

## Symbolic Rees 環の Noether 性の幾何的判定法 (Cutkosky の方法)

東海大・理・渡辺敬一 (Kei-ichi Watanabe)

序

任意の体  $k$  に対して, 環準同型

$$\varphi: S = k[X, Y, Z] \longrightarrow k[t^a, t^b, t^c] \subset k[t]$$

を,  $\varphi(X) = t^a, \varphi(Y) = t^b, \varphi(Z) = t^c$  とし,  $(a, b, c) = 1$

$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(a, b, c) = \text{Ker}(\varphi)$  とする. このとき,

$$R := R_S(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^{(n)} \cdot u^n$$

が Noether 環になる ( $\Leftrightarrow S$  上有限生成である) ための条件を求めようというのが我々の問題である.

この問題に対してのこれまでの環論的方法は, ある種の条件をみたす元を  $\mathfrak{p}$  の symbolic power から探して来るといった方法が主で, 計算に重点がおかれていたように思う.

本稿の目的は, この問題を幾何的にとらえた, Cutkosky の方法 [3] の紹介である. (この論文には, 本質的ではないが, 若干のミスや理解し難い点があり, このような点を私なりに解釈してみた. なお, 余り代数幾何を仮定しなくないので, 若干記述が冗長になるのをお許し頂きたい.)

幾何的な視点をとる事のメリットとして次のようなものが考えられる。

(1)  $a, b, c$  がある条件をみたすとき、extremal ray の理論から、有限性が保証される。(cf. (3.1)(I), (4.1))

(2) Huneke の判定法が、図形的な意味付けをもつ、(cf. §5.)

(3) 次数の比較的小さい元が存在するとき、(これは曲面  $X$  上に  $C^2 < 0$  な curve  $C$  が存在する事の云々)  $R$  の Noether 性と  $C$  の contraction が projective である事が同値になる。逆に見ると、 $R$  が Noether でない例は、projective morphism で contract できる曲線の例を与え子。

以下に書く事は、いささか樂觀的にすぎ予想かもしれないが、

(4) 高次元の場合 ( $S$  が 4 変数以上) にも、ある程度同じ手法が使えないか?

(5) effective curves の cone を見る事によつて、「標数  $p > 0$  なら  $R$  は常に Noetherian、位は不変でないか?

(6) 上記の (3) の場合に、 $R$  が Noether かどうか判定するアルゴリズムが作れないか? (これは  $\text{dim}(k) = 0$  のときのみ意味がある。)

### § 1. Geometric Formulation.

$S = k[X, Y, Z]$  上,  $\deg(X) = a, \deg(Y) = b, \deg(Z) = c$   
 とし  $\mathbb{P}$  grading を入れる. ( $f = f(a, b, c)$  が homogeneous  
 になるようにして置く.) このとき,

$\mathbb{P} := \mathbb{P}(a, b, c) = \text{Proj}(S)$  とおく. 定義により,

$\mathbb{P} = D_+(X) \cup D_+(Y) \cup D_+(Z)$  であり,  $D_+(X) = \text{Spec}((S_X)_0)$ ,  
 $D_+(Y) = \text{Spec}((S_Y)_0)$ ,  $D_+(Z) = \text{Spec}((S_Z)_0)$  である. ( $( )_0$  は degree  
 0 の subring. を表す.) 例として,  $(a, b, c) = (7, 9, 10)$  の  
 とき,  $(S_X)_0 = k\left[\frac{Y^7}{X^9}, \frac{Y^2Z}{X^4}, \frac{YZ^4}{X^7}, \frac{Z^7}{X^{10}}\right]$  であり,  $D_+(X)$  は  
 order 7 の "cyclic quotient singularity" ( $k[y, z] / (y^7 + z^7)$ )  
 $\subset k[y, z]$  と  $(S_X)_0$  は同型) を  $(1:0:0)$  に移して置く, normal  
 affine variety である.  $(a, b, c)$  が 2 つずつ互いに素であ  
 るとき,  $\mathbb{P}$  は 3 点の "quotient singularity" をもち, それら  
 の位数は  $a, b, c$  である.

仮定. 後の問題に際して,  $(a, b, c)$  を 2 つずつ互いに素  
 としても一般性を失わない事は容易にわかるので, 以下, 二  
 の条件を常に仮定することにする.

$f = f(a, b, c)$  は  $\mathbb{P}$  上の 2 の素イデアルだから,  $V_+(f) \in \mathbb{P}$   
 は点になる. この点は上記の 3 点の特異点とは異なるから,  
 smooth point である.  $P = \mathbb{P}(a, b, c) = V_+(f)$  とおく.

$\mathcal{F}^{(n)}$  と  $\mathcal{F}^n$  の差は  $(X, Y, Z)$ -primary ideal のみだから、

$$\mathcal{F}^n = \bigoplus_{i \geq 0} H^0(\mathbb{P}, \tilde{\mathcal{F}}^n(i)) = \bigoplus_{i \geq 0} H^0(\mathbb{P}, \mathcal{G}_{\mathbb{P}}^n(i))$$

と書ける。なお、 $\mathcal{O}_X(n) = S(n)^\sim$ ,  $\mathcal{F} = \tilde{M}$  のとき、 $\mathcal{F}^{(n)} = M^{(n)}$ ,  
graded  $S$ -module  $M$  に對し、

$\tilde{M}$  は  $H^0(D_+(X), \tilde{M}) = (M_x)_0$  etc. で決る  $\mathbb{P}$  上の sheaf,

$M^{(n)}$  は  $M^{(n)}_i = M_{n+ni}$  で定まる graded  $S$ -module.

