数理解析研究所講究録
第 804 巻 1992 年 192-204

2次多項式写像のｋｎｅａｄｉｎｇ　ｓｅｑｕｅｎｃｅｓ

大阪大学・基礎工学部　亀山敦（ Atsushi KAMEYAMA ）

I. 準備その 1 — interval maps

単位区間 $I = [0,1]$ の上の力学系はその critical point の挙動が本質的な役割をはたす。特に unimodal map f に対してその kneading sequence $k(f)$ を定めることができて, これで多くのことが記述される。

定義　$f : I \to I$ が *unimodal* とは $\exists c \in \mathring{I}$ s.t $I_A = [0,c]$では単調増加, $I_B = [c,1]$では単調減少になるような連続写像のことである。

unimodal map fが与えられたとき, よく知られているようにIの各点 x に対し itinerary とよばれる A, B, Cからなる列 $i_f(x) = w_1w_2w_3\ldots$が定義されるがここでは後の都合上普通とは違うやり方で次のようにふたつの A, Bからなる列の組として定義する。

定義　$x \in I$に対しその *itinerary* とは $i_f(x) = \{w_1w_2\ldots, u_1u_2\ldots\}$。ただし

$$w_i = \begin{cases} A, & f^{i-1}(I^+) \subset I_A, \\ B, & f^{i-1}(I^+) \subset I_B \end{cases}$$

$$u_i = \begin{cases} A, & f^{i-1}(I^-) \subset I_A, \\ B, & f^{i-1}(I^-) \subset I_B \end{cases}$$

ここで $I^+ = (x, x+\varepsilon)$, $I^- = (x-\varepsilon, x)$ は小さい開区間でεは i によって変わってもよいとする。

また $f(c)$ の itinerary $i_f(f(c))$ を $k(f)$ と書き fの *kneading sequence* という。

明らかに $y = f(x)$ なら $i_f(y) = \sigma(i_f(x))$。ただしσは shift map。また実はほとんどの $x \in I$に対して $w_1w_2\ldots$と $u_1u_2\ldots$は一致することに注意しておく。

A, Bからなる無限列全体に次のように順序をいれる。ふたつの列$\underline{w} = w_1 w_2 \ldots$と$\underline{u} = u_1 u_2 \ldots$が$\underline{w} < \underline{u}$とは $1 \leq i \leq k-1$ で $w_i = u_i$, $w_k \neq u_k$であって

$$\begin{cases} w_k = A, u_k = B, & (w_1, \ldots w_{k-1}\text{までの }B\text{の個数が偶数のとき}) \\ w_k = B, u_k = A, & (w_1, \ldots w_{k-1}\text{までの }B\text{の個数が奇数のとき}) \end{cases}$$

となることである。

この順序は $\{i_f(x) | x \in I\}$ の上にも自然に定義できて

$$i_f(x) < i_f(y) \Rightarrow x < y$$

$$x < y \Rightarrow i_f(x) \leq i_f(y)$$

となる。

また $k(f)$ は任意の $n \geq 0$ に対し$\sigma^n(k(f)) \leq k(f)$ という性質を持っている。この性質を満たす記号列を *maximal* であるという。また $x \in I$が f-*maximal* であるというのを任意の $n \geq 0$ に対し $f^n(x) \leq x$ で定義する。

逆に maximal な記号列に対しそれを kneading sequence に持つような unimodal map が存在する。たとえば特別な family $