数理解析研究所講究録
第 800 巻 1992 年 1-13

差分回転をしている球殻中に発生する熱対流とその分岐

京大・理　荒木　圭典　(Keisuke Araki)
岡山大・工　柳瀬　真一郎　(Shin'ichiro Yanase)
同大・工　水島　二郎　(Jiro Mizushima)

1　はじめに

地球磁場の生成と維持の機構は地球内部の外核 (outer core) における電磁流体 (MHD 流体) の運動によるとされている。磁場の生成と維持のために必要最低限の要素が何であるかまだ明らかではないが、速度場にヘリシティが存在することが重要な役割をはたしていることが分かっている。そこで、地球内部の外核における MHD 流体の運動のモデルとして、異なる速度で回転している同心球面に挟まれた球殻中の MHD 流体の運動を調べることができる。流体運動にエネルギーを供給する機構は流体内部における化学反応による発熱や内核 (inner core) からの加熱によると考えられる。これとよく似た状況は地球大気の運動でも起こっている。大気は中性流体であるが、同様のモデルで近似できると考えられる。

このようなモデルは古くから考えられており、そのいくつかの要素を取り入れた研究は Chandrasekhar (1961) に詳しく紹介されている。最近では、剛体回転している温度の異なる二つの球面に挟まれた球殻中の熱対流は、Young (1974), Gilman (1975), Miller and Gall (1983) により数値シミュレーションによって、その平衡解が調べられた。また、Hart, Glatzmaier and Toomre (1986) はスペースラボを用いて実験を行い、さらに数値シミュレーションの結果と比較を行った。Glatzmaier (1984) は MHD 流体の数値シミュレーションを行い、MHD 乱流ダイナモの機構を調べた。

一方、異なる速度で回転している二つの球面に挟まれた球殻中の流体運動は Schrauf (1986) が平衡解をニュートン法により求め、解の分岐を調べた。また、Marcus and Tuckerman (1987a,b) は数値シミュレーションによって流れの遷移を調べた。

ここでは、剛体回転する球殻中の熱対流を取り扱った Hart, Glatzmaier and Toomre の論文と、球殻中の Taylor 流れを取り扱った Marcus and Tuckerman の論文の紹介をした後、異なる速度で回転している二つの球面に挟まれた球殻中の熱対流を、線形安定性の方法と非線形平衡解をニュートン法により求める方法で調べた結果を報告する。重力は球の中心方向に働いているとし、二つの球面上での温度は一定であるが、内側の球面の温度は外側の球面の温度より高いとする。

2 球殻中の熱対流と Taylor 流についてのレヴュー

2.1 剛体回転する球殻中の Bénard 問題

この節では、Hart J. E., Glatzmaier G. A., and Toomre J., *J. Fluid Mech.* **173**. 519-544 (1986) の仕事を紹介する。彼らは、(1) Spacelab 3 上における、剛体回転する球殻中の熱対流の実験と、(2) 剛体回転する半球殻中の熱対流の数値シミュレーションを行った。

彼らの実験では、対流をおこす流体に誘電体を用いることによって、静電気力を用いて中心向きの重力の代わりとしている。このとき、誘電体にかかる実効的な静電重力は半径の逆 5 乗力となり、重力のような逆 2 乗力ではない。彼らの主張に依れば、実験に用いた装置のアスペクト比を用いて、数値的に求めた線形安定性問題の固有関数の形が、様々な重力分布下でほとんど同一だったことから、今回の実験でも、逆 2 乗力下での対流の性格を、定性的に再現していると期待される。流体に与える熱源（内殻）の温度分布は、球面上で一様な場合と、緯度方向に温度分布が存在する場合（極の方が暖かい）の二通りで行われた。

実験の結果、パラメーターによって、大きく次のような対流パターンが得られた。（詳細は論文の第 3 章と図 5 にある。）(1) バナナ・セル。（高速回転、一様加熱）「南北」方向にカラム型セルが並んだ構造が出現した。Rayleigh 数が大きくなるにつれて、高緯度領域に乱流的な動きが発生し、バナナ・セルの高緯度部分を破壊するようになる。南北のカラム型構造は定性的には、Taylor-Proudman の定理により南北方向の運動が阻害されているために、生じている。(2) スパイラル波。（高速回転、非一様加熱）北東から南西にかけての傾いたカラム型構造が、スパイラル状に生じる。Rayleigh 数を上げると、カラム型構造は不安定になり、カラムどうしの再結合が生じ、運動はカオス的になるが、平均的に見ると斜めに傾いた構造が残っている。(3) サッカー・ボール模様。（低速回転、一様加熱）不規則な多角形を敷き詰めたような模

