

Selberg motif について

千葉大学(教養)寺松 友香

1. Selberg は 1944 年, 次の公式を示した。

$$\int_{[0,1]^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^{2z} \prod_{i=1}^n x_i^{x-1} \prod_{i=1}^n (1-x_i)^{y-1} dt$$

$$= n! \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(x+(j-1)z) \Gamma(y+(j-1)z) \Gamma(jz-1)}{\Gamma(x+y+(n+j-2)z) \Gamma(z+1)}$$

この公式に関して, 類似の式が Askey と Evans によつて, 2, 3, 4 の考察士された。Askey の予想は, いわゆる Selberg 積分の  $q$ -analog とも言えるもので, Evans の考察は, 有限体上の Character sum に関するものである。前者は Kadell と Habsieger により独立に, 後者は, G. Anderson により示された。Anderson は Evans 予想を解くために 2, 3 の多項式の Resultant を用いた。さらにその考え方は, curve の対称積を考へることにより幾何学的に解釈士れる。少し図式的に言うならば, Selberg integral に付随する motif は, Fermat hypersurface の motif で生成士れるということである。ゆえにこの証明法は, Period や Character sum に対する結果を統一的に扱う方法であるといえる。この報告ではこのことを示すとともに, 最後に,  $q$ -analog に関する Askey 予想士上の考察をもとに, Kadell や Habsieger とは別の証明法を与える。このため,  $q$ -hypergeometric function の determinant に関する結果が必要とす

、2 束子。

2. Motif の定義  $k$  及  $\mathbb{C}$  上の  $L$  を標数 0 の体とする。  $S \in k$  上 smooth variety とする。 次の data (M1) ~ (M5) を考える。

(M1) (M1.1) Variation of (pure) Hodge structure.

$\mathbb{C}$  を  $k$  の  $\mathbb{C}$  への埋め込み  $\sigma$  に対して、  $\sigma(S)(\mathbb{C})$  上の  $L$ -係数の local system を対して  $\mathbb{C}$  上の system  $\{H_{B,\sigma}\}$  が  $L$ -variation of pure Hodge structure であるとは、  $\mathbb{C}$  を  $k$  の  $\mathbb{C}$  への埋め込み  $\tau: L \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、  $H_{B,\sigma} \otimes_{L,\tau} \mathcal{O}_{\sigma(S)}$  が holomorphic Hodge filtration  $F_{\sigma,\tau}$  をもち、  $\mathbb{C}$  上の  $\sigma(S)(\mathbb{C})$  の点  $s$  に対して、 (weight  $\leq w$  とする)

$$\bigoplus_{p+q=w} [F_{\sigma,\tau}^p(H_{B,\sigma} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(s)) \cap (\text{id} \otimes \tau) F_{\sigma,\tau}^q(H_{B,\sigma} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(s))] \cong H_{B,\sigma} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(s)$$
 が成り立つことを示す。  $\tau = \bar{\sigma}$  である。  $\tau = \bar{\sigma}$  である  $\mathbb{C}$  を complex conjugate とする。

(M1.2) Variation of mixed L-Hodge structure

$k$  を  $\mathbb{C}$  を  $k$  の  $\mathbb{C}$  への埋め込み  $\sigma$  に対して、  $\sigma(S)(\mathbb{C})$  上の  $L$ -係数の local system  $H_{B,\sigma}$  と  $\mathbb{C}$  上の holomorphic filtration  $F_{\sigma,\tau}$  と、  $H_{B,\sigma}$  の local system  $\mathbb{C}$  上の filtration  $W_{k,\sigma}$  (weight filtration) を与えらる。  $\text{Gr}_k^W(H_{B,\sigma})$  と  $F_{\sigma,\tau}$  によって  $\mathbb{C}$  上の filtration が variation of pure Hodge structure と対して  $\mathbb{C}$  上の filtration (weight  $\leq w$ )  $H_{B,\sigma}$  は variation of mixed Hodge structure である。

(M2) Mixed étale sheaf  $H_{A^+}$  である。  $S$  上の locally free  $A^+ \otimes L$  étale sheaf  $\mathcal{F}$ 。 weight filtration  $W$  を  $\mathcal{F}$  上の

