数理解析研究所講究録
803 巻 1992 年 164-175

可換偏微分作用素環の構成とAbel多様体上の層のFourier変換について

神戸大自然科学　中屋敷 厚
(Nakayashiki Atsushi)

§0 背景

可換常微分作用素環(CODO's)を決定する問題は100年程の歴史を持ち(c.f. Intro. of [2])その研究の初めから、代数曲線と関連することが、その具体形の決定を通して示されている(ref of [2])。これら初期の研究はしばらく孤立していたが、'70-'80に発展したSoliton理論の中で(初期の研究とは独立に)復活し、CODO'sを決定する問題は、決定的な進歩を遂げることになった。すなわち、Novikov S.P. Krichever I. Drinfeld V. Mumford D. その他の人々等の研究を経て、1989年 Mulase M. によって、CODO's の"geometric objects"による分類が完成された。この"geometric objects"の詳しい研究又は、深い意味は、これからの研究で明らかにされていくであろうと期待される。CODO's の具体形を決

定する問題について分かっていることは、rank ≥ 2 の場合は、非常に少ない。（rank ≈ 対応する geometric object の一部である sheaf の rank）（c.f. [5] and ref. of [5]）。

ここでは、話を高次元化することを目的とし、ある種の geometric objects から、可換偏微分作用素環（CPDO's）を構成する1つの一般的方法を示す。