次に、

$$X := X(a, b, c) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}(a, b, c) \quad \text{と } P = V_+(\mathcal{F}(a, b, c)) \text{ と}$$

の blowing-up とし、 $\pi^{-1}(P) = E$  とおく。  $P$  は smooth point だから、 $E \cong \mathbb{P}^1$ ,  $E^2 = -1$  on  $X$  とある。 また、

$$\tilde{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-E), \quad \pi_* (\mathcal{O}_X(-nE)) = \tilde{\mathcal{F}}^n \text{ とある。 従って、}$$

$$R_S(\mathcal{F}) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{F}^{(i)} u^i \cong \bigoplus_{i, j \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(-iE)(j)) u^i.$$

と  $\mathbb{Z}^2$ -graded ring の構造をとる。 更に、 $X$  上の divisor  $A$

を、 $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)) = \mathcal{O}_X(nA)$  とするようにならると ( $\mathcal{O}_X(nA)$

は  $X$  の 3 つの特異点 (=  $\mathbb{P}$  の 3 つの特異点) で free となる

ので、invertible となる。  $\mathcal{O}_X((m+n)A) = (\mathcal{O}_X(mA) \cdot \mathcal{O}_X(nA))^{**}$

$\mathcal{O}_X(nA)$  が invertible  $\Leftrightarrow abc | n$ ). この  $A$  を使おうと

$$R = R_S(\mathcal{F}) = \bigoplus_{i, j \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(-iE + jA)) \cdot u^i T^j$$

( $u, T$  は不定元) と書ける。 (なお、

$$R' := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}, j \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(-iE + jA)) \cdot u^i T^j = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}^{(i)} u^i$$

は "extended Rees 環" とある。 なお、 $A' := \pi_*(A) \in \text{Div}(\mathbb{P})$ ,

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(nA')$  とおくと、

$S = R(\mathbb{P}, A') = \bigoplus_{j \geq 0} H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(jA'))$ .  $T^2$  上から  
 normal graded ring の一般論より, ([11], 参照),  
 $\mathcal{C}(\mathbb{P}) = \mathbb{Z} \cdot A' \cong \mathbb{Z}$ .

$S$  は Gorenstein ring,  $\text{cl}(S) = -a-b-c$  であるから,

$$\omega_{\mathbb{P}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-(a+b+c)A') = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-(a+b+c)),$$

(但し,  $\text{Div}(Y)$ ,  $\mathcal{C}(Y)$  はそれぞれ, normal algebraic  
 variety  $Y$  の divisor group, divisor class group.  $\omega_Y$  は  
 $Y$  の dualizing sheaf を表わす.  $\omega_Y = \mathcal{O}_Y(K_Y)$ ,  $K_Y$  は  $Y$  の  
 canonical divisor.)  $\pi$  は smooth point  $z$  の blowing-up であり,

$$\omega_X \cong \pi^*(\omega_{\mathbb{P}})(E) = \mathcal{O}_X(-(a+b+c)A+E), \quad K_X = -(a+b+c)A+E.$$

また,  $\mathcal{C}(\mathbb{P}) = \mathbb{Z} \cdot A$  であり,

$$\mathcal{C}(X) = \mathbb{Z} \cdot A \oplus \mathbb{Z} \cdot E \cong \mathbb{Z}^2 \quad \text{である.}$$

## § 2. $X = X(a, b, c)$ 上の Intersection Theory と "Extremal ray".

$X = X(a, b, c)$  は, 位数がそれぞれ  $a, b, c$  の "cyclic  
 quotient singularity" の  $\pi$  を通して normal variety であるから,  
 $\pi^*z$  の divisor は  $\mathbb{Q}$ -Cartier ( $\forall D \in \text{Div}(X)$ ,  $abcD$  は  
 Cartier divisor) であるから, intersection pairing

$$\mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \rightarrow \frac{1}{abc} \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

が定義される。以下に於て必要となる性質をまとめると、

(2.1) ①  $C$  が curve,  $D \in \text{Div}(X)$ ,  $nD$  が Cartier divisor  
のとき,  $C \cdot D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \deg(\mathcal{O}_X(nD)|_C)$ . 更に  $D \geq 0$  なら,

$C$  と  $D$  が共通成分をもたないとき,

$$C \cdot D = \frac{1}{n} [\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{nD} \text{ の極値}] \geq 0.$$

②  $A^2 = A'^2$  (in  $\mathbb{R}$ )  $= \frac{1}{abc}$ ,  $E^2 = -1$ ,  $A \cdot E = 0$

[一般に,  $R = R(X, D)$ : normal graded ring,  $(\exists N > 0, ND$ : ample Cartier divisor),  $\dim X = d$  のとき,  $P(R, t)$   
 $= \sum_{n \geq 0} \dim R_n \cdot t^n$  を  $R$  の Poincaré series とすると,

$$D^d = \lim_{t \rightarrow 1} (1-t)^{d+1} P(R, t)$$

が成立する, ([10] 参照).  $S = R(\mathbb{P}, A') = k[x, y, z]$ ,

$$P(S, t) = \frac{1}{(1-t^a)(1-t^b)(1-t^c)} \quad \text{より, } A'^2 = \frac{1}{abc} \text{ を得る.}$$

$A'$  は  $\mathbb{P}(a, b, c)$  を通らない "座標軸" で表されるから,  
 $A^2 = A'^2$ ,  $A \cdot E = 0$  ] .