である。ここで、 $\mathcal{H}_{\mathcal{A}^1}$  は、 $S$  上の étale sheaf  $\mathcal{T}$  の  $\bar{\eta}$  を  $S$  の geometric point と見做す。  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}^1, \bar{\eta}}$  は  $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$  の作用を受け持つ。ここで、 $\mathcal{H}_{\mathcal{A}^1} = \text{Gr}_k^w(\mathcal{H}_{\mathcal{A}^1})$  は、weight  $w$  の (potentially pure)  $\mathcal{T}$  上の étale sheaf になることを仮定する。これは weight  $w$  の potentially pure  $\mathcal{T}$  sheaf である。  $S$  がある  $\mathbb{Z}$  上の finite  $\mathcal{T}$  regular scheme  $\mathcal{S}$  が存在して、 $\mathcal{H}_{\mathcal{A}^1}$  は  $\mathcal{S}$  上の étale sheaf を induce する。  $\mathcal{S}$  の closed geometric point  $\bar{\eta}$  の  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}^1}$  の geometric Frobenius の action の複素絶対値はその剰余体の order の  $\frac{w}{2}$  乗になる。ここで、 $\mathcal{H}_{\mathcal{A}^1} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}^1}$  である。

(M3) De Rham realization =  $S$  上の locally free sheaf  $\mathcal{V}$ , regular integrable connection  $\nabla$  を持つ。

$\mathcal{H}_{\text{DR}}$  は  $S \otimes L$  上の locally free  $\mathcal{O}_S \otimes L$  module の sheaf. ( $S$  上の locally free になるかどうかわからない。) 言い換えると、 $M$  を  $\mathbb{Z}$  と  $k \hookrightarrow M, L \hookrightarrow M$  を fix したとき、 $\mathcal{H}_{\text{DR}} \otimes_{\mathbb{Z}} M$  は、 $\mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{Z}} M$  locally free module になることを意味する。また、 $\mathcal{H}_{\text{DR}}$  は、integrable  $\mathcal{V}$  regular connection  $\nabla$  を持つ。ここで、 $\mathcal{H}_{\text{DR}}$  は weight filtration  $W$  があり、 $\nabla$  は  $\mathcal{V}$  stable である。また、 $\mathcal{H}_{\text{DR}}$  の regularity を議論するときは、 $S$  を compact 化  $\bar{S}$  を fix する。また、 $\mathcal{O}_S \otimes L$ -free  $\mathcal{V}$  filtration  $\mathcal{F}$  が存在して、Griffiths-transversality

$$\nabla_{\sigma, \tau} (\mathcal{F}_{\sigma, \tau}^i \otimes M) \subset \mathcal{F}_{\sigma, \tau}^{i-1} \otimes M \text{ を満たす。}$$

以上は、(M1)(M2)(M3) の [M5] は次の compatibility を課する。

(M4)  $\underline{\text{Comp}}_{A^f, B}$  任意の  $k$  の  $\mathbb{C}$  への埋め込み  $\sigma: k \hookrightarrow \mathbb{C}$  に対して, 自然に  $\text{Topology}$  の射  $S_{\mathbb{C}, \mathbb{C}} \xrightarrow{j} (S \otimes \mathbb{C})_{\text{ét}}$  による  $\mathcal{H}_{B, \sigma}$  の direct image  $j_* (\mathcal{H}_{B, \sigma} \otimes A^f)$  と  $\mathcal{H}_{A^f}|_{S \otimes \mathbb{C}}$  との間  $W$  を保つ同型:  $\text{Comp}_{A^f, B}(\sigma) \mathcal{H}_{A^f}|_{S \otimes \mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} * (\mathcal{H}_{B, \sigma} \otimes_{L, T} (L \otimes A^f))$  が与えられる。  $k = S$  の時は  $\sigma = \text{id}$  である。 任意の  $k$  の代数的閉包  $\bar{k}$  の  $\mathbb{C}$  への埋め込み  $\bar{\sigma}: k \hookrightarrow \mathbb{C}$  に対して  $\sigma$  と  $\bar{\sigma}$  との間  $W$  に対して