様が全体に生じる。境界の部分で流体が上昇し、多角形の内部で下降する。

数値実験は、球面調和関数と Chebyshev 多項式による展開およびコロケーション法を用いて行われた。数値実験の結果も、この実験での結果を定性的に再現している。

2.2 球殻 Taylor 流

ここでは、Marcus P. S. and Tuckerman L. S., *J. Fluid Mech.* **185**. 1-30,31-66 (1987) の仕事を紹介する。彼らは、差分回転の境界条件下での球殻中の Taylor-Couette 流の定常解と、定常解のあいだの分岐の振る舞いを、運動方程式の初期値問題を数値的に解いて求めた。数値計算は、三角関数と Chebyshev 多項式による展開を行い、非線形項には Adams-Bashforth 法を、粘性項には implicit Crank-Nicholson 法を、時間発展には有限差分法を用いて計算された。流れには軸対称性が仮定されている。彼らの数値実験の主要な結果は、次の通りである。 (1) 得られた定常解は、ロールの個数が半球で１、２、３個の３種の解（彼らはそれぞれ、0-, 1-, 2-vortex flow と呼んでいる）であり、南北に対称である。Reynolds 数が大きいほど、ロールの個数は増える。また、同じ Raynolds 数に対して、0- と 1-vortex 、1- と 2-vortex のように、２種の定常解が存在し、解の選択に当たっては、系がそれまでにたどった履歴が効いている。 (2) Reynolds 数の変化に伴って、それぞれの解の間で遷移が起こる。その際に、$0 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 0$ では対称なモードの成長・消退が起こるのに対して、$0 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 1$ では、反対称な不安定モードの影響で、南北に非対称に流れが非線形発展した結果として、最終的には対称な定常解へと落ちつく。その結果、$0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$ の解の間の遷移に対して、履歴現象が存在する。

3 数値計算の結果

流体は、内殻半径 R_1、外殻半径 $R_1 + d$ の同心球内の領域に置かれている。基礎方程式は、連続の式、Bousinesq 近似の運動方程式、熱伝導方程式である。

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + g(r)\alpha T r_i + \nu \Delta v_i, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \Delta T, \tag{3}$$

$$g(r) = (1-m)\left(\frac{R_1}{r}\right)^2 + m\left(\frac{r}{R_1}\right)^2, \tag{4}$$

ここで r_iは半径方向の単位ベクトルの座標成分、αは熱膨張率、m は質量比である。これらの方程式を以下の境界条件の下で積分し解を求める。これより球座標、(r, θ, ϕ) 系で記述する。

内殻 $r = R_1$:　$\overrightarrow{v} = R_1 \Omega \sin\theta \overrightarrow{e}_\phi,\ T = T_0 + \Delta T$

外殻 $r = R_1 + d$:　$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0},\ T = T_0$

ここで$\overrightarrow{e}_\phi$はϕ方向の単位ベクトル、Ωは内殻の回転角速度である。速度場に対し軸対称性 $(\partial/\partial\phi \equiv 0)$ を仮定すると、運動方程式を (r, θ) 方向とϕ方向の運動を表す 2 変数に、帰着させることができる。このとき速度場は、(r, θ) 方向は Stokes の流れ関数:Ψ_{tot}を用いて

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \Psi_{tot}}{\partial \theta}, \qquad v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Psi_{tot}}{\partial r}$$

となり、ϕ方向はω_{tot}を用いて

$$v_\phi = \frac{\omega_{tot}}{r\sin\theta}$$

と表される。

計算の便宜上、次の変数変換、

$$\Psi_{tot} = \Psi, \qquad \omega_{tot} = \omega_{st} + \omega, \qquad T_{tot} = T_{st} + T$$

を施し、新しい変数を用いて運動方程式を記述する。ここでω_{st}は $\Delta v = 0$ をみたす Stokes 解、

$$\omega_{st} = \frac{\Omega R_1^3}{(R_1+d)^3 - R_1^3}\left[\frac{(R_1+d)^3}{r} - r^2\right]\sin^2\theta$$

T_{st}は $\Delta T = 0$ をみたす熱伝導解、

$$T_{st} = T_0 + \frac{R_1}{d}\left(\frac{R_1+d}{r} - 1\right)\Delta T$$

である。この変換によって、変数の満たすべき境界条件は、

$$r = R_1, R_1 + d \text{において} \qquad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \omega = T = 0$$