この「幾何的考察」に於て, 最も重要となるのは,

"effective cone" と思われる,

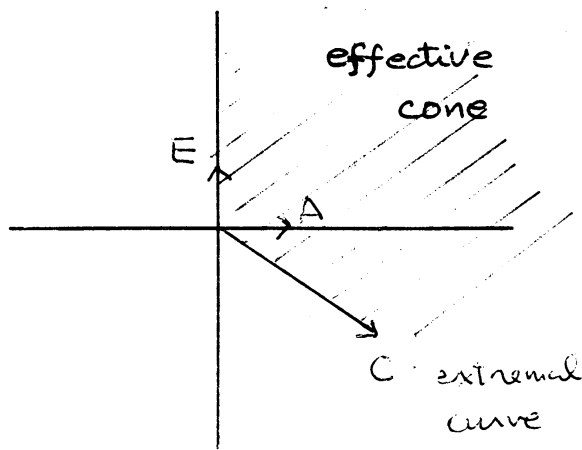
$$\sum n_i C_i \in \text{Div}(X) \quad (C_i: \text{ired. curve}) \text{ に対し,}$$

$\sum n_i C_i \geq 0$  ( $\Leftrightarrow \forall n_i \geq 0$ ) なるものを effective divisor と  
言うので,

$$\mathcal{Q}(X) = \mathbb{Z} \cdot E \oplus \mathbb{Z} \cdot A \quad \text{は effective divisors を含む}$$

class の生成する cone  $C \subset \mathcal{C}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$  を考えよ。  
 任意の ined. curve  $C \subset X$  に対し,  $C \cdot A \geq 0$  かつ  $C \cdot A = 0 \iff C = E$  であるから,  $E$  がこの cone の一つの境界上にありあつたはあきらむべきであるが, 問題は, 他の境界である。

irreducible curve  $C$  が他の境界上にありあるとき,  $C$  を "extremal curve" 更に,  $(-K_X) \cdot C > 0$  であるとき, 半直線  $\mathbb{R}_+ \cdot [C]$  を "extremal ray" と呼ぶ。(下図)



但し, "extremal curve"  $C$  の存在するかどうかはわからない。  
 「ある半直線にいくらでも近いものが存在するが、その半直線上にのりものはない」という可能性も、現在は排除できない。

但し, 次の事は云ふ。

(2.2) (1)  $C \subset X$  が ined. curve,  $C \neq E, C^2 < 0$   
 $\implies C$  は extremal curve.

( $\because$ )  $C'$  が  $C$  より「左に」ありあると,  $C' \sim -\alpha E + \beta C$  ( $\alpha, \beta > 0$ ) ( $\sim$  は linear equivalence を表す). すると,  $C \cdot C' = -\alpha \cdot C \cdot E + \beta \cdot C^2 < 0$  となり矛盾.

(2) 逆に,  $C$  が extremal curve なら  $C^2 \leq 0$  である。

( $\because$ )  $C^2 > 0$  とすると, 中井 criterion により,  $C$  は

ample  $\tau$ ,  $\exists N > 0$ ,  $H^0(X, \mathcal{O}_X(nC - E)) \neq 0$  となり,  $C$  は  
 "左に" effective divisor が存在する.

さて, symbolic power と effective divisor はどう関係  
 するのだろうか?

$f \in [g^{(n)}]_n$  (下の  $n$  は degree を表す.) は  $\bar{C} = V_+(f) \subset \mathbb{P}^2$   
 を定める.  $f \notin g^{(n+1)}$  とすると,  $\pi^*(\bar{C}) = C + rE$  となり,  $\bar{C} \sim nA'$   
 より,  $C \sim nA - rE$  となり,  $nA - rE$  の class が effective member  
 である.  $H^0(X, \mathcal{O}_X(nA - rE)) \cong [g^{(n)}]_n$  であるから,  
 $[g^{(n)}]_n \neq 0 \Rightarrow nA - rE$  が effective cone に属する.

(2.3)

例 1.  $g = g(11, 25, 21) \ni C = Y^3 - X^3 Z^2 \in H^0(X, \mathcal{O}_X(75A - E))$ .  
 $C \subset X$  は  $V_+(C) \subset \mathbb{P}^2$  の proper transform とすると,  $C \sim 75A - E$   
 となり,  $C^2 = \frac{75^2}{11 \cdot 25 \cdot 21} - 1 = -\frac{2}{77} < 0$ . 中には  $C$  は  
 extremal curve である. この例では,

$-K_X = (11 + 25 + 21)A - E = 57A - E$  であり,  $-K_X$  は  
 $C$  より "左に" あり,  $[-K_X] \cdot C < 0$  である.

例 2.  $g = g(7, 9, 10)$  を考える.