$\text{Comp}_{A^f, B}(\bar{\sigma}): \mathcal{H}_{A^f}(\bar{k}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{B, \bar{\sigma}} \otimes_{L} (L \otimes A^f)$  なる同型  $\bar{\sigma}$  があり,  $\mathcal{H}_{A^f}(\bar{k})$  への  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$  の action と compatible になる  $\bar{\sigma}$  と  $\sigma$  との間  $W$  に対して同値である。

(M5)  $\underline{\text{Comp}}_{B, \text{DR}}$  任意の  $k$  及び  $\mathbb{C}$  への埋め込み  $\sigma: k \hookrightarrow \mathbb{C}$  に対して  $\tau$  に対して  $\text{Comp}_{\text{DR}}: \mathcal{H}_B \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{(S \otimes \mathbb{C})_{\text{an}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\text{DR}} \otimes_{(\mathcal{O}_{S, \tau})} \mathcal{O}_{(S \otimes \mathbb{C})_{\text{an}}}$  なる同型が存在し,  $L$  の  $\sigma$  による  $k$  への filtration  $F_{\sigma, \tau}$  と  $W$  は,  $\tau$  の同型を通じて一致する。  $\tau = \text{id}$  の  $\mathbb{D}$ -flat section が,  $\tau \neq \text{id}$  の locally constant section と一致する。

定義 (S 上の L を係数とする realization)  $S$  に対して  $\tau$  の pair  $(\{\mathcal{H}_{B, \sigma}\}_{\sigma: k \hookrightarrow \mathbb{C}}, \mathcal{H}_{A^f}, \mathcal{H}_{\text{DR}}, \text{Comp}_{A^f, B}, \text{Comp}_{B, \text{DR}})$  の  $\tau$  の category を  $S$  上の L を係数とする realization の category とし, Realization の category 上の morphism とし,  $\tau$  の構造,  $\text{Comp}$  を保つ  $\{\mathcal{H}_{B, \sigma}\}, \mathcal{H}_{A^f}, \mathcal{H}_{\text{DR}}$  間の linear map  $\alpha$  を与える。 容易にわかるように, realization の category である。

$\otimes, \oplus, \text{Hom}$  なども abel 圏である。  $S$  上の reduced scheme

$X$  に對して,  $\mathcal{H}^i(X, L) \in (R^i(\sigma(f))_* L, R^i f_{et*}(L \otimes A^t), \mathcal{H}_{DR}^i(X/S) \otimes_{\mathbb{Q}} L, \text{comp}_{A^t, B}, \text{comp}_{B, DR})$  は自然同型として realization の元となる。こゝで  $f$  は、構造射  $f: X \rightarrow S$  である。

$S$  は a scheme に對する contravariant functor である ( $\mathcal{H}_{DR}^i(X/S) \otimes_{\mathbb{Q}} L$  は  $X$  が smooth である時は、意味を少し変えた  $C$  として知られる)。  $\mathcal{H}^2(\mathbb{P}^1 \times S, L) \in L(-1)$  と書く。 Realization  $\mathcal{H}^1$  に對して  $\mathcal{H} \otimes L(-1)^{-m}$  ( $m \geq 0$ ) がある。  $\text{Hom}(L(-1)^{+m}, \mathcal{H})$  ( $m \geq 0$ )  $\in \mathcal{H}(m)$  と書く。 (M1)(M2)(M3) の filtration  $W_{\bullet}$  が、  $W_k = \text{全体}$ ,  $W_{k-1} = 0$  となる時は、この mixed motif は、pure である。  $k$  を  $n$  とし、  $n$  を  $2n$  とする。今  $X \xrightarrow{f} S$  が projective smooth である。  $\mathcal{H}^i(X, L)$  は pure  $i$  motif である。  $\exists \tau = \tau_a$  時、 Poincaré duality に對し、  $f$  が relative dimension  $n$  であるとして、  $\mathcal{H}^i(X, L) \otimes \mathcal{H}^{2n-i}(X, L) \rightarrow L(-2n)$  は perfect pairing である。