となる。

この変数を用いた運動方程式を、d とκによって無次元化すると、運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D^2\Psi}{\partial t} = & \frac{1}{r^2 \sin\theta} J(\Psi, D^2\Psi) \\
& - \frac{2}{r^2 \sin^2\theta} D^2\Psi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \cos\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \sin\theta \right) \\
& + 6 \left(\frac{\Omega R_1^3}{3R_1^2 + 3R_1 + 1} \right)^2 \frac{(R_1+1)^3}{r^4} \left[\frac{(R_1+1)^3}{r} - r^2 \right] \sin^2\theta \cos\theta \\
& + 6 \frac{\Omega R_1^3 (R_1+1)^3}{3R_1^2 + 3R_1 + 1} \frac{\cos\theta}{r^4} \omega \\
& - 2 \frac{\Omega R_1^3}{3R_1^2 + 3R_1 + 1} \left[\frac{(R_1+1)^3}{r^3} - 1 \right] \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \cos\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \sin\theta \right) \\
& - 2 \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \cos\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \sin\theta \right) \\
& + Pr D^2 D^2 \Psi + Pr Ra\, g(r) \frac{\partial T}{\partial \theta} \sin\theta \qquad (5) \\
\frac{\partial \omega}{\partial t} = & \left(\frac{\Omega R_1^3}{3R_1^2 + 3R_1 + 1} \right) \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial r} \left\{ \frac{(R_1+1)^3}{r} - r^2 \right\} 2\cos\theta \right. \\
& \left. + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \left\{ \frac{(R_1+1)^3}{r^2} + 2r \right\} \sin\theta \right] + \frac{1}{r^2 \sin\theta} J(\phi, \omega) + Pr\, D^2\omega \qquad (6) \\
\frac{\partial T}{\partial t} = & \frac{R_1(R_1+1)}{r^4 \sin\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} J(\Psi, T) + \Delta T \qquad (7)
\end{aligned}$$

ここで D^2, $J(f,g)$ は、以下のように定義された演算子である。

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad J(f,g) = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial r}.$$

Ra は Rayleigh 数、Re は Raynolds 数、Ta は Taylor 数で、以下のように定義される。

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta T d^3}{\kappa\nu}, \ Re = \frac{R_1^2\Omega}{\nu}, \ Ta = Re\left(\frac{d}{R_1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

今回は、(1) 回転の無い場合 (Bénard 問題) の臨界 Rayleigh 数と線形増幅率、および平衡解、(2) 回転の有る場合の平衡解を求めた。数値計算には、コロケーション法を用いた。展開関数は、r方向には Chebyshev 多項式、θ方向には三角関数を用いた。臨界 Rayleigh 数は、線形問題の固有値を求める方法で計算した。平衡解は、Newton-Raphson 法を用いて求めた。計算のパラメーターは、表 (1) にまとめてある。

回転無し臨界 Rayleigh 数の、無次元化された内殻半径 R_1依存性は図 (1) に示す。計算においては赤道に関して対称なモードのみを考慮した。R_1が大きいほど、臨界 Rayleigh 数は小さくなり、流体層は不安定化する。R_1が大きくなるにつれて、平行平板間の Bénard 問題の臨界 Rayleigh 数、Ra=1707 へと漸近していくように思われるが、高アスペクト比 ($R_1 > 10$) においては、おそらくモード数の不足のために、真の値よりも低めに Rayleigh 数が出ているのではないかと思われる。

臨界点における固有関数は、$R_1 = 1, \ 2, \ 5$ の場合について、図 (2) に示してある。ロール状構造の数は、アスペクト比の増加とともに、増加している。

回転無しの最大線形増幅率を、$R_1 = 2, \ 4$ の場合に求めたものが、図 (3) に示してある。最大増幅率は Rayleigh 数とともに、線形に増加している。平衡解の計算より求められた臨界 Rayleigh 数は、$R_1 = 2$ のとき 2712 、$R_1 = 4$ のとき 2175 である。これらの値は、固有値を直接求めた場合の値とほぼ一致している。

次に回転の効果を含んだ Bénard 問題における、臨界点近傍での解の特徴を、Nusselt 数に着目して調べた。半径は、$R_1 = 2$ に固定し、Ωを $0 \sim 30$ 、Rayleigh 数を $2700 \sim 2800$ の範囲で調べた。計算の結果判明したことは、次のとおりである。(表 2) (1) 回転数を固定した場合、Nusselt 数は Rayleigh 数とともに増加する。(図 4) (2) Rayleigh 数を固定した場合、Nusselt 数は回転数とともに増加する。(図 5) (3) Nusselt 数が十分に小さくなる Rayleigh 数 (ここでは $Nu - 1 < 10^{-5}$を調べた) は、回転数の増加とともに減少している。(図 4) その結果、回転数が増加するにつれて、臨界 Rayleigh 数は減少する様子がうかがわれる。

