数理解析研究所講究録
803巻 1992年 176-183

正規交叉型多様体とCalabi-Yau多様体

並河 良典

§1. 序

非特異ケーラー多様体Xが、$K_X \simeq \mathcal{O}_X$, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$を満たす時、Calabi-Yau多様体と呼ぶことにする。

$\dim X = 2$の場合、Xは、K3曲面に他ならず、任意の2つのK3曲面は、変形によってつながる事、Torelli型の定理が成立することなどが知られている。高次元の場合には、これらについてよくわかっていない。小論では、正規交叉型多様体がsmoothな多様体に変形される為の充分条件を与える。最初の正規交叉型多様体に適当な(コホモロジーの)条件を課すと、smoothingによってできた多様体は、Calabi-Yau多様体になる。この構成法(正規交叉型多様体からCalabi-Yau多様体をつくる)によって、次の問題を考えていこうと言うのが、当研究の動機である。

問題: $\dim X \geq 3$とする。このときCalabi-Yau多様体のdeformation typeは有限か?

Euler数、各Betti数は有界か?

§2. 結果

定義 (2.1)

Xを複素解析空間とする。今、X上に有限個の直線束 L_i $(1 \leqq i \leqq n)$ と、$\mathcal{O}_X$-homomorphism: $s_i : L_i \to \mathcal{O}_X$ が与えられたとする。この時 $(L_i, s_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ を X上の logarithmic structure（以後 log. str. と略称する。）と呼ぶ。

定義 (2.2)

$(X, (L_i, s_i)_{1 \leqq i \leqq n})$、$(Y, (M_j, t_j)_{1 \leqq j \leqq m})$ を log. str 付き複素解析空間とする。今、次のデータが与えられたとする。

(1) $f : X \to Y$ 複素解析空間としての射

(2) nm個の非負整数 $(e_{ji})_{1 \leqq j \leqq m,\ 1 \leqq i \leqq n}$

(3) 次の可換図式を満たす同型 ϕ_j $(1 \leqq j \leqq m)$.

$$\begin{array}{ccc} f^* M_j & \xrightarrow[\phi_j]{\sim} & L_1^{\otimes e_{j1}} \otimes \cdots \otimes L_n^{\otimes e_{jn}} \\ \downarrow t_j \otimes 1 & & \downarrow s_1^{e_{j1}} \cdots s_n^{e_{jn}} \\ \mathcal{O}_X & \underset{id}{=\!=} & \mathcal{O}_X \end{array} \qquad 1 \leqq j \leqq m$$

この時、(1), (2), (3) のデータのことを $(X, (L_i, s_i)_{1 \leqq i \leqq n})$ から $(Y, (M_j, t_j)_{1 \leqq j \leqq m})$ への射と呼ぶ。

コンパクト複素解析空間 X が、d 次元正規交叉型多様体（略して N.C. variety）であるとは、次の事を言う。

$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ と既約成分に分解した時、

(1) 各 X_i は、smooth である。

(2) X の各点 P に対して、局所環 $\mathcal{O}_{X,P}$ は、

$\mathbb{C}\{z_0, \cdots, z_d\} / z_0 \cdots z_\ell \quad (0 \leqq \ell \leqq d)$ と同型。

ここで ℓ は、P に依存する整数。

注意：

正規交叉型多様体という言葉は、もう少し弱い意味で使われ、ここでの正規交叉型多様体のことを単純正規交叉型多様体と呼ぶこともある。

X を N.C. variety とする。この時、X が d-semi-stable とは次の時を言う。

$$I_{X_1}/I_{X_1}I_D \underset{\mathcal{O}_D}{\otimes} \cdots \otimes I_{X_n}/I_{X_n}I_D \simeq \mathcal{O}_D$$

ここで、D は、X の singular locus（X の Jacobian ideal I_D で定義された X の部分解析空間）、I_{X_i} は、X_i の X における定義イデアルを表わす。

X が d-semi-stable であることは、X が semi-stable fibration $\mathcal{X} \to \Delta$ の central fibre として得られる為の必要条件である。今、ここで X が $\mathcal{X} \to \Delta$ の central fibre になっていると

仮定すると、Xには、次の様にして、log. strが入る。

$$L_i \underset{def}{:=} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-X_i)|_X$$

$$s_i \underset{def}{:=} s_i|_X \quad \text{ただし} \quad s_i : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-X_i) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$$

自然なinjection.

これに見習って、一般のd-semi-stable N.C. variety Xにもlog. str. を入れることができる。まず $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ として、各iに対して、直線束L_iと$\mathcal{O}_X$-homomorphism s_iを構成する。$i=1$の時、(L_1, s_1)を次の様に構成する。$i \geqq 2$の場合も全く同様。

$$X^{(1)} = \bigcup_{i=2}^{n} X_i \quad \text{と置いて.}$$

$X^{(1)}$上では、 $I_{X_1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X^{(1)}}$

X_1上では、 $\mathcal{O}_{X_1}(D_1)$; $D_1 = X^{(1)} \cap X_1$

となる様にL_1を構成する。実際

$$\mathcal{O}_{X_1}(D_1)|_{D_1} \cong (I_{X_2} \otimes \cdots \otimes I_{X_n} \otimes \mathcal{O}_{D_1})^{\vee}$$

$$I_{X_1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X^{(1)}}|_{D_1} \cong I_{X_1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{D_1}$$

ここでd-semi-stabilityであることを使うと、上の2つは同一視される。

s_1は、$X^{(1)}$上では $I_{X_1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X^{(1)}} \longrightarrow \mathcal{O}_{X^{(1)}}$ natural map

X_1上では $\mathcal{O}_{X_1}(D_1) \xrightarrow{0} \mathcal{O}_{X_1}$

として定義する。

この時、次の命題が言える。

命題(2.3)　X は. d-semi-stable N.C variety で.
$(X, (L_i, s_i)_{1\leq i\leq n})$ は. 上で構成した log. str. とする.
この時. $L_1 \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \cdots \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} L_n \simeq \mathcal{O}_X$

以上で. d-semi-stable N.C. variety X には, ある種の自然な log. str. が入ることがわかった。今度は. residue field が $\mathbb{C}$ である様な. local Artinian $\mathbb{C}[[t]]$ (1変数形式巾級数環) algebra A を考え. Spec A に次の様に log. str. を導入する. (Spec A を. 1点の上に structure sheaf A がのった複素解析空間と思う)

$$(\mathrm{Spec}A, (A, t)).$$

A は. Spec A 上の trivial line bundle, A-homomorphism $t: A\to A$ は. $\mathbb{C}[[t]] \to A$ によって. $t: \mathbb{C}[[t]] \to \mathbb{C}[[t]]$, $1 \longmapsto t$ をひき戻したもの.

例えば. $A=\mathbb{C}$ と置くと. log. str. は. $(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}, (\mathbb{C}, 0))$ となる. さて. (2.2) と. (2.3) を合わせると

$$(X, (L_i, s_i)_{1\leq i\leq n}) \longrightarrow (\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}, (\mathbb{C}, 0))$$

を. log. str. の射と思うことができる.

実際、$f: X \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ を自明な射とすると、次の可換図式を得る。

$$
\begin{tikzcd}
f^*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}} \arrow[r, "(2.3)", "\sim"'] \arrow[d, "0"] & L_1 \otimes \cdots \otimes L_n \arrow[d, "s_1 \otimes \cdots \otimes s_n = 0"] \\
f^*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}} \arrow[r, equal, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{O}_X
\end{tikzcd}
$$

(2.2)の用語を使うと $e_{11} = \cdots = e_{1n} = 1$ と置いている。

定義(2.4).

$Art_{\mathbb{C}[[t]]}$: category of local Artinian $\mathbb{C}[[t]]$-algebras with residue field $\mathbb{C}$.

$(X, (L_i, s_i)_{1 \le i \le n})$: log. str. 付き d-semi-stable N.C. variety

と置く。$A \in \mathrm{Ob}(Art_{\mathbb{C}[[t]]})$ に対して、$S = \mathrm{Spec}\,A$ 上に、上で説明した様に log. str. $(S, (A, t))$ が定まる。$(\mathfrak{X}, (\mathfrak{L}_i, \mathfrak{s}_i)_{1 \le i \le n})$ が、$(X, (L_i, s_i)_{1 \le i \le n})$ の、S 上の log. deformation であるとは、次の条件が満たされている時を言う。

(1) $\mathfrak{X} \to S$ は、X の S 上の flat deformation.

(2) log. str. 付きの複素解析空間として次が可換

$$
\begin{tikzcd}
(\mathfrak{X}, (\mathfrak{L}_i, \mathfrak{s}_i)_{1 \le i \le n}) \arrow[d] & (X, (L_i, s_i)_{1 \le i \le n}) \arrow[l] \arrow[d] \\
(S, (A, t)) & (\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}, (\mathbb{C}, 0)) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Log. deformation functor $F : Art_{\mathbb{C}[[t]]} \to Sets$ を次の様に定義する。

$$F(A) = \{ (X, (L_i, s_i)_{1 \le i \le n}) \text{ の } S \text{ 上の log. deformation 全体} \}$$

この時．次の定理が成り立つ．

定理 (2.5)

(1) F は．Schlessinger [S] の意味で hull $(\mathfrak{X}_R ; R)$ を持つ。

(2) R は．$\mathbb{C}[[t]]$-algebra の構造を持つが 切断．$R \to \mathbb{C}[[t]]$ が存在すれば．X は．smoothable である。

定理 (2.6)．

$(X, (L_i, s_i)_{1 \le i \le n})$ を．log str. 付きの d-semi-stable N.C. variety。$\dim X = d$、R は (2.5) と同じとする。この時．次が成立する。

(a) $d = 1$ の時．R は $\mathbb{C}[[t]]$ 上 smooth．

(特に．X は smoothable)

(b) $d = 2$、X が次を満たせば．R は $\mathbb{C}[[t]]$ 上 smooth

(1) X の各 component は Kähler

(2) $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$

(3) $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$．

(C) $d \geqq 3$ の時. X が次を満たせば. R は. $\mathbb{C}[[t]]$ 上 smooth.

(1) X は. projective. (つまり. 或る N に対して. $\mathbb{P}^N$ に埋め込まれる)

(2) $H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X) = H^{d-2}(X, \mathcal{O}_X) = 0$

(3) $H^{d-2}(X^{[0]}, \mathcal{O}_{X^{[0]}}) = 0$

但し. $X^{[0]}$ は. X の normalization を表わす。

X が弱い意味での正規交叉型 (つまり. X の各点 p に対して $\mathcal{O}_{X,p} \simeq \mathbb{C}\{z_0, \cdots z_d\}/z_0 \cdots z_\ell \quad 0 \leqq \ell \leqq d$) の場合. ここで紹介した log. str. の定義は通用しなくなる。 その為. log. str. の定義を少し変えなくてはならない。 詳しくは. [K-N] を参照されたい。

参考文献

[K-N] Kawamata, Y - Namikawa, Y :
Logarithmic deformation of normal crossing varieties and its application to Calabi-Yau manifolds, in preparation

[S] Schlessinger, M :
Functors of Artin rings, Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968).