§1 例と概念

例　$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ を楕円曲線

$\wp(x)$ を Weierstrass のペー関数

（$\wp'(x)^2 = 4\wp(x)^3 - g_2\wp(x) - g_3$ を満たす）

$$P = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 - 2\wp(x)$$

$$Q = \left(\frac{d}{dx}\right)^3 - 3\wp(x)\frac{d}{dx} - \frac{3}{2}\wp'(x)$$

とする。と、

$$[P, Q] = 0$$

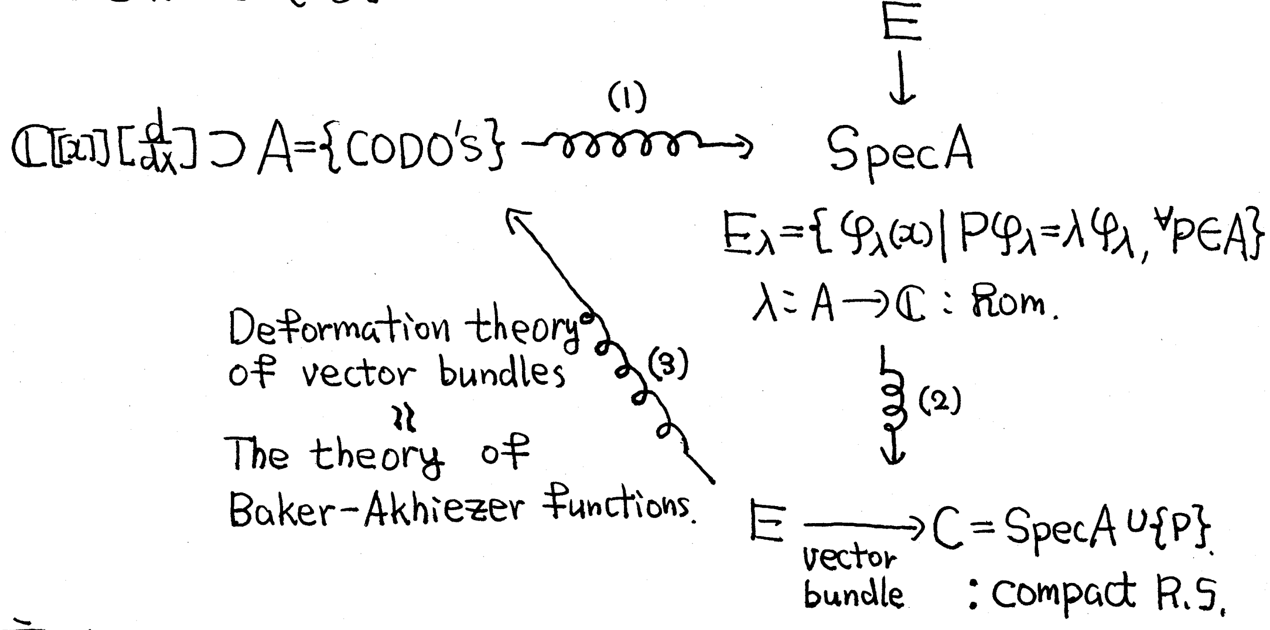
$$(2Q)^2 = 4P^3 - g_2 P - g_3$$

$$\left\{R \in \mathbb{C}[[x]]\left[\frac{d}{dx}\right] \,\middle|\, [R, P] = 0\right\} \simeq \mathbb{C}[P, Q]$$

最後の式は、左辺が可換環となり、右辺と同型であることを意味する。特に、$\mathbb{C}[P, Q]$ は極大可換微分作

用素環である。

さて、可換常微分作用素環と、Geometryとの関係は、非常に単純化して言うと次のような図にまとめることができる。



意味

(1)：Aの同時固有関数を考えることで、SpecA上のsheafを構成する。

(2)：コンパクト化。

(3)：geometric objects から CODOs の構成。概念的には、ここが一番 non-trivial な process で、以下は、この部分の高次元への拡張である。

§2 Baker-Akhiezer (BA)-module

以下話はすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上とする。

$X = V/\Gamma$: abelian var. V: $\mathbb{C}$-vect. space, $V \supset \Gamma$: lattice

$\hat{X} = \bar{V}^*/\Gamma^*$: the dual abelian var. $\bar{V}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-anti-linear}}(V, \mathbb{C})$

$\Gamma^* = \{ f \in \bar{V}^* \mid \mathrm{Im} f(\gamma) \in \mathbb{Z}, \ {}^\forall \gamma \in \Gamma \}$,

$\mathcal{P}$: the Poincaré bundle s.t. $P_0 \simeq 1_{\hat{X}}$ $P_{\hat{0}} \simeq 1_X$

ここで、$P_x = \mathcal{P}|_{\{x\} \times \hat{X}}$, $P_{\hat{x}} = \mathcal{P}|_{X \times \{\hat{x}\}}$ とおく。

$$X^\natural = \{ (P_x, \nabla) \mid \nabla : P_x \to P_x \otimes \Omega^1_{\hat{X}} : \text{hol. flat connection} \} \to X$$

$$(P_x, \nabla) \longmapsto x$$

: an affine bundle (fibre $\simeq H^0(\hat{X}, \Omega^1_{\hat{X}})$)

D : an ample irred. divisor

<u>Prop.</u> $\exists!\, s_D : X - D \longrightarrow X^\natural$: meromorphic section s.t. s_D は、D に高々1位の pole しか持たない。

Cocycle によってすべてを記術することにより s_D を具体的に決定する。まず $\mathcal{P}$ は、次の cocycle で与えられる:

$$j_{\mathcal{P}}((\gamma, \ell), (x, y)) = e^{-\pi i \mathrm{Im}\langle \gamma, \ell \rangle} \cdot e^{\pi(\overline{\langle x, \ell \rangle} + \langle \gamma, y \rangle) + \frac{\pi}{2}(\overline{\langle \gamma, \ell \rangle} + \langle \gamma, \ell \rangle)}$$

$(\gamma, \ell) \in \Gamma \times \Gamma^*$, $(x, y) \in V \times \bar{V}^*$, $\langle\ ,\ \rangle : V \otimes \bar{V}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ pairing