(i)  $cl(K) \neq 2$  のとき,  $\exists c_4 = Z^{10} + \dots \in [g^{(4)}]_{100}$ ,  
 $C$  は 22 次であり,  $C \subset X$ ,  $C \sim 100A - 4E$  を定めるが, このとき,  
 $C^2 = \frac{100^2}{7 \cdot 9 \cdot 10} - 4^2 = -\frac{8}{63} < 0$  であり,  $C$  は extremal curve.  
 (ii)  $cl(K) = 2$  のとき,  $\exists e = X^{10} + \dots \in [g^{(3)}]_{70}$ , あり,

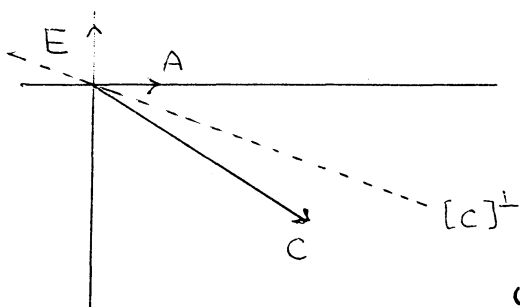


$\exists C \subset X, C \sim 70A - 3E$ .  $E \cdot 3 < C^2 < 0$  である。

$ch(k) = 2$  と  $\neq 2$  については extremal curve の子半直線の結果、  
 である。この事実は、 $R_S(p)$  の  $ch(k) \neq 2$  で Cohen-Macaulay,  
 $ch(k) = 2$  で not Cohen-Macaulay, という事と、どういう関係  
 をもつたのだろうか? ([4] 参照)

(2.4)

Remark. (1)  $C \subset X$  ined. curve,  $C^2 < 0$ ,  $[C]^\perp$   
 を  $C \cdot D = 0$  とする  $D$  の子半直線とする。このとき、 $[C]^\perp$



と  $R_+[C]$  の間には irreducible  
 curve は存在しない。特に

- (i)  $\forall C' \neq C, E$  ined. curve,  $C'^2 > 0$ .
- (ii)  $D \geq 0, D \in \text{Div}(X), C \cdot D < 0$  のとき,  
 $D$  は必ず  $C$  を成分に含む。

環論的な formulation では、 $f \in [P^{(r)} \setminus P^{(r+1)}] \cap S_m$  の既約,  
 $(\frac{n}{r})^2 < abc, g \in [P^{(s)}]_m, \frac{mn}{abc} - rs < 0 \Rightarrow f | g$ .

(2)  $\exists D \in \text{Div}(X), D^2 = 0 \Rightarrow a, b, c$  はすべて平方数。  
 ( $C$  が ined. curve,  $C^2 = 0$  なら  $C$  は extremal curve だが、  
 のような事は特殊な場合にしか起らない。)

実際、 $C \sim \alpha A - \beta E$  とすると、 $0 = C^2 = \frac{\alpha^2}{abc} - \beta^2$  で、  
 $a, b, c$  は二つずつ互いに素だから、 $a, b, c$  はすべて平方になる。

### § 3. $\mathcal{R}_S(\mathcal{P})$ の Noether 性の numerical criteria.

Cutkosky の与えた有限性の判定法をまとめると,

定理 (3.1). 次の3つの条件のいずれかがみたされるとき,  $R = \mathcal{R}_S(\mathcal{P})$  は Noether 環である.

$$(I) \quad K_X^2 = \frac{(a+b+c)^2}{abc} - 1 > 0$$

$$(II) \quad \exists f \neq 0 \in [\mathcal{P}^{(r)}]_n, \quad \frac{n}{r} \leq a+b+c$$

$$(III) \quad \text{char}(k) = p > 0, \quad \exists f \neq 0 \in [\mathcal{P}^{(r)}]_n, \quad \frac{n}{r} < \sqrt{abc}$$

証明に入り前にいくつかの応用を見てみよう.

例 1.  $a \leq 4$  とするとき,  $\frac{(a+b+c)^2}{abc} > 1$  が示され,  $R$  は Noether 環. しかし,  $a, b, c$  がともに十分大きくなると, 当然 (I) はみたされなく存子.

例 2.  $a=6 < b < c$ ,  $(6, b) = 1 = (6, c)$ ,  $c \notin 6\mathbb{N} + b\mathbb{N}$   
 $\Rightarrow$  とらると  $\equiv 1 \pmod{6}$ ,  $bc \equiv -1 \pmod{6}$  より,  $YZ - X^{\frac{b+c}{6}} \in \mathcal{P}_{b+c}$ .

(II) がみたされる. 従って,

$a=6$  のとき,  $\mathcal{R}_S(\mathcal{P})$  は Noetherian.

