$$

とおくと  $\Psi(r)$  は  $\Psi(h) = \Psi'(h) = 0$  なる条件を満たし、3階常微分方程式を満足している。

一例として、Bessel 関数  $J_1(r)$  をもちいて、

$$\phi_\nu(r) = J_1(h_\nu r), \quad (9)$$

とする。ここに、 $h_\nu (\nu = 1, 2, \dots)$  は  $J_1(r)$  の零点である。このとき、

$$\Psi_\nu(r) = J_0(h_\nu r) - J_0(h_\nu), \quad (10)$$

となる。この関数は周辺をクランプした円板の、面内圧縮力による座屈問題に対する固有関数を表している。

そこで、この関数列を使用し、円管内 Poiseuille 流の微小攪乱に対する安定性の問題に適用することによって、有限な臨界レイノルズ数  $Rec$  が得られることが確かめられた。関数列の項数を  $M = 24, 48, 72$  と変化した場合に得られる  $Rec$  の近似値を図5において、 $\times$  印によって示している。

またこの図において、 $\bullet$  印と実線は座標関数として円板の振動の固有関数を使用し、項数  $M$  が  $21, 24, \dots, 75$  の範囲で変化した場合の  $Rec$  の近似値を示している。最小2乗法により外挿を行うと、項数を増加するとき  $M \rightarrow \infty$  に対して  $Rec = 90, 000$  という結果が得られるものである<sup>5)</sup>。座標関数の選

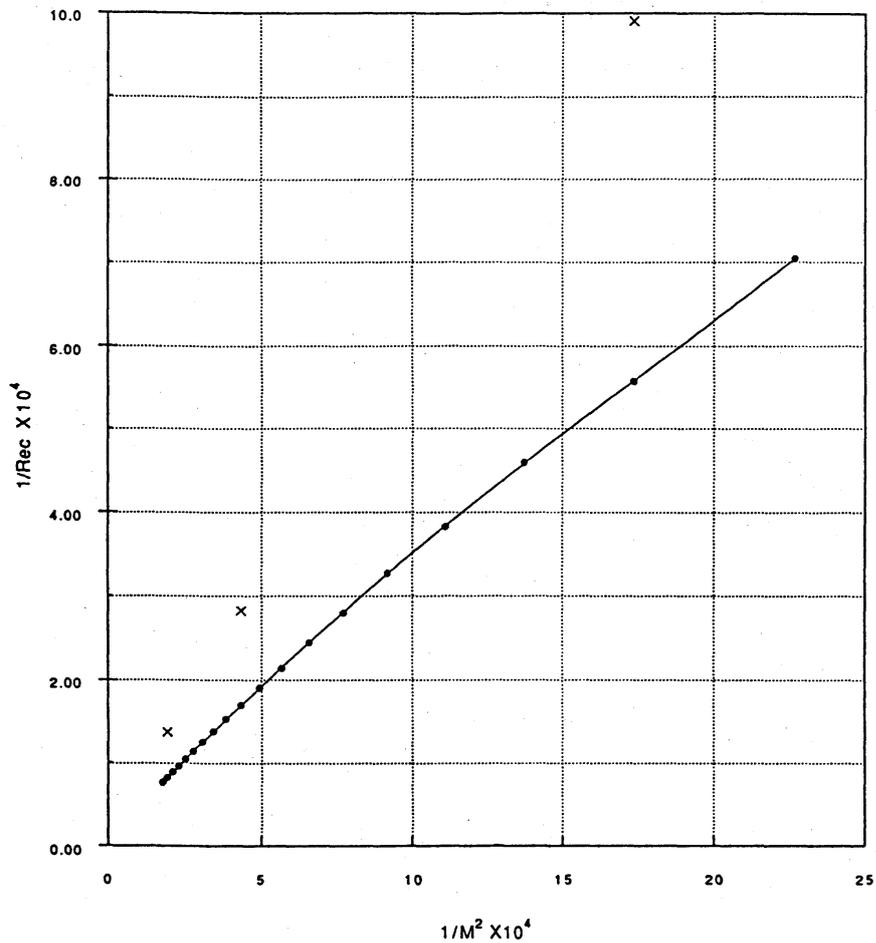


図5 項数MによるRecの近似値の変化

扱により近似の程度に大きな差異はあるが、有限な臨界レイノルズ数が得られるということに関しては相互に矛盾はない。

なお付言して置くならば、(9)式の関数  $\phi_v(r)$  は Salwen and Grosch<sup>6)</sup> が、円管内 Poiseuille 流の解析において採用したものであるが、先に筆者<sup>7)</sup>が指摘した通り、この関数列によっては安定という結果に導かれるばかりである。

筆者の知る限りでは、関数展開法によって有限な臨界レイノルズ数が得られなかったと主張する論文において、使用された関数列はいずれも2階の微分方程式

の解に限られるようである。1章で論じた Bateman の関数についても、この間の事情は同様である。

以上の解析結果をもとにして、2階の常微分方程式の解をそのまま座標関数として採用することをやめ、前述の(7)、(8)の操作を適用することにするならば、適切な関数列を新たに見出す可能性が開けたことになる。

さらに付言するならば、2位の零点を持つ関数列を使用するという基準を設けるとしても、それは必要条件ではあっても、十分条件ではないことに注意しなければならない。

### 2-3. むすび

もしも、微小攪乱に対して流れが安定であると主張しようとするならば、あらゆる攪乱に対して論証しなければならないから、容易なことではあるまい。これに反して、不安定性の論拠としては、1つでも例を示すことができればよい訳であって、それは既に実行済みである。今回の報告によって新たに、複数の実例に対する展望が開けたものと考えて良いであろう。

### 文 献

- 1) H. Bateman: Trans. Am. Math. Soc. **33** (1931) 817.
- 2) Th. v. Kármán: Göttinger Nachrichten (1930) 58.
- 3) W. Tollmien: Göttinger Nachrichten (1929) 21.
- 4) K. Munakata: J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1983) 2004.
- 5) 宗像健一: 日本物理学会第41回年会予稿集 4 (1986) 96.
- 6) H. Salwen and C. E. Grosch: J. Fluid Mech. **54** (1972) 93.
- 7) 宗像健一: 数理解析研究所講究録 719 (1990) 58.