4 考察

まず、球殻という形態の影響について考察する。R_1が小さくなるにつれて、すなわちアスペクト比が小さくなるにつれて、臨界 Rayleigh 数が上昇している。これより流体層の厚みに対して、曲率が大きい方がより安定であるといえる。しかしながら曲率の影響は、どちらかと言うと、曲がっていること自体よりも、系全体を有限な大きさに制限していることの方に、効いているのではないだろうか。すなわち系全体のアスペクト比が有限であるが故に、ある特定のパラメーターにおける可能な安定なロール・パターン解の数や形に制限が加わっているのではないろうか。もしそうならば、低アスペクト比になればなるほど、その解の数が少なくなっていると考えられるので、安定性は増加すると考えられる。この関連において、アスペクト比の変化に伴う、臨界 Rayleigh 数の変化と、臨界での固有関数におけるロールの数と形の変化の振る舞いは、詳しく調べる必要があるだろう。

つぎに、Bénard の不安定性に対する回転の影響について考察する。回転数の上昇とともに、Nusselt 数が十分に減衰する Rayleigh 数が下がったことから、差分回転により流体にかかる遠心力は、静止状態の不安定性を助長しているといえる。また、Rayleigh 数を固定した場合に、回転数の上昇に伴って Nusselt 数の上昇が観察されたことから、この遠心力は、熱輸送における対流の寄与を強めている。以上より、熱対流に対する差分回転による遠心力の影響は、Bénard 型の不安定性を助長し、対流ロール状態の安定性を高めてる方向に働く、ということが定量的に確認された。

これからの課題はさらに広い範囲の回転数と Rayleigh 数における定常ロール解の振る舞いを調べることである。特に、Taylor-Couette 流の安定性に対する境界の温度差の影響、ロールの形態の変化や、個数の増減に関する分岐の振る舞いを、調べていく予定である。

参考文献

Chandrasekhar S., 1961 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability,* Oxford Univ. Press

Gilman P. A., 1975 Linear Simulations of Boussinesq Convection in a Deep Rotating Spherical Shell, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **32,** 1331-1352

Glatzmaier G. A., 1984 Numerical Simulations of Stellar Convective Dynamos. I The Model and Method, *J. Comput. Phys.* **55,** 461-484

Hart J. E., Glatzmaier G. A., and Toomre J., 1986 Space-laboratory and numerical simulations of thermal convection in a rotaring hemispherical shell with radial gravity, *J. Fluid Mech.* **173**, 519-544

Marcus P. S. and Tuckerman L. S., 1987a Simulation of flow between concentric rotating spheres. Part I. Steady states., *J. Fluid Mech.* **185**, 1-30

Marcus P. S. and Tuckerman L. S., 1987b Simulation of flow between concentric rotating spheres. Part II. Transitions., *J. Fluid Mech.* **185**, 31-66

Miller T. L. and Gall R. L., 1983 Thermally Driven Flow in a Rotating Spherical Shell: Axisymmetric States, *J. Atomos. Sci.* **40**, 856-868

Schrauf G., 1986 The first instability in spherical Taylor-Couette flow, *J. Fluid Mech.* **166**, 287-303

Young R. E., 1974 Finite-amplitude thermal convection in a spherical shell, *J. Fluid Mech.* **63**, 695-721