例 3.  $a=7m-3$ ,  $b=5mn-m-n$ ,  $c=8n-3$  とするとき,  
 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(a, b, c) \Rightarrow Y^3 - X^n Z^m = f$ ,  $\text{degree } f = N = 3(5mn - m - n)$  である. このとき,  
 $abc - N^2 = (5mn - m - n)(6m(n-2) + 5n(m-3) + 9)$   
 $> 0$  if  $n \geq 2, m \geq 3$  or  $m=2, n \geq 3$ . このとき (III) によ

1)  $\text{char}(k) = p > 0$  なら  $R_S(p)$  は Noetherian である。しかし、 $\text{char}(k) = 0$  のとき、 $n \geq 4$ ,  $2m > n+1$  なら、 $R_S(p)$  は Noether 環 でない 事が示されている。[この例は、後藤-西田による。[5], [6] 参照]。

さて、定理 (3.1) の証明に入りわけたが、当然のことの代数幾何の予備知識が必要になる。

### (3.2). Base point free divisors.

Noether 性の最初の基礎になるのは次の Zariski の定理である。

定理 (Zariski [12])  $X$  が体  $k$  上の normal projective variety,  $D_1, \dots, D_n \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ,  $\exists N > 0$ ,  $ND_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) は base pt. free Cartier divisor とすると,

$R := R(X; D_1, \dots, D_n) := \bigoplus_{k_1, \dots, k_n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(k_1 D_1 + \dots + k_n D_n)) \cdot T_1^{k_1} \dots T_n^{k_n}$  は  $k$  上有限生成。

但し、Cartier divisor  $D$  が base point free  $\Leftrightarrow \forall x \in X$ , closed pt.,  $\exists f \in k(X)$ ,  $D + \text{div}_x(f) \geq 0$ ,  $\Leftrightarrow D + \text{div}_x(f) \not\geq x$ .

(この定理の証明は、 $X$  が normal projective かつ, valuatative criterion により、 $R$  が  $k[H^0(X, \mathcal{O}_X(ND_1))T_1^N, \dots, H^0(X, \mathcal{O}_X(ND_n))T_n^N]$  上 integral である事が示せる。)

(3.3)  $X$  上の curve の contraction — rational singularity.  
 および positive characteristic.

$C$  が  $X$  上の irreducible curve で,  $C^2 < 0$  のとき,  $C$  はある "normal surface"  $Y$  の一葉  $q$  に contract できる。但し, このとき  $Y$  は  $k = \mathbb{C}$  のとき normal complex analytic space 又は, scheme の概念を拡張して作られた, normal algebraic space である。又  $P^5$ ,  $\exists \varphi: X \rightarrow Y$ ,  $\varphi(C) = q$ ,  $\varphi: X - C \cong Y - q$ . (Grauert [6a], F. Sakai [9]).

このとき,  $Y$  も  $k$  上 projective であるかどうかの問題になるが, これに関して, 次の結果がある。(本質的には  $X$  が smooth のとき, M. Artin<sup>[1]</sup> に  $\varphi$ ,  $\tau$  示されてゐるが,  $X$  が normal のときには, L. Brenton [2], Cutkosky [3] に  $\varphi$ ,  $\tau$  一般化されてゐる。)

定理 我々の  $X = X(a, b, c)$  上の irreducible curve  $C$ ,  $C^2 < 0$  が  $q \in Y$  に contract されるとき,

$$(1) (Y, q) \text{ が rational singularity } (\Leftrightarrow (R^1 \varphi_* \mathcal{O}_X)_q = 0)$$

又は (2)  $\text{char } k = p > 0$ ,  $k \subset \bar{k}$  (有限体の alg. closure) のとき,  $Y$  も  $k$  上 projective である。

Noether 性を示すために, 次の定理を用意してある。

定理 (3.4)  $C$  を ined. curve  $C \subset X$ ,  $C^2 < 0$  で,

$\varphi: X \rightarrow Y$  が  $C$  の contraction であり, このとき,  $Y$  が  $k$  上 projective なら,  $R = R_S(\varphi)$  は Noetherian.

(証明) 1. まず,  $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  の中で,  $R_+[A]$  と  $C^\perp$  (の非4次元の部分) で囲まれた範囲を  $\mathcal{D}$  とおく:

( $\mathcal{D}$  は  $[C]^\perp$  (の部分) を含む.)

$$R' := \bigoplus_{[iA-jE] \in \mathcal{D}} H^0(X, \mathcal{O}_X(iA-jE)) T^i u^j$$

とおくと, (2.4) (1) により,  $R = R'[f u^*]$  ( $f \in \mathfrak{g}^{[X]}$  は (2.4) の記号) と書けるから,  $R'$  が Noetherian なら十分.

(逆に,  $R'$  は  $R$  上の多項式環の pure subring なのて,  $R$  が Noetherian  $\Rightarrow R'$  が Noetherian.)

$$2^\circ. \text{ 次に, } R'^{(N)} := \bigoplus_{\substack{[iA-jE] \in \mathcal{D} \\ i, j \in \mathbb{N}^+}} H^0(X, \mathcal{O}_X(iA-jE)) T^i u^j$$

とおくと,  $R'$  が Noetherian  $\Leftrightarrow R'^{(N)}$  が Noetherian は容易にわかる.

3°.  $Y$  が projective のとき,  $Y$  上の ample divisor  $G'$  を  $G' \notin \mathfrak{g} = \varphi(C)$  にとり,  $G = \varphi^*(G')$  とおくと,  $G \cap C = \emptyset$  であるから  $[G] \in [C]^\perp$ ,  $G$  は base point free で,  $N$  を適当に選べ

$$\text{と } R'^{(N)} = \bigoplus_{i, j \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(iNA + jG)) \cdot T^{iN} u^{jN} \text{ とおけるの}$$

で, 定理 (3.2) より,  $R$  は Noetherian である.