ゆゑに、  $X, Y$  は  $S$  上 projective smooth である relative dimension  $n, m$  である。  $Z \in S$  上 proper flat cycle  $\tau$ 、 codimension  $n$  の pure  $d$ -cycle である。  $\tau$  は Poincaré duality の functoriality を用いて、  $\mathcal{H}^i(Y, L) \rightarrow \mathcal{H}^{i+2(d-m)}(X, L)(m-d)$ :  $x \mapsto \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^* x \cap d(Z))$  が定義される。こゝで  $\text{pr}_1$  は、 Poincaré duality に對し、  $\tau$  定まる  $\text{pr}_1^*$  の transpose である。

$\exists \tau$ 、  $X \times Y$  内の pure codimension  $d$  の  $S$  上 proper flat cycle の  $L$  係数の和を考へる。  $\tau$  は  $\tau$  と同じ  $C$ 。  $\mathcal{H}^i(Y, L)$  から



$F(\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{\alpha_p, \dots, \alpha_p}_{n_p}) \in F(n, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$  と書く。

### 3. Selberg integral に対応する motif

Selberg integral (S). 次の variety  $S_n$  の period と考えられる。

$$S_n : s^d = \prod_{i=1}^n x_i, \quad t^d = \prod_{i=1}^n (1-x_i), \quad u^d = \prod_{(i,j)} (x_i - x_j) = \omega^2.$$

$S_n$  は  $\mathbb{C}^n$  群  $\mu_d \times \mu_d \times \mu_d \times \mu_2$  から  $s, t, u, \omega$  の積により作用する。 $S_n$  は  $x_i$  の置換により方程式の形が変化する  $T_n$  の  $\mathbb{C}^n$  の  $A^n/S_n$  上の covering と見らる。

$\phi \in \mu_2$  の nontrivial character,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mu_d$  の character とする。

$H^n(S_n, \mathbb{Q}(3d))(\alpha, \beta, \gamma, \phi)$  を定義し  $\mathbb{Q}(3d)$  上の motif と考えらる。これは Selberg motif  $S_n(\alpha, \beta, \gamma, \phi)$  と書く。

定理  $\gamma^i (i=1, \dots, n), \alpha \gamma^i, \beta \gamma^i (i=0, \dots, n-1)$  と  $\omega^i \alpha \beta \gamma^i$

$(i=n-1, \dots, 2n-2)$  の nontrivial character とする。この時、motif

と  $L$  の同型

$$S_n(\alpha, \beta, \gamma, \phi) = \bigotimes_{i=0}^{n-1} F(\alpha \gamma^i, \beta \gamma^i, \gamma, \phi) \otimes \bigotimes_{i=0}^n F((n-i)\gamma)^{-1}$$

が存在する。

定理の証明は、次の命題を示せばよい。

命題  $\gamma, \gamma^{n+1}, \alpha, \beta, \alpha \beta \gamma^n$  の nontrivial character とする。この時、motif と  $L$  の同型

$$F((n+1)\gamma) \otimes S_{n+1}(\alpha, \beta, \gamma, \phi) \cong F(\alpha, \beta, \omega \gamma) \otimes S_n(\alpha \gamma, \beta \gamma, \gamma, \phi)$$