表 (1)　数値実験のパラメーター。

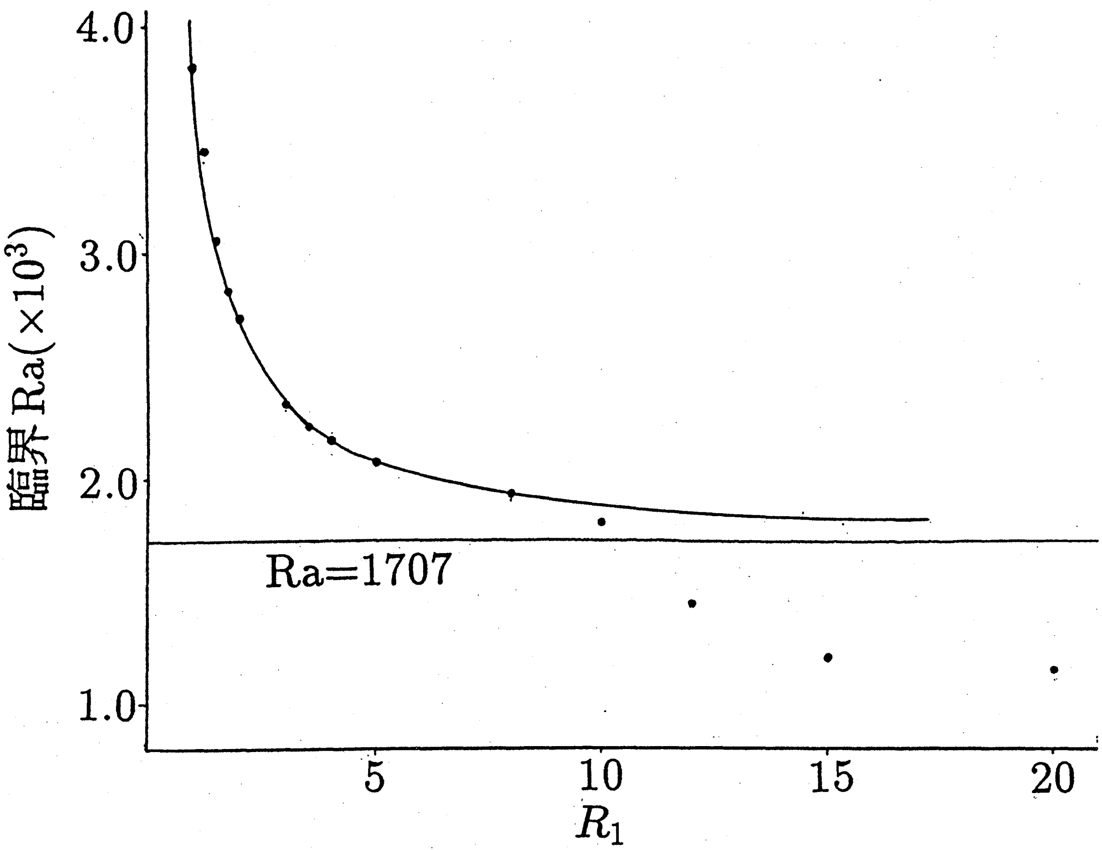
	モード数 (m:r 方向, n:θ方向)	回転数 (Ω)	Pr	R_1	Ra
臨界 Rayleigh 数	m=7, n=32	0	–	$1 \sim 20$	$(1100 \sim 4000)$
線形増幅率	m=4, n=10, 16	0	7	2, 4	$2000 \sim 4000$
平衡解	m=4, n=10	$0 \sim 30$	7	2	$2600 \sim 2790$