#### §4. Noether 性の証明

定理 (3.1) の証明に移そう。

(4.1) (3.1) (I)  $K_X^2 > 0$  を仮定する。

このとき,  $(-K_X) \cdot A = a + b + c > 0$  だから,  $\mathcal{O}(X) \cong \mathbb{Z}^2$  より, 任意の curve  $C$  に対し,  $(-K_X) \cdot C > 0$  である事は容易にわかる。ゆえに,  $-K_X$  は ample であり,  $\underbrace{\text{char}(k)=0 \text{ のとき}}_{\text{Cone Theorem}}$  (森脇 [8], (3.1)) により,  $X$  上に extremal ray  $R$  及びその contraction  $f_R: X \rightarrow Y$  が存在し,  $Y$  は projective である。このとき  $R = R_S(p)$  は (3.4) により Noetherian. ((3.4) ではない  $C^2 < 0$  とした方が,  $[C] \in R$  が  $C^2 = 0$  のとき,  $[C]^2 = \mathbb{R} \cdot [C]$  であり,  $\exists N > 0, NC$  が base-pt free となる。)

$\text{char}(k) = p > 0$  のとき,  $\text{char} = 0$  であり,  $C \neq E$ , imed. curve であり,  $C^2 \leq 0$  が存在するから, この条件を「 $\exists f \in [p^{(r)}]_n, \frac{n}{r} \leq \sqrt{abc}$ 」と置くか之と,  $\text{char. } p > 0$  であり「 $\exists f \in [p^{(r)}]_n, \frac{n}{r} \leq \sqrt{abc}$ 」は示せよ。ゆえに Noether 性の証明は (4.3) 又は Huneke の判定法の homog. version (5.2) に帰着する。

(4.2). (3.1) の (II) を仮定すると,  $\mathbb{R}_+[-K_X]$  は 2 つの半直線  $\mathbb{R}_+[C]$  と  $\mathbb{R}_+[A]$  の間にはさまれる。(  $C$  は  $V_+(f) \subset \mathbb{P}^n$  の proper transform). このとき,  $C^2 \geq 0$  とすると,  $-K_X \cdot C > 0$

また  $(-K_X)^2 > 0$  とする。 (4.1) に帰着する。 ( $K_X^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow (a+b+c)^2 = abc$  が起り得ない事は,  $a=a^2, b=b^2, c=c^2$   
 とおいて  $\pmod{3}$  で考えればわかる。 筆者は森本貴志氏  
 に教えた事も, た。 [3] の  $\Sigma$  の証明は誤りである。)

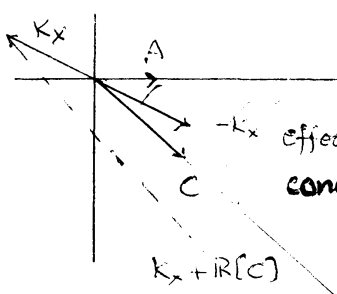
$C \in \text{extremal curve}$  とし,  $C^2 < 0$  なら,  $C$  の contraction  
 $\varphi: X \rightarrow Y$  によつて,  $q = \varphi(C)$  は rational singularity であ  
 る事を示そう。 ( $\Rightarrow$  (3.3), (3.4) より,  $R_S(q)$  は Noetherian.)

さて,  $(R^1\varphi_* \mathcal{O}_X)_q = \varprojlim H^1(\mathcal{O}_{nC})$  ( $\mathcal{O}_{nC} = \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-nC)$ )  
 より,  $\forall n > 0, H^1(\mathcal{O}_{nC}) = 0$  を示せば良い。

$H^1(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)) = 0$  ( $\forall n \in \mathbb{Z}$ ),  $H^2(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0$  より,  $H^1(X, \mathcal{O}_X)$   
 $= H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$  である。 さて, exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-nC) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{nC} \rightarrow 0$$

と上記の事実より,  $H^1(\mathcal{O}_{nC}) \cong H^2(\mathcal{O}_X(-nC)) \overset{\text{dual}}{\longleftrightarrow} H^0(K_X + nC)$



と示す。  $-K_X$  は effective cone の 1A 点

effective cone であるから, 左図よりわかるように,

$[K_X + nC]$  は effective member であるから,

従つて,  $H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + nC)) = 0$ .

(4.3) 例.  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(11, 25, 21) \ni Y^3 - X^3 Z^2$  より,

$\exists C \subset X(11, 25, 21), C \sim 75A - E$ . このとき,  $-K_X$

$\sim 57A - E, C^2 = -\frac{2}{77}$  である。 (139 (2.3) 1391).

