数理解析研究所講究録
803巻 1992年 141-150



# Generalized Hodge Conjecture for stably nondegenerate abelian varieties

東京電機大 硲 文夫 (Fumio Hazama)

## §0. Introduction

目標は標題のとおりですが，より正確にいうと，次の定理の証明のアイディアを述べたいと思います：

定理. Aはstably nondegenerateなabelian varietyでその単純成分が全てtype IかIIであるとすると，AについてGeneralized Hodge Conjectureが成り立つ。

注意. "stably nondegenerate" とか "Generalized …" は次の§で定義・定式化を述べます。

証明の方針は，簡単にいうと，仮定をみたすアーベル多様体のHodge群の$H^1$への表現が$sp$の自然な表現の直和になることに注意し，その種々の$H^i$への表現の既約表現への分解が

ちょうどHodge分解の"level"に対応することを用いて，divisor classから誘導されるHodge構造で全てを作り出せることを示す，というものです。

注意．今年のはじめにロシアのTankeevから年賀状がきてそれによると，彼は1991年中に，似た結果を出したそうです。正確には，"Aが単純アーベル多様体でその準同型環がtype Iで奇数次の実体になっているときGeneralized Hodge Conj.が成り立つ"というものです。しかし，このようなアーベル多様体は実はstably nondegenerateですから，その意味で我々の定理はTankeevの結果を含んでいることになります。というようなことを書いてTankeevに送ったんですがまだ返事はきていません。

§1．定義と定式化

まず"stable nondegeneracy"の定義から。

定義．アーベル多様体Aがstably nondegenerateとは，そのすべてのベキ$A^n$についてHodge cycleの環がdivisor classで生成されることをいう。

(ここで"Hodge cycle"とは $H^{2p}(A,\mathbb{Q})\cap H^{p,p}(A)$ の元のことです。)

この定義をHodge群"$Hg(A)$"のことばを用いて次のようにいいかえることができます：

定理([2]).

Aがstably nondegenerate

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{rank}\, Hg(A)_{\mathbb{C}} = \mathrm{rdim}\, A,$$

ただし"$\mathrm{rdim}\, A$"は次のやり方で定義される量とする：

Aをisogenyの意味で単純成分に分解して

$$A \sim A_1^{n_1} \times \cdots \times A_k^{n_k} \quad (A_i \not\sim A_j)$$

となったとする。そして各 $i$ について

$$\mathrm{rdim}\, A_i = \begin{cases} \dim A_i & (A_i\text{が type I}) \\ \frac{1}{2}\dim A_i & (A_i\text{が type II}) \\ \dim A_i & (A_i\text{が type III}) \\ \frac{1}{d}\dim A_i & (A_i\text{が type IVで } [\mathrm{End}^0 A_i : \mathrm{Cent}(\mathrm{End}^0 A_i)] = d^2) \end{cases}$$

とおいて，

$$\mathrm{rdim}\, A = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{rdim}\, A_i$$

とする。

注意（i）一般には

$$\operatorname{rank} Hg(A)_{\mathbb{C}} \leq \operatorname{rdim} A$$

が成り立つ（[2]）ので，stably nondegenerate とは
Aの Hodge群の rank が "maximal possible" となること，
ということができます。

(ii) stably nondegenerate なアーベル多様体の例としては
- いくつかの楕円曲線（互いに isogenous であってもなくてもよい）の直積，
- 奇数次元の単純アーベル多様体，
- $J_0(N)$，$J_1(N)$（いわゆる modular curve $X_0(N)$, $X_1(N)$ の Jacobian variety），
- generic なアーベル多様体，

等が知られています。

次に Generalized Hodge Conjecture の定式化を述べます：

Generalized Hodge Conjecture GHC$(X, m, p)$.（[3]）
非特異射影多様体 $X$ に対しその $H^m(X, \mathbb{Q})$ の部分 $\mathbb{Q}$-Hodge 構造 $V$ であって level が $m-2p$ 以下のものがあったとすると，必ず $X$ の余次元 $p$ の部分多様体 $Z$ が存在して，

$$V \subset \ker(H^m(X,\mathbb{Q}) \to H^m(X-Z,\mathbb{Q}))$$

となる。

注意　部分$\mathbb{Q}$-Hodge構造$V$の"level"とは

$$\max\{|p-q| \,;\, V^{p,q} \neq 0\}$$

で定義される量のことです。

§2. 証明に使われる道具及び略証。

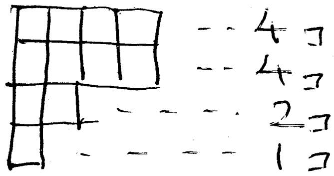
§0で少し述べましたが，stably nondegenerateなアーベル多様体を扱う場合，つねにsp（＝シンプレクティック群のリー環）の表現を相手にすることになります。もちろんその種々の既約表現は基本ウェイトの和でparametrizeされるわけですが，そのテンソル積の既約表現への分解を求めるときには"sp-Young diagram"を用いるのが便利です。これは$\mathfrak{sl}$の場合のふつうのYoung diagramのいわばsp版で$\mathfrak{sl}$のときのようにその表現の次数やテンソル積の分解を極めて直観に訴える仕方で教えてくれます。詳しいことは[1]にゆずるとして（そこにはsoを含む他のいろいろなLie環に附随するYoung図形のことが僕のような非専門家にもわかるようにていねいに書かれています。），我々に必要な部分だけをピックアップして述べることにします。まず，