表 (2) 平衡解の計算結果。

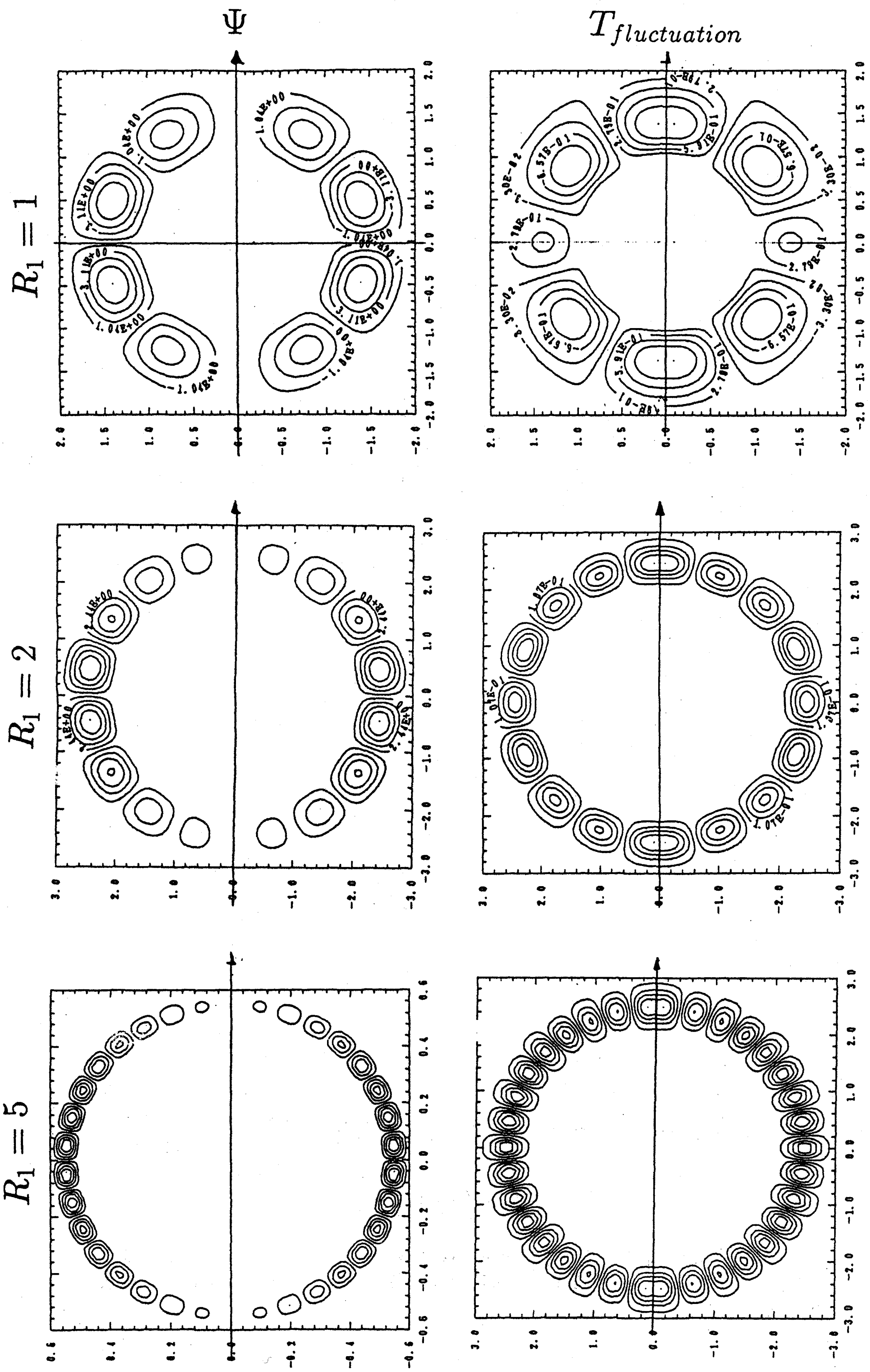
Ra	Ω	Nu−1
2790	0.0	1.485×10^{-2}
2790	0.1	1.485×10^{-2}
2790	0.2	1.485×10^{-2}
2790	0.5	1.485×10^{-2}
2790	1.0	1.486×10^{-2}
2790	2.0	1.490×10^{-2}
2770	2.0	7.529×10^{-3}
2750	2.0	2.961×10^{-3}
2730	2.0	3.806×10^{-4}
2710	2.0	4.690×10^{-8}
2790	3.0	1.495×10^{-2}
2770	3.0	7.568×10^{-3}
2750	3.0	2.985×10^{-3}
2730	3.0	3.913×10^{-4}
2710	3.0	1.000×10^{-7}
2790	4.0	1.503×10^{-2}
2770	4.0	7.612×10^{-3}
2750	4.0	3.019×10^{-3}
2730	4.0	4.065×10^{-4}
2710	4.0	1.639×10^{-7}

Ra	Ω	Nu−1
2790	6.0	1.526×10^{-2}
2790	8.0	1.559×10^{-2}
2790	10.0	1.601×10^{-2}
2790	20.0	1.974×10^{-2}
2790	15.0	1.752×10^{-2}
2790	20.0	1.974×10^{-2}
2790	30.0	2.660×10^{-2}
2790	25.0	2.273×10^{-2}
2790	30.0	2.660×10^{-2}
2790	35.0	3.139×10^{-2}
2790	10.0	1.601×10^{-2}
2770	10.0	8.280×10^{-3}
2750	10.0	3.439×10^{-3}
2730	10.0	6.048×10^{-4}
2710	10.0	1.084×10^{-7}
2770	20.0	1.086×10^{-2}
2750	20.0	5.127×10^{-3}
2730	20.0	1.535×10^{-3}
2720	20.0	4.610×10^{-4}
2710	20.0	3.601×10^{-5}