<u>Lemma</u> Γ の $V \times \bar{V}$ への作用を次で定義する:

$$\gamma : (x, \xi) \longmapsto (x + \gamma, \xi - \bar{\gamma}).$$

$$\Rightarrow \quad X^\natural \simeq V \times \bar{V} / \Gamma$$

証明： $V=\bigoplus_{i=1}^{g}\mathbb{C}e_i$ $\bar{V}^*=\bigoplus_{i=1}^{g}\mathbb{C}e_i^*$ $\langle e_i, e_j^*\rangle=\delta_{ij}$

と baseをとり，その座標を使って

$$\nabla(x,y)=d_y+\pi\langle\overline{\xi(x)}, dy\rangle : P_x \to P_x\otimes\Omega^1_{\hat{X}}$$

と書く。ただし，$V\ni x=\sum_{i=1}^{g}x_ie_i$，$\bar{V}^*\ni y=\sum_{i=1}^{g}y_ie_i^*$，

$\langle\overline{\xi(x)}, dy\rangle=\sum_{i=1}^{g}\xi_i(x)dy_i\in H^0(\hat{X},\Omega^1_{\hat{X}})\simeq\bar{V}$ である。

$u(x,y)$を，$V\times\bar{V}^*$上の関数で

$$u(x+\gamma, y+l)=j_P((\gamma,l),(x,y))\,u(x,y) \qquad \cdots(*)$$

を満たすものとする。$\nabla(x,y)$が X^q の section となるための必要十分条件は

$$(\nabla u)(x+\gamma, y+l)=j_P((\gamma,l),(x,y))\,u(x,y) \qquad \cdots(**)$$

が(*)を満たす任意の u について成り立つことである。

計算により

$$(\nabla u)(x+\gamma,y+l)=j_P((\gamma,l),(x,y))\left(d_y+\pi\langle\overline{\xi(x+\gamma)+\gamma}, dy\rangle\right)u(x,y)$$

従って $(**)\Leftrightarrow \xi(x+\gamma)=\xi(x)-\gamma$ Q.E.D.

divisor D に対応する line bundle を$[D]$，その Appell-Humbertの標準形で書いたcocycle を $j_D(\gamma,x)$，hermitian form を $H=(h_{ij})$ とする。$[D]$のsectionと V上の関数で $u(x+\gamma)=j_D(\gamma,x)u(x)$ と変換するものとを同一視する。

<u>Lemma</u> $u \in \Gamma(X, [D])$ s.t. $(u=0)=D$ とする。
$f_i(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{g} h^{ji}\frac{\partial}{\partial x_j}\log u(x)$, $H^{-1}=(h^{ij})$ とおく。
$\Rightarrow$ $(f_i(x))_{i=1}^{g}$ は $X^{\natural} \to X-D$ の section である。

<u>Remark</u>: u は cocycle に対して unique up to const.
特に、$(f_i)_{i=1}^{g}$ は、cocycle に対して unique である。

<u>Def.</u> $s_D = (f_i)_{i=1}^{g}$ を canonical section と呼ぶ。

以上で Prop. は証明された。V 上の正則関数で $g(x+\gamma)=g(x)-\bar{\gamma}_i$ を満たすものは存在しないので、s_D の各成分は、D に1位の pole を持つことが分かる。

<u>Cor.</u> $\{s \mid s : X^{\natural} \to X-D \text{ の section}\} = s_D + H^0(X-D, \mathcal{O}_X^{\oplus g})$.

§3 $\mathcal{D}_{\hat{X}}$-module structure on $\mathcal{P}|_{(X-D)\times\hat{X}}$

$\mathcal{D}_{\hat{X}} = \bigcup_n \mathcal{D}_{\hat{X}}(n)$ を $\hat{X}$ 上の微分作用素全体のなす環の層とする。$\mathcal{D}_{\hat{X}}(n)$ は n 階以下の作用素のなす部分層である。次の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
 & X^{\natural}\times\hat{X} \arrow[d, "\pi\times\mathrm{id}"] \\
(X-D)\times\hat{X} \arrow[ur, bend left, "s_D\times\mathrm{id}"] \arrow[r, hook, "\iota\times\mathrm{id}"'] & X\times\hat{X}
\end{tikzcd}$$