$H^1(\mathcal{O}_{nC})$  は  $H^0(\mathcal{O}_X(K_X + nC))$  と dual である。

$$H^0(\mathcal{O}_X(K_X + C)) \cong H^0(\mathcal{O}_X(18A)) = S_{18} = 0.$$

$$H^0(\mathcal{O}_X(K_X + 2C)) \cong H^0(\mathcal{O}_X(43A - E)) = [\mathfrak{g}]_{93} = 0 \quad \Gamma \sim \mathfrak{b}^2,$$

$$H^0(\mathcal{O}_X(K_X + 3C)) \cong H^0(\mathcal{O}_X(168A - 2E)) = [\mathfrak{g}^{(2)}]_{168} \ni d_2 = Y^2 + \dots \quad \Gamma$$

この  $C$  の contraction は rational singularity であることがわかる。  
 $H^1(\mathcal{O}_C) = 0$  以上で示したから,  $C \cong \mathbb{P}^1$  である。

$R_S(\mathfrak{g})$  は  $\text{char}(k) = 0$  のとき Noetherian である と予想して  
 いるのだが、もしこれが正しければ、(3.4) より、この  $C$  の  
 contraction は non-projective であることに注意<sup>(\*)</sup>。

$K_X + nC$  は、この節の場合だと、 $K_X + 9C \in [C]^\perp$  とな  
 るので、 $\dim R^1 \mathfrak{g}_*(\mathcal{O}_X)_\mathfrak{g}$  を計算する際には、(2.4) より  
 $H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + 9C))$  を計算すれば十分である。

(4.4). (3.1) (III) の条件は、 $\exists C: \text{curve on } X, C \sim$   
 $nA - 2E, C^2 < 0$  と同値である。我々の場合、 $k$  は素体  
 にとれるから、(3.3) (2) と (3.4) により、 $R_S(\mathfrak{g})$  は  
 Noetherian である。

Remark. irreducible curve  $C \subset X, C \neq E, C^2 < 0$  に対し、  
 $H \in \text{Div}(X), [H] \in [C]^\perp$  なる Cartier divisor とする。理論  
 的には、 $H^1(\mathcal{O}_{nC}^*)$  での  $H$  の像を計算する事により、 $[C]^\perp$  の  
 effective member をとることができる ( $\exists N > 0, NH$  は base pt.  
 free である) ことがわかる。...

<sup>(\*)</sup>  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(18, 53, 29)$  で同様な計算をすると、 $C \cong \mathbb{P}^1$  の contraction  
 は non-projective である。



§ 5. Huneke の判定法に関する Remark.

今迄の  $R_S(\mathfrak{p})$  の研究に於て, 次の Huneke の判定法が基本的役割を果たして来たが, この判定法も当然幾何的に見ることが可能で, またそれによつて, 我々の議論を "homogeneous" な範囲ですることが可能になる. (一般に, graded ring の homog. ideal の minimal reduction は homog. element  $z$  によつて成るもので, 以下の元  $f, g$  を homog. element  $z$  によつて成るかどうかは自明ではない.)

定理 (5.1) (Huneke の判定法; [7])  $B = k[x, y, z]_{(x, y, z)}$  ならば,  $k[[x, y, z]]$  とする ( $B \supset S$ ).  $\&L \exists [f \in \mathfrak{p}^{(u)} B, g \in \mathfrak{p}^{(v)} B, x \in \mathfrak{p} B, x \in \mathfrak{m}_B, \ell_B(B/(f, g, x)) = k \cdot \ell \cdot \ell_B(B/(\mathfrak{p} B, x))]$   
 $\Rightarrow R_B(\mathfrak{p} B)$  は Noetherian.  $k$  が無限体のとき逆も成立する.  
 この命題は "homogeneous version" が成立する.

定理 (5.2) (Homogeneous Huneke's criterion)

$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(a, b, c) \subset S$  に対して, 次の同値.

(1)  $R_S(\mathfrak{p})$  は Noetherian.

(2)  $\exists [f \in \mathfrak{p}^{(x)}, g \in \mathfrak{p}^{(y)}, x \in (x, y, z) - \mathfrak{p}, \text{homogeneous elements of } S, \text{ s.t. } \ell_S(S/(f, g, x)) = x \cdot s \cdot \ell_S(S/(\mathfrak{p}, x))]$

(3)  $X \neq \emptyset$ , 異なる irreducible curves  $C, D$  ( $C \cap D \neq \emptyset$ ) で,  $C \cdot D = 0$  とするものが存在する.

また、この同値条件が成立するとき、(3)に於て、

$$(i) \quad C^2 < 0, \quad D^2 > 0 \quad \text{または}$$

(ii)  $C^2 = 0 = D^2$  (但し、a, b, c がすべて平方数  
のときに限り)

が成立し、(i) の curve  $C$  は unique である。

(証明) (2) の  $f, g, x$  に対し  $k$  上  $d_1, d_2, e$  とすると、  
 $l_S(S/(f, g, x)) < \infty$  ならば、 $(f, g, x)$  は regular sequence とな  
るから、Artin 環  $S/(f, g, x)$  の Poincaré series を計算する  
と、

$$P(S/(f, g, x), t) = \frac{(1-t^{d_1})(1-t^{d_2})(1-t^e)}{(1-t^a)(1-t^b)(1-t^c)} \quad t \text{ かつ},$$

$$l_S(S/(f, g, x)) = \lim_{t \rightarrow 1} P(S/(f, g, x), t) = \frac{d_1 d_2 e}{abc} \quad - \text{b},$$

$$l(S/g+(x)) = e \quad t \text{ かつ } (x \rightarrow t^e \in k[t]),$$

$$l_S(S/(f, g, x)) = r \cdot s \cdot l_S(S/g+(x)) \Leftrightarrow \frac{d_1 d_2}{abc} = rs. \quad - (*)$$