が存在する。

以下. 命題の証明をしよう. まず初めに. Resultant  
 variety  $\tilde{R}_n$  を  $\tilde{R}_n: s^d = \prod_{i=1}^{n+1} y_i, x^d = \prod_{i=1}^{n+1} (1-y_i),$   
 $u^d = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n+1} (x_j - y_i) \times (-1)^\varepsilon, \varepsilon = \frac{1}{2}n(n+1)$  で定義できる. 2  
 1.  $A^n \times A^{n+1} = \{(x, y)\}$  を  $n \times n \times n$ -covering  $\tilde{V}$  がある.  $\tilde{R}_n = 1$  は,  
 $x_i$  と  $y_j$  の座標の  $n$  次元空間にあり.  $G_n \times G_{n+1}$  が作用する.  $R_n$   
 は  $\tilde{R}_n / (G_n \times G_{n+1})$  で定義できる.  $p_1: R_n \rightarrow A^n / G_n, p_2:$   
 $R_n \rightarrow A^{n+1} / G_{n+1}$  が存在する. 次に.  $A^n / G_n$  と  $A^{n+1} / G_{n+1}$  上  
 の  $R_n$  とある twist  $T$  は Fermat hypersurface の  $\mathbb{P}^1$  の corres-  
 pondence を定義できる. 今.  $z_1, \dots, z_n$  と  $y_1, \dots, y_{n+1}$  は  $x_1, \dots, x_n$   
 と  $y_1, \dots, y_{n+1}$  の基本対称式とできる.  $f_x(y) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - y_i)$  で定  
 義できる.  $y_1, \dots, y_{n+1}$  に関する linear form とできる. 3  
 $R_n \times_{A^n / G_n} A^n$  と.  $A^n$  上の Fermat hypersurface  $F_1$  の  $\mathbb{P}^1$  の corres-  
 pondence を定義できる.  $F_1$  は twisted Fermat hypersurface  
 である.  $F_1: \sum_{i=0}^{n+1} s_i x_i^d = 1, s_0 = \prod_{i=1}^n x_i^{-1}, s_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} (1-x_i)^{-1}$   
 $s_i = -\prod_{j \neq i} (x_i - x_j) \quad (i=1, \dots, n)$  で定義できる.  $x_i^d = f_{x_i}(y),$   
 $x_0^d = y_{n+1}, x_{n+1}^d = f_1(y)$  とおくと  $F_1$  は  $T = \sigma$  と  $\sigma^2$  から  
 $(x_0, \dots, x_{n+1})$  と  $(s, t, u) = (x_0, x_{n+1}, x_1 \dots x_n)$  に対応させる  
 ことができる.  $F_1$  から  $R_n \times_{A^n / G_n} A^n$  の  $A^n$  上の morphism と与え  
 る.  $T$  は  $G_n \times (n \times n \times n)$  equivariant である  
 と考えられる. 次に  $A^n / G_n$  上の motif の同型を得る.



命題  $H^{n+1}(R_n, L)(\alpha, \beta, \gamma) \cong \rho_n^* F(\alpha, \beta, \gamma) \otimes K(\alpha, \beta, \gamma, \phi)$   
 $\cong \rho_n^* \rho_n^* A^n/B_n \rightarrow \mathbb{Q}(3d)$  に対する構造射,  $K(\alpha, \beta, \gamma, \phi)$  は  
 $A^n/B_n$  上の Kummer covering  $S_n$  の character  $(\alpha, \beta, \gamma, \phi)$ -part  
 に対応する motif である。条件から,  $F(\alpha, \beta, \gamma)$  は, pure weight  
 $(n+1)$  の motif である。

系  $H^i(R_n, L)(\alpha, \beta, \gamma) \cong F(\alpha, \beta, \gamma) \otimes H^{i-(n+1)}(S_n, L)(\alpha, \beta, \gamma, \phi)$   
 に対する motif の同型が存在する。

同様の議論を  $pr_2$  に対しても繰り返すことにする。

$H^i(R_n, L)(\alpha, \beta, \gamma) \cong F((n+1)\gamma) \otimes H^{i-n}(S_{n+1}, L)(\alpha, \beta, \gamma, \phi)$   
 を得る。2つの同型を合わせると命題を得る。

### 3. $q$ -analogy

$q$ -analogy について。Askey [A] の論文がある。これ  
 を引用することにしよう。その notation を定義しよう。§4 について  
 いうのは preprint [T] である。参照しよう。

今,  $q \in \mathbb{C}$  且  $0 \neq q < 1$  なる複素数とし,  $q = \exp(2\pi i \tau)$  と満  
 $\tau \in \mathbb{R}$  と fix する。  $\alpha \in \mathbb{R}$  と fix することにしよう。任意の実数  $\alpha$   
 に対して,  $q^\alpha = \exp(2\pi i \tau \alpha)$  と定義する。また,  $f(x) \in \mathbb{C}^x$  上の  
 関数とし, 以下 Jackson integral が収束するとき

$$\int_0^r f(x) d_q x = r(1-q) \sum_{i=0}^{\infty} f(rq^i) q^i$$

と定義する。また, 一般に,  $\int_{r_1}^{r_2} f(x) d_q x = \int_0^{r_2} f(x) d_q x - \int_0^{r_1} f(x) d_q x$