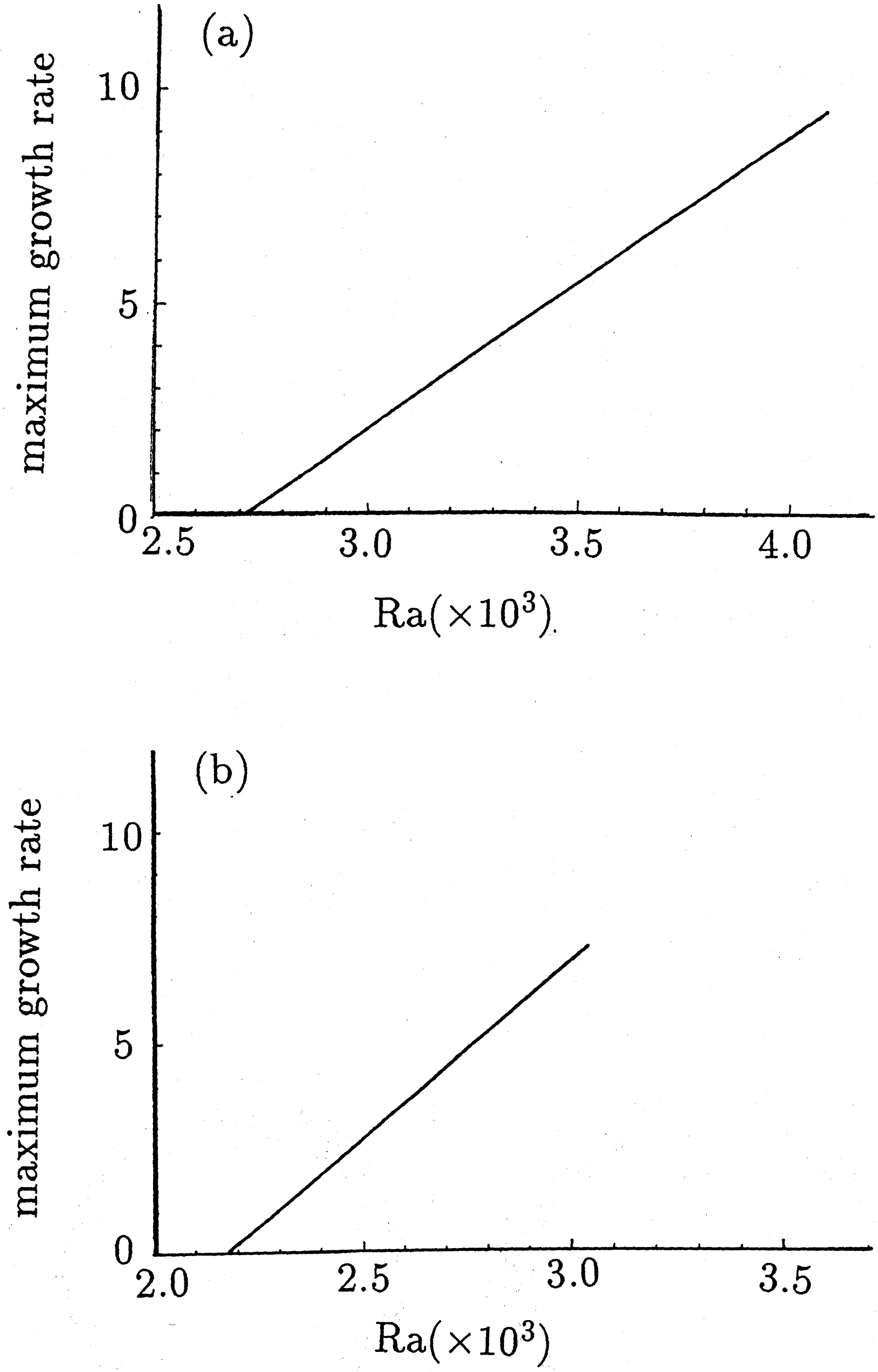
Ra	Ω	Nu−1
2700	20.0	6.001×10^{-7}
2770	30.0	1.593×10^{-2}
2750	30.0	8.593×10^{-3}
2730	30.0	3.756×10^{-3}
2710	30.0	7.968×10^{-4}
2700	30.0	1.552×10^{-4}
2690	30.0	4.903×10^{-5}
2680	30.0	3.269×10^{-5}
2670	30.0	2.520×10^{-5}
2660	30.0	2.007×10^{-5}
2650	30.0	1.595×10^{-5}
2640	30.0	1.240×10^{-5}
2630	30.0	9.244×10^{-6}
2620	30.0	6.367×10^{-6}
2610	30.0	3.712×10^{-6}
2600	30.0	1.238×10^{-6}