さて、 $V_+(f), V_+(g) \subset \mathbb{P}^2$  の proper transform を  $C, D$   
とすると、 $C \sim d_1 A - xE, D \sim d_2 A - sE$  より、

$$C \cdot D = \frac{d_1 d_2}{abc} - rs. \quad \text{従って、} (*) \Leftrightarrow CD = 0 \text{ となる。}$$

また、 $Cl(X)$  の交点理論から、(i), (ii) が成立する事も直  
いだろう。ゆえに、(5.1) を考えれば、(2)  $\Leftrightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (1) が成  
立する。残りは (1)  $\Rightarrow$  (3) を示すのみである。

(3) が成立しないときは、次のいづれかが成立する。

$$(a) \quad \forall C \subset X, \text{ ined. curve, } C^2 > 0.$$

(b)  $\exists C \subset X$ , ined. curve,  $C^2 \leq 0$   $r_2 = b^2$ ,  $\forall D \neq C$ ,  
ined. curve,  $C \cdot D > 0$ .

(a) が成立するとき,  $R_S(\mathcal{F})$  は Noetherian,  $R_S(\mathcal{F}) =$   
 $S[f_1 u^{r_1}, \dots, f_n u^{r_n}]$ ,  $\sqrt{abc} < \frac{d_1}{r_1} \leq \frac{d_2}{r_2} \leq \dots \leq \frac{d_n}{r_n}$  とするとき ( $f_i \in S_{d_i}$ ).  
 $C \in V_+(f_1)$  の proper transform,  $C \sim d_1 A - r_1 E$  とするとき, 中井  
判定法より,  $C$  は ample.  $\therefore \exists N > 0$ ,  $H^0(X, \mathcal{O}_X(NC - E)) \neq 0$ .  
 $g \neq 0 \in H^0(X, \mathcal{O}_X(NC - E))$ ,  $g \in [g^{(s)}]_m$  とするとき,  $\frac{m}{s} < \frac{d_1}{r_1}$   $r_2 = b^2$ ,  
 $g \cdot u^s \notin S[f_1 u^{r_1}, \dots, f_n u^{r_n}]$  とする  $f_1 u^{r_1}, \dots, f_n u^{r_n}$  の  $\sum$  による  
補う.

(b) が成立するとき,  $C \in V_+(f)$  の proper transform,  
 $R_S(\mathcal{F}) = S[f u^r, g_1 u^{s_1}, \dots, g_n u^{s_n}]$  とおく.  $f \in S_d, g_i \in S_{e_i}$ .  
 $\frac{d}{r} < \frac{e_1}{s_1} \leq \dots \leq \frac{e_n}{s_n}$  とする.  $V_+(g_1)$  の proper transform  $\in$   
 $D$  とするとき, 中井判定法より,  $D$  は ample.  $H^1(X, \mathcal{O}_X(ND)) = 0$   
とすると  $N > 0$  とすると,  $0 \rightarrow \mathcal{O}_X(ND) \rightarrow \mathcal{O}_X(ND + C) \rightarrow \mathcal{O}_C(ND + C) \rightarrow 0$   
より,  $0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(ND)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(ND + C)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C(ND + C)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(ND))$   
より,  $\exists H \sim ND + C$ ,  $H > 0$ ,  $H$  は  $C$  を成分に含みうる.

$H \hookrightarrow [g^{(t)}]_l$  とするとき,  $\frac{l}{t} < \frac{e_1}{s_1}$ ,  $f \notin H$  より,

$h \notin S[f u^r, g_1 u^{s_1}, \dots, g_n u^{s_n}]$  とする  $f, g_i$  による補う.

(1)  $\Rightarrow$  (3) が証明された.

## REFERENCES

- [1] M. Artin, Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces, *Amer. J. Math.* 84 (1962), 485-496.
- [2] L. Brenton, Some Algebraicity Criteria for Singular Surfaces, *Invent. Math.* 41 (1977), 129-147.
- [3] S. D. Cutkosky, Symbolic algebras of monomial primes, *J. reine angew. Math.* 416 (1991), 71-89.
- [4] S. Goto, K. Nishida and Y. Shimoda, The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves, *J. Math. Soc. Japan*, 43 (1991), 465-481.
- [5] S. Goto, K. Nishida and K.-i. Watanabe, Non-Noetherian symbolic blow-ups for space monomial curves, preprint.
- [6] 後藤 四郎, Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counterexample to Cowsik's question, 本報告集
- [6a] H. Grauert, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, *Math. Ann.* 146 (1962), 331-368.
- [7] C. Huneke, Hilbert functions and symbolic powers, *Mich. Math. J.* 34, (1987), 293-318.
- [8] 森脇 淳, Extremal Ray と Canonical ring, 本報告集
- [9] F. Sakai, Weil divisors on normal surfaces, *Duke Math. J.* 51 (1984), 877-887.
- [10] 泊 昌孝, Multiplicity of filtered rings II, 第 11 回可換環論シンポジウム報告集 (1990), 59-70.
- [11] K.-i. Watanabe, Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings, *Nagoya Math. J.* 83 (1981), 203-211.
- [12] O. Zariski, The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface, *Ann. of Math.* 76 (1962), 560-615.