と定義可。任意  $a \in \mathbb{C}$  に対し  $(a)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - aq^i)$  は絶対収束可。  $\forall \tau = \alpha \in \mathbb{R}$  に対し  $(a)_k = (a)_\infty / (q^{-\alpha})_\infty$  で定義可。  $\alpha$  が自然数  $n$  の時は、これは  $q$  の多項式である。  $\Gamma$ -関数の  $q$ -analog  $\Gamma_q \in \Gamma_q(\alpha) = \{(q)_\infty / (q^\alpha)_\infty\} \cdot (1-q)^{1-\alpha}$  で定義可。  $q \rightarrow 1$  の時は、古典的  $\Gamma$ -関数に収束可。  $\exists \tau, \alpha \in \mathbb{R}, \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n, \tau = (\tau_i) \in \mathbb{R}^n$  且  $\tau_i - \tau_j \in \mathbb{Z} (i \neq j)$  と可。

$q$ -hypergeometric function  $f(\tau, \alpha, \beta, x)$  &  ${}_n F_i(\tau, \alpha, \beta)$  ( $i=1, \dots, n$ )  $\exists$ .

$f(\tau, \alpha, \beta, x) = x^\alpha \prod_{i=1}^n (q^{-\tau_i} x)_{\beta_i}, F_i = \int_0^{q^{\tau_i}} f(\tau, \alpha, \beta, x) d_q x$  で定義可。今  $\tau$  の条件をもて  $\tau$  は well defined である。これは  $q^{-\tau_i} = y_i$  とおいて  $q \rightarrow 1$  の時を考へれば、古典的  ${}_n F_i$  Appel's hypergeometric function になる。

#### 4.1. $q$ -hypergeometric function の determinant

この章では 2 種類の determinant を計算しよう。

##### 4.1.1 第一の determinant formula

$$D(\alpha, \beta) = \det \begin{pmatrix} F_1(\tau, \alpha, \beta), \dots, F_1(\tau, \alpha+n-1, \beta) \\ \vdots \\ F_n(\tau, \alpha, \beta), \dots, F_n(\tau, \alpha+n-1, \beta) \end{pmatrix}$$

と可。

定理

$$D(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma_2(\alpha+1) \prod_{i=1}^n \Gamma_2(\beta_i+1)}{\Gamma_2(\alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i + n+1)} \prod_{i=1}^n q^{(\tau_i+1)(\alpha+1)} \times \prod_{(i,j)} \left( q^{-\tau_i + \tau_j + 1} \right)_{\beta_i} \prod_{(i,j)} q^{(\tau_i - \tau_j)}$$

証明  $F(\tau, \alpha, \beta) = {}^* (F_1(\tau, \alpha, \beta), \dots, F_n(\tau, \alpha, \beta))$  とおくと

$\sum_{j=0}^n m_j F(\alpha+j, \beta) = 0$  なる差分方程式を満足する  $\alpha$  なる Stokes の定理の  $q$ -analog から出て来る.  $\tau = \tau_0$  として  $m_j$  は  $\sum_{j=0}^n m_j x^j = q^{-\alpha-1} \prod_{i=1}^n (1 - q^{-\tau_i-1} x) - \prod_{i=1}^n (1 - q^{-\tau_i+\beta_i} x)$  として定義される.

今、差分方程式  $R_i z$ .  $(R_i f)(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta + e_i)$  ( $\tau = \tau_0$  として  $e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$ ) で定義する.

命題  $(R_i D)(\alpha, \beta) = \frac{\prod_{j=1}^n (1 - q^{\beta_i - \tau_i + \tau_j + 1})}{1 - q^{\alpha+1} \prod_{j=1}^n q^{\beta_j + 1}} D(\alpha, \beta)$

証明 左辺は  $\det (F(\alpha, \beta) - q^{-\tau_i + \beta_i} F(\alpha+1, \beta), \dots, F(\alpha+n-1) - q^{-\tau_i + \beta_i} F(\alpha+n, \beta))$  となる. 上の差分方程式を用いて、この命題を得る.