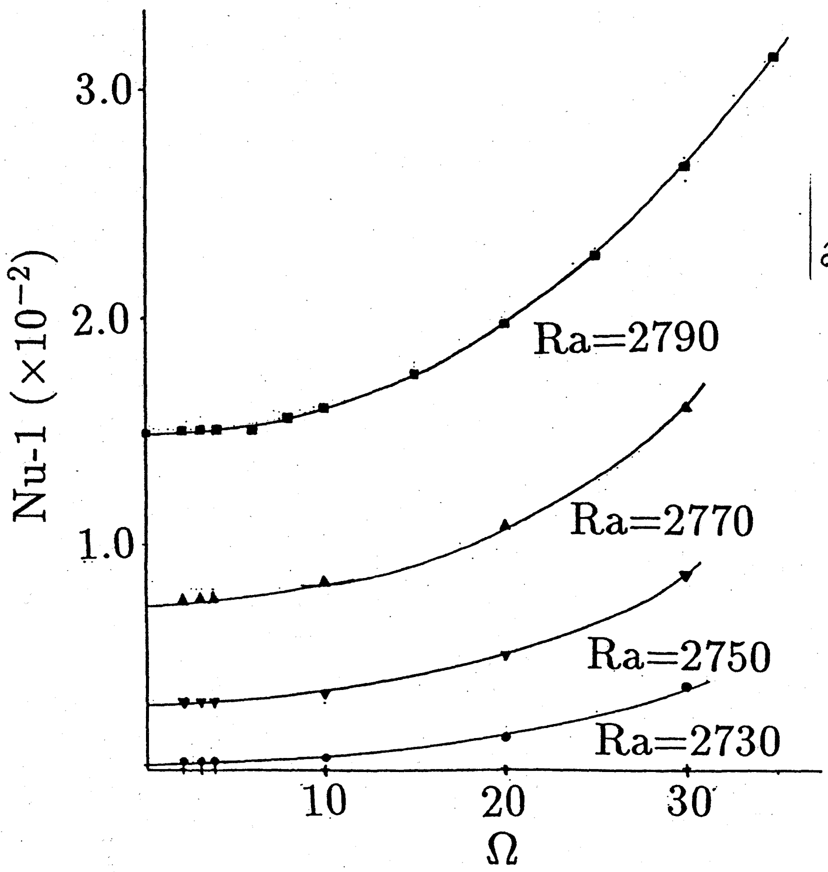
図（ / ） 球殻中の Benard 問題の線形安定性。$\Omega = 0$(差分回転無し）。Chebyshev モード数: m=7 、sin モード数: n=32 。$R_1 \geq 10$ ではθ方向のモード不足か？



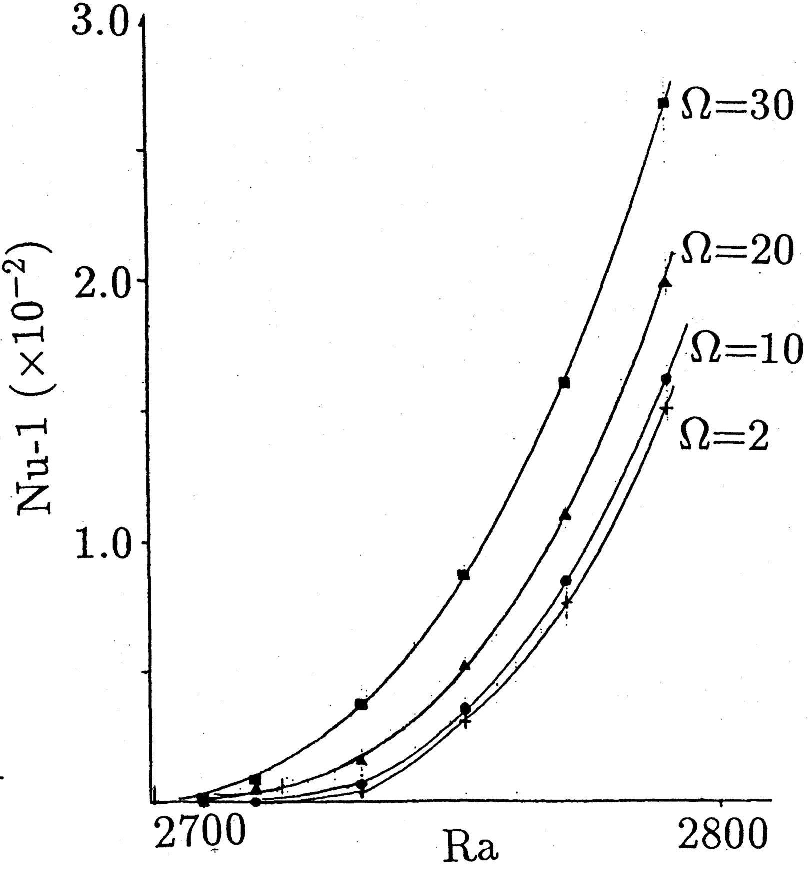
図(2) 臨界 Rayleigh 数での平衡解。$\Omega = 0$(差分回転無し)。Chebyshev モード数: m=7、sin モード数: n=32。



図(3) 線形問題の最大増幅率の Rayleigh 数依存性。$\Omega = 0$(差分回転無し)。(a) $R_1 = 2$, m=4, n=10. 臨界 Ra=2712 (b) $R_1 = 4$, m=4, n=16. 臨界 Ra=2175



図(5) Nusselt 数の回転数依存性。$R_1 = 2$, m=4, n=10。



図(4) Nusselt 数の Rayleigh 数依存性。$R_1 = 2$, m=4, n=10。