

二次元イジング模型の厳密解

東北大 工 守田 徹
(T. Morita)

イジング模型は磁性体の最も簡単な模型である。この模型では、ある格子の格子点にスピンがあり、スピンは +1, -1 という値を取る。スピンの数が N 個ある体系の状態は、 N 個の +1, -1 を取るスピン変数 s_1, s_2, \dots, s_N の組で決まり、状態は 2^N 個ある。温度 T の体系の分配関数 Z は

$$Z = \sum_{s_1=\pm 1} \dots \sum_{s_N=\pm 1} \exp\left\{-\sum_{(i,j)} J_{ij} s_i s_j / k_B T\right\} \quad (1)$$

と表される。 i, j は格子点の番号 1 から N までの値を取り、 (i, j) は隣り合う格子点についての和である。 J_{ij} は交換積分と呼ばれる定数で、 k_B は Boltzmann 定数である。温度 T の

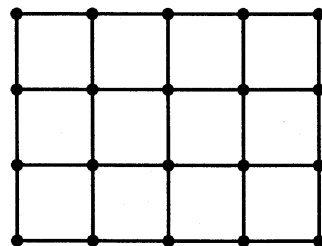


図 1 正方格子

関数としての体系の性質は、 $F = -k_B T \ln Z$ で決まる自由エネルギー $-F$ から計算できる。この体系の熱力学的性質は、 F/N の $N \rightarrow \infty$ の極限值 f から計算される。Onsager は 1944 年に正方形格子上のイジング模型について、 J_{ij} が i と j が x 方向の隣りのときに J_x 、 y 方向の隣りのときに J_y であるとして、極限值 f を厳密に求めた。

Kac and Ward は 1952 年に "A Combinatorial Solution of the Two-Dimensional Ising Model" という論文を書いた。これは有限系について

$$Z = 2^N \prod_{(i,j)} \cosh(J_{ij}/k_B T) Z_1 \quad (2)$$

$$Z_1^2 = \det\{I - \Lambda\} \quad (3)$$

を導くものである。ここで I と Λ は $4N$ 行 $4N$ 列の行列である。 I は単位行列である。 Λ を表すには、格子上で格子点から隣合う格子点へと歩く random walk のステップを考えるのが都合がよい。格子点 j からの μ 方向のステップを $j\mu$ で表す。行列 Λ の要素は、ステップ $j\mu$ と $j'\mu'$ の対間で、もし $j\mu$ が $j'\mu'$ の次のステップとして可能ならば

$$(\Lambda)_{j\mu, j'\mu'} = \tanh(J_{jj'}/k_B T) e^{i\theta_{\mu\mu'}/2} \quad (4)$$

であり、そうでなければ0である。
 $\theta_{\mu\mu'}$ はステップ $j\mu$ の向きをステップ $j'\mu'$ の向きから測った角度である。ここで、あるステップの後にすぐ逆戻りするステップは許されない。

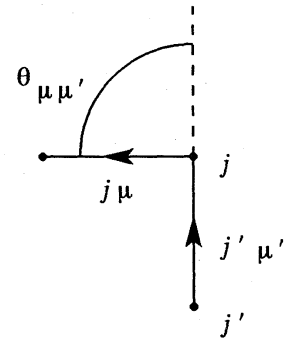


図 2

Vdovichenko は 1965 年に図形を数えることにより上の結果を導く方法を開発した。Morita は 1986 年にそれを正当化する論文を書いた。これを紹介する。

(1) で加えられる量を

$$\prod_{(i,j)} \cosh(J_{ij}/k_B T) \prod_{(i,j)} \{1 + s_i s_j \tanh(J_{ij}/k_B T)\} \quad (5)$$

と書き、第 2 の積を展開し、 s_1, s_2, \dots, s_N について和を取る。結果の Z は (2) と書かれ、 Z_1 は

$$Z_1 = 1 + \{ \text{最近接格子点間を結ぶボンドから}$$

なる図形の和。ただし、各格子点共 0

$$\text{又は偶数本のボンドに結ばれている} \} \quad (6)$$

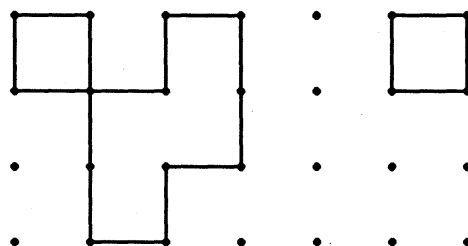


図 3

となる。ここで図形はボンドに対する因子の積を表す。格子点 i と j を結ぶボンドに対する因子は $\tanh(J_{ij}/k_B T)$ である。

これを格子点とボンドのループで表すと

$$Z_1 = 1 + \{ \text{ループの積の和。最近格子点間には 0 本又はには 0 本又は 1 本のボンドを許す。} \} \quad (7)$$

となる。(6) と (7) が等しいためには各格子点で

$$\text{---} \bullet \text{---} = \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \quad (8)$$

が成り立てばよい。これはクロス 1 個に因子 -1 をつけると成り立つ。

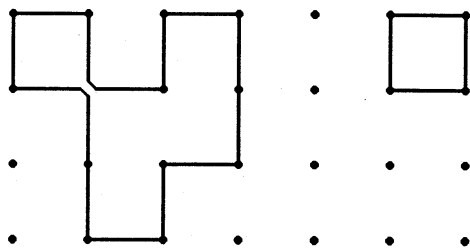


図 4

(6), (7) では最近接格子点間のボンド数は 0 又は 1 であったが、これを任意の非負整数にする。

$$Z_1 = 1 + \{ \text{ループの積の和} \}$$

ここでは、ループが同じ格子点を何度も通ることを許すものとする。これが(7)に等しいためには多重ボンドの対の寄与が0ならばよい。例えば

$$\begin{array}{c} | \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ | \end{array} + \begin{array}{c} | \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ | \end{array} = 0 \quad (9)$$

クロスに -1 の因子がついていると、これも成り立つ。この計算をするときに同じ格子点を結ぶ複数本のボンドには、 k 本ならば $1, 2, \dots, k$ と1方から他方に番号をつけ、格子点での結び方をすべて考える。そして図形の寄与は各ボンドについて $k!$ で割る。この結果、ボンドについた番号だけで異なる寄与が現われる。このため図形の寄与は

$\tanh(J_{ij}/k_B T)$, -1 と $1/(\text{対称性の数})$ の積となる。この結果

$$Z_1 = \exp\{\text{ループの和}\} \quad (10)$$

となる。

ここでループに向きをつける。2つの向きが可能であるから、

$$Z_1^2 = \exp\{\text{向きのついたループの和}\} \quad (11)$$

となる。ここから(3)に行くには、(7)から(10)を導いたと同じ議論で次の表式から上の(11)が導かれることを確か

めればよい。

$$Z_1^2 = 1 + \{ \text{向きのついたループの積の和。}$$

最近接格子点間には 1 方向のボンドは 0

又は 1 本に限る。 } \quad (12)

(3) の行列式を展開すると (12) になる。そのためには、クロス 1 個に -1 という因子が (4) の $\exp(i\theta_{\mu\mu'} / 2)$ の積から来ることを確かめればよい。

文献

L. Onsager, Phys. Rev. 65 (1944) 117.

M. Kac and J. C. Ward, Phys. Rev. 88 (1952) 1332.

N. V. Vdovichenko, Soviet Phys. -JETP 20 (1965) 477.

T. Morita, J. Phys. A 19 (1986) 1197.