π, ι はそれぞれ自然な projection, injection である。$X^{\natural}$ の定義から, $(\pi \times id)^* \mathcal{P}$ には, 自然な $\mathcal{D}_{\hat{X}}$-module の構造が入る。従って, 上の可換図式より, $(\iota \times id)^* \mathcal{P}$ は, 自然に $\mathcal{D}_{\hat{X}}$-module となる。

以下 π_i $(i=1.2)$ を $X \times \hat{X}$ から第 i 成分への projection とする。

<u>Def.</u> F を coherent $\mathcal{O}_X$-module, $F(*D) = \varinjlim_n F \otimes \mathcal{O}_X(nD)$ とする。この時 $\hat{X}$ 上の $\mathcal{D}_{\hat{X}}$-module を

$$\mathcal{F}(X, D, F) = \pi_{2*}(\pi_1^* F(*D) \otimes \mathcal{P})$$

で定義する。ただし, $\mathcal{D}_{\hat{X}}$-module の構造は, $(\iota \times id)^* \mathcal{P}$ から誘導されるもので入れる。$\mathcal{F}(X, D, F)$ を, 3つ組 (X, D, F) の <u>Baker-Akhiezer (BA)-module</u> と呼ぶ。

<u>Remark</u> (1) $A = H^0(X-D, \mathcal{O}_X)$ を X の affine 環とすると, 定義から, $\mathcal{F}(X, D, F)$ は, 左 $\mathcal{D}_{\hat{X}}$, 右 A-bi module になる。

(2) $\mathcal{F}(X, D, F)(n) = \pi_{2*}(\pi_1^* F(nD) \otimes \mathcal{P})$ とすると, $\mathcal{D}_{\hat{X}}(k) \mathcal{F}(X, D, F)(n) \subset \mathcal{F}(X, D, F)(n+k)$ がすべての n, k について成り立つ。

§4 BA-module の構造と CPDO's

以下 (F, D) は "$\mathcal{T}or_1^{\mathcal{O}_X}(F, \mathcal{O}_D) = 0$, D は non-singular" を満たすとする。$gr \mathcal{F}(X, D, F) = \bigoplus_n gr_n \mathcal{F}(X, D, F)$

$\mathrm{gr}_n \mathcal{F}(X,D,F) = \mathcal{F}(X,D,F)(n) / \mathcal{F}(X,D,F)(n-1)$ とおく。

<u>Theorem 1.</u> $\mathrm{gr}\,\mathcal{F}(X,D,F)$ は coherent $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{\hat{X}}$-module である。特に、$\mathcal{F}(X,D,F)$ は、coherent $\mathcal{D}_{\hat{X}}$-module となる。又、$N_F \in \mathbb{Z}$ を、$H^i(X, F_{\hat{x}}(n)) = 0 \quad \forall i \geq 1 \quad \forall \hat{x} \in \hat{X} \quad \forall n \geq N_F - 1$ を満たすものとすると、$\mathrm{gr}\,\mathcal{F}(X,D,F)$ は、$\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{\hat{X}}$ 上 $\bigoplus_{n=-\infty}^{N_F+g-1} \mathrm{gr}_n \mathcal{F}(X,D,F)$ で生成される。ここで、$F_{\hat{x}}(n) = P_{\hat{x}} \otimes F \otimes \mathcal{O}_X(nD)$.