$Sp_{2n}$の基本ウェイトを$\varpi_1, \cdots, \varpi_n$とします。sp-Young diagram $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$とは非負整数の非増加列（非"ばっかりだ）のことで，ウェイトとの対応が

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \longleftrightarrow (\lambda_1-\lambda_2)\varpi_1 + \cdots + \lambda_n\varpi_n$$

で与えられます。そしてこの減少列をよく知られたやり方で図形に表します。例えば

$(4, 4, 2, 1)$は




というように。これを用いるとテンソル積の分解の計算が次のルール：

(i) $sl$のときと全く同じ

＋

(ii)ある2つの小正方形同士が"cancel"してもよい

でできます。例えば$sl$のときは

$$\square \otimes \square = \square\square \oplus \begin{smallmatrix}\square\\ \square\end{smallmatrix}$$

ですが，$sp$では

$$\square \otimes \square = \square\square \oplus \begin{smallmatrix}\square\\ \square\end{smallmatrix} \oplus \mathbb{1}$$

（$\mathbb{1}$はtrivialな表現を表す）となります。この最後の$\mathbb{1}$が上のルール(ii)からでてきた部分です。実はこの(ii)はいわゆるテンソル計算（リーマン幾何やシンプレクティック幾

何の)における"縮約(contraction)"に対応しています。少し表現論ふうにいえば $\square$ に対応する sp の表現がもっている sp-不変な交代形式の部分です。(もし $\square = H^1(A, \mathbb{C})$ で $\mathcal{L}ie(Hg(A)) \cong sp$ のときは、上の $\square \otimes \square$ の計算は、A の divisor class はちょうど1次元しかない、ということも示しているというわりとバカにできないものでもあります。)

さて次に我々が考えたい class のアーベル多様体については、Hodge 構造の"level"をこの sp-Young diagram のことばで表すことができる、ということです。これがわかってしまえば目標の Generalized Hodge Conjecture はかなり簡単にでてしまいます。以下話を単純にするために、

[ A は単純アーベル多様体で次元が $n$、かつその Hodge 群の Lie 環は $sp(2n, \mathbb{C})$ に同型で、$H^1(A, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2n}$ への表現は sp の自然な表現と同値である

との仮定のもとにすすめていきます。(実は、stably non-degenerate だとこのような表現のいくつかの直和になるのでこのように仮定しても本質は失われません。)

よく知られているように、まず

$$H^p(A, \mathbb{Q}) \cong \Lambda^p H^1(A, \mathbb{Q}),$$

また、Künneth の定理によって、

$$H^*(A^k,\mathbb{Q}) \cong \underbrace{H^*(A,\mathbb{Q})\otimes\cdots\otimes H^*(A,\mathbb{Q})}_{k\text{コ}}$$

が成り立っています。これらの同型は$\mathbb{Q}$-Hodge構造としても成り立つことに注意しておきます。GHCは$\mathbb{Q}$-Hodge構造のことばで書かれているのですが，Hodge群のことばでいうと次の翻訳が成り立ちます。

命題．$V$が$H^p(A^k,\mathbb{Q})$の部分$\mathbb{Q}$-Hodge構造であることと$V$がHodge群$Hg(A)$の表現に関して安定(stable)，すなわち，$Hg(A).V\subset V$であることとは同値である。

(これは，$Hg(A)$が$H^*(A,\mathbb{Q})$の生成するtannaka categoryの(special) Mumford-Tate群になっていることの直接の帰結です。)

従って，GHCを示すためには$V\subset H^p(A^k,\mathbb{Q})$がHodge群の表現として既約であるときに示せばよいことになります。そして，$V$は上の$H^p(A^k,\mathbb{Q})$のテンソル積分解(外積もその部分空間としてとらえておけば)に現われるわけですから先に述べたsp-Young diagramで表せます。

すると，

命題　この $V$ が sp-Young diagram $(\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell)$ に対応しているとするならば

$$V\text{の level} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell$$

が成り立ちます。つまり，$V$ に対応する sp-Young diagram の小正方形の総数が $V$ の level に等しいというわけです。そこでテンソル積の計算を思い出してみると，sp-Young diagram を2つのしたとき，□の個数がへる（すなわち，level がへる）のはルール (ii) を適用したときでした。そして，それは"縮約"に対応しており，幾何でいえば，ある divisor class の定義する交代形式に対応していました。ということは，ルール (ii) を適用した回数だけ divisor class を交わらせた subvariety $Z$ にそれは support をもつことになるということがわかり，Generalized Hodge Conjecture が $A^k$ について成り立つことがいえてしまうわけです。

§3. まとめ

上の略証からみると本質は，定理のような $A$ については，

Hodge群のH¹(A, ℚ)への表現がspのいくつかの直積の表現からできていること，そしてその場合に部分ℚ-Hodge構造のlevelが対応するsp-Young diagramの小正方形の総数に等しいこと，の二つに尽きます。以上。

参考文献


1. Fischler, M. Young-tableau methods for Kronecker products of representations of the classical groups, J. Math. Phys. 14(1973), 637-648.

2. Hazama, F. Algebraic cycles on certain abelian varieties and powers of special surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 31(1985), 487-520.

3. Steenbrink, J. H. M. Some remarks about the Hodge Conjecture, in Hodge Theory, Lecture Notes in Math. 1246, Springer Verlag.