上の命題をくり返し使う.

$$D(\alpha, \beta) = \frac{(q^{\alpha+1} \prod_{j=1}^n q^{\beta_j + 1})_{\infty}}{\prod_{i,j} (q^{\beta_i - \tau_i + \tau_j + 1})_{\infty}} D(\alpha, (\infty, \dots, \infty))$$

を得る.  $\beta = (0, \dots, 0)$  の時は再びこの式を用いて、定理を得る.

#### 4.1.2 第二の determinant formula 前節で定義した.

hypergeometric function に対して、 $\alpha$  が整数、 $\beta_i$  が自然数、 $\tau_i$  が全て自然数の時は、やはり hypergeometric function が定義される. 再び上の determinant formula が成り立つ.  $\beta$  が自然数の時は、被積分関数は  $x$  に関する多項式となる.  $\tau_i - \tau_j \in \mathbb{Z}$  の時にも、積分の意味がある事に注意する.  $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{Z}^n$  とする.

$$g(y_0, m, x) = x^m \prod_{i=0}^n (y_i^{-1} x)^\beta, \quad G_j = \int_{y_j}^{y_{j+1}} g(y_0, m, x) d_j x$$

$$D(y_0) = \det \begin{pmatrix} G_0(y_0, 0), \dots, G_0(y_0, n-1) \\ \vdots \\ G_{n-1}(y_0, 0), \dots, G_{n-1}(y_0, n-1) \end{pmatrix}$$

とある。2) は a determinant formula 17.

定理

$$D(y_0) = b^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{T_2(\beta+1)^{n+1}}{T_2((n+1)(\beta+1))} \prod_{0 \leq i < j \leq n} (q y_i^{-1} y_j)^\beta \prod_{n \geq i < j \geq 0} (y_i - y_j)$$

証明 今、 $\lim_{y_0 \rightarrow 0} y_0^\beta G_i(y_0, m) = (-1)^\beta q^{\beta(\beta-1)/2} \int_{y_j}^{y_{j+1}} x^{m+\beta} \prod_{i=1}^n (y_i^{-1} x)^\beta d_j x$

と便、2.  $\lim_{y_0 \rightarrow 0} y_0^{n\beta} D(y_0)$  が前節から計算できる。  $D(y_0)$  と

$D(2y_0)$  の関係は、前節と同様に、Stokes の定理を用い、

$$D(2y_0) \frac{\prod_{i=1}^n (1 - q^\beta y_0^{-1} y_i)}{1 - q^{(n+1)(\beta+1)}} (1 - q^{\beta+1}) = D(y_0) \frac{\prod_{i=0}^n (1 - q^{-\beta-1} y_0^{-1} y_i)}{1 - q^{-(n+1)(\beta+1)}}$$

と与えられる。これより定理を得る。

#### 4.2. Askey 予想の別証について

本章では、ある多変数の被積分関数の Jackson integral に

関する Fubini の定理を用い、これにより、Selberg integral の

inductive 関係式を与える。その差積の  $q$ -analog を定義し、

Askey 予想を述べよう。今、 $D_n^{(r)}(x)$  と

$$D_n^{(r)}(x) = \Delta_n(x)^2 \cdot \prod_{i < j} (q x_i x_j^{-1})^{r-1} \prod_{i=1}^n x_i^{(n+1)(r-1)}$$

(定義)  $\Delta_n(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$  とする

$\delta_n = \{0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1 \mid x_i \in q^{\mathbb{Z}}\}$  とし、Selberg integral の



$$(2) \int_{S_{n+1}} \left\{ \int_{D(y)} I(x, y) d_2 x \right\} d_1 y$$

$$D(y) = [y_0, y_1] \times \cdots \times [y_n, y_{n+1}],$$

$$S_{n+1} = \{0 \leq y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_n \leq 1 \mid y_i \in \mathbb{R}^2\}$$

(1), (2) 共に、 $\sigma$  の内側の積分から計算可なり。これに、4.12<sup>o</sup> の  $\Delta$  = determinant の結果が使われる。紙面の都合上、 $\sigma$  は (1) の内側の積分の計算のみを可なりと仮定する。

$$\int_{D(x)} I(x, y) d_2 y = \Delta_{n+1}(x) \prod_{i=1}^n x_i^{(n+1)(r-1)} \times A. \quad \text{--- (2)}$$

$$A = \int_{[0, x_1] \times \cdots \times [x_n, 1]} \Delta_{n+1}(y) \prod_{i=0}^n y_i^{\alpha-1} \prod_{i=0}^n (\beta y_i)^{\beta-1} \prod_{j=1}^n \prod_{i=0}^n (\beta^{2-r} x_j^{-1} y_i)_{r-1} d_1 y$$

と可なり。今後簡単のため、 $x_0 = 0, x_{n+1} = 1$  と書き、 $\{0, \dots, n\}$  の置換を  $\sigma_{n+1}$  と書く。

$$A = \sum_{\sigma \in \sigma_{n+1}} \xi(\sigma) \prod_{i=0}^n \int_{[x_i, x_{i+1}]} y^{\sigma_i \alpha - 1} (\beta y)^{\beta-1} \prod_{j=1}^n (\beta^{2-r} x_j^{-1} y)_{r-1} d_1 y$$

$$= \det \left( \int_{[x_i, x_{i+1}]} y^{k+\alpha-1} (\beta y)^{\beta-1} \prod_{j=1}^n (\beta^{2-r} x_j^{-1} y)_{r-1} d_1 y \right)_{i,k}$$

と可なり。 $(\beta^{2-r} x_j^{-1} y)_{r-1}$  は、 $y = x_j, [x_j, \dots, \beta^{r-2} x_j]$  の  $r-1$  階の積分。また、 $(\beta y)^{\beta-1}$  は  $y = \beta^{-1} z$  の  $\beta$  階の積分。積分区間  $[0, x_1], \dots, [x_i, x_{i+1}], \dots, [x_n, 1]$  はそれぞれ  $[0, \beta^{r-2} x_1], \dots, [\beta^{r-2} x_i, \beta^{r-2} x_{i+1}], \dots, [\beta^{r-2} x_n, \beta^{-1}]$  と可なり。これらを用いて、 $\xi = z$  の前節の determinant の公式を用いる。

$$A = D(\alpha, \alpha-1, (r-1, \dots, r-1, \beta-1))$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(r)^n}{\Gamma(\alpha + \beta + nr)} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-r+1} \prod_{i=1}^n (2x_i)^{\beta+r-1} \prod_{i \neq j} (2x_i x_j^{-1})^{r-1} (-1)^{n(r-1)} \rho^{k_1},$$

$$k_1 = n\alpha(r-1) + n(n-1)(r-1)/2 - n(r-1)(r-2)/2$$

と成る。ゆゑ (1) の積分は Selberg integral を用いて、

$$\int_D I(x, y) d_2 y d_2 x = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(r)^n}{\Gamma(\alpha + \beta + nr)} (-1)^{n(r-1)} \rho^{k_1+k_2} S_n(\alpha+r, \beta+r, r)$$

と成る。ここで  $k_2 = n(\alpha+r-1) + n(n-1)(r-1) + n^2$ 。 (2) の積分も同様である。二番目の determinat formula を使うと成る。結果は (2) の表現は、

$$\int_D I(x, y) d_2 x d_2 y = \frac{\Gamma(r)^{n+1}}{\Gamma(r(n+1))} \rho^{k_3} S_{n+1}(\alpha, \beta, r),$$

$$k_3 = -n(n+1)(r-1)(r-2)/2 + n(n+1)/2$$

を得る。上の二つの式を比較して、Selberg integral に關する inductive formula を得る。

References [A] Askey, Some basic hypergeometric extensions of integrals of Selberg and Andrews, SIAM J. Math. Anal., 18 (1987) pp. 938-951

[T] T-Determinants of  $q$ -hypergeometric functions and another proof of Askey conjecture. (preprint)