CPDO's に対応する3つ組 (X,D,F) のクラスを設定する。

<u>Def.</u> (X,D,F) が type (CC) for $\hat{x} \in \hat{X}$ とは

(1) $H^i(X, F_{\hat{x}}) = 0 \quad \forall i \geq 0$

(2) $H^i(X, F_{\hat{x}}(k)) = 0 \quad \forall i \geq 1 \ \& \ \forall k \geq 1$

(3) $H^i(X, F_{\hat{x}}(-k)) = 0 \quad \forall i \neq g \ \& \ \forall k \geq 1$

が成り立つ時をいう。

<u>Theorem 2.</u> (X,D,F) を type (CC) for $\hat{x} \in \hat{X}$ とし、$r = \mathrm{rank}\,F$ とする。と $\mathrm{gr}\,\mathcal{F}(X,D,F)_{\hat{x}}$ は rank $r \cdot D^g$ の quasi-free $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{\hat{X},\hat{x}}$ module である。特に、$\mathcal{F}(X,D,F)_{\hat{x}}$ は、rank $r \cdot D^g$ の free $\mathcal{D}_{\hat{X},\hat{x}}$ module である。さらに、$\mathrm{gr}\,\mathcal{F}(X,D,F)_{\hat{x}}$ は $\bigoplus_{n=1}^{g} \mathrm{gr}_n \mathcal{F}(X,D,F)_{\hat{x}}$ で $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{\hat{X},\hat{x}}$ 上生成される。ここで、D^g は、D の g 回自己交点数、$g = \dim X$ である。

ただし、complex mfd Z 上の graded $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_Z$ module $\mathcal{M}$ が quasi-free であるとは、graded module として

$^{\exists}\{a_i\}$, $\mathcal{M} \simeq \oplus\, gr\mathcal{D}_Z(a_i)$ $\qquad gr_n\mathcal{D}_Z(a_i) = gr_{n+a_i}\mathcal{D}_Z$

なる同型がある場合を言う。

<u>Cor.</u> Theorem 2と同じ条件を仮定し. $A_{X,D} = H^0(X-D, \mathcal{O}_X)$とおく。$\{u_i\}_{i=1}^N$, $(N = r\cdot D^g)$を$\mathcal{F}(X, D, F)_{\hat{x}}$の1つの$\mathcal{D}_{\hat{X},\hat{x}}$ free baseとし. $\Phi = {}^t(u_1, \cdots, u_N)$とおく。この時

$$\tau_\Phi : A_{X,D} \longrightarrow Mat(N \times N, \mathcal{D}_{\hat{X},\hat{x}})$$

を $f\Phi = \tau_\Phi(f)\Phi$ $(f \in A_{X,D})$ で定義すると. τ_Φ は. ring monomorphismとなる。

$\tau_\Phi(A_{X,D})$は. 可換偏微分作用素環である。

<u>Theorem 3.</u> Th.2 及び Cor. と同じ状況を仮定する。$\lambda : A_{X,D} \to \mathbb{C}$ を ring hom. とする。同時固有値方程式系 ($\hat{x}$のまわりでlocalに考える)

$$\mathcal{M}_\lambda : \quad \tau_\Phi(f)\,{}^t(v_i)_{i=1}^N = \lambda_f\,{}^t(v_i)_{i=1}^N \qquad f \in A_{X,D}$$

の characteristic variety $SS(\mathcal{M}_\lambda)$は. zero section である。

§5 Type (CC)の例.

Mukai M. によるFourier変換の定義を復習する([1])。$\mathcal{O}_X$-module の category から $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-module の category への functor $\hat{\mathcal{F}}$を

$$\hat{\mathcal{F}}(F) = \pi_{2*}(\pi_1^* F \otimes \mathcal{P}) \quad , \quad F : \mathcal{O}_X\text{-module}$$

で定義する。

<u>Def. (Mukai)</u>　F を coherent $\mathcal{O}_X$-module とする。
F に対して，W.I.T of index i が成り立つとは，$R^j\hat{\varphi}(F)=0$ が $\forall j \neq i$ について成り立つ時を言う。又，F に対して，I.T. of index i が成り立つとは，$H^j(X, F_{\hat{x}})=0$ が $\forall j \neq i$, $\forall \hat{x} \in \hat{X}$ について成り立つ場合を言う。F に対して，W.I.T or I.T of index i が成り立つ時，$\hat{F} := R^i\hat{\varphi}F$ を F の Fourier 変換と呼ぶ。

<u>Example (Homogeneous vector bundle)</u>
F が homog. vect. bdl. とは，次の同値な条件 (1) 及び (2) が成り立つ時を言う：
(1) $T_x^*F \cong F$　$\forall x \in X$，ここで $T_x : X \to X$ は $y \mapsto x+y$.
(2) F に対して，W.I.T of index $g=\dim X$ が成り立ち，$\mathrm{Supp}\hat{F}$ は有限個の点になる。

<u>Prop.</u> H を homog. vect. bdl.，D を non-sing ample irred. divisor，$\hat{x} \notin \mathrm{Supp}\hat{H}$ とする。この時
(1) (X, D, H) は type (CC) for $\hat{x}$.
(2) $gr\,\mathcal{F}(X, D, F)_{\hat{x}} \cong \bigoplus_{i=1}^{g} \left(gr\,\mathcal{O}_{\hat{X},\hat{x}}(-i)\right)^{\oplus b_i^{(g)}}$

$b_i^{(g)} = \frac{r\cdot D^g}{g!} a_i^{(g)}$，$a_n^{(g)} = n^g - (n-1)^g - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(g)} \cdot {}_gH_{n-k}$，$a_1^{(g)} = 1$.

${}_gH_r$ は，g コから r コ取る重複組合せの数。

Example (Picard bundle)

C を genus g の compact Riemann surface, P を C の1点, X を C の Jacobian variety とする。X の主偏極により, X と $\hat{X}$ とは, canonical に同型である。C の $\hat{X}$ への埋め込みを1つ固定する。$n \in \mathbb{Z}_{<0}$ ならば, $\mathcal{O}_C(nP)$ に対して I.T. of index 1 が成り立つので, $F_n := \widehat{\mathcal{O}_C(nP)}$ は, vector bundle であり rank $g-n-1$ の Picard bundle と呼ぶ。

Prop. F_n を Picard bundle, D_k を $k\Theta$ と linealy equivalent な non-singular irreducible divisor, $-\hat{x} \in C$ とする。ここで Θ は, X の主偏極とする。$g+nk<0$ とする。この時

(1) (X, D_k, F_n) は type (CC) for $\hat{x}$。

(2) $\mathrm{gr}\,\mathfrak{F}(X, D_k, F_n) \simeq \bigoplus_{i=1}^{g} \left(\mathrm{gr}\,\mathcal{O}_{\hat{X},\hat{x}}(-i)\right)^{\oplus C_i^{(g,n,k)}}$

$$C_m^{(g,n,k)} = rk^g\cdot(m^g-(m-1)^g) + gk^{g-1}(m^{g-1}-(m-1)^{g-1}) - \sum_{j=1}^{m-1} C_j^{(g,n,k)}\cdot {}_gH_{m-j}$$

$$C_1^{(g,n,k)} = rk^g + gk^{g-1}, \quad r = g-n-1.$$

References

[1] S. Mukai : Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves, Nagoya Math. J. Vol. **81** (1981) 153-175.

[2] M. Mulase : Category of Vector Bundles on Algebraic Curves and Infinite Dimensional Grassmanians, Intern. J. of Math. **1** (1990) 293-342

[3] A. Nakayashiki : Structure of Baker-Akhiezer Modules of Principally Polarized Abelian Varieties, Commuting Partial Differential Operators and Associated Integrable Systems, Duke Math. J. Vol. **62** No. 2 (1991) 315-358

[4] A. Nakayashiki : Commuting Partial Differential Operators and Vector Bundles over Abelian Varieties, to appear in Amer. J. Math.

[5] E. Previato and G. Wilson : Vector Bundles over Curves and Solutions of the KP equations, Proc. Sympo. Pure Math. **49**, AMS, (1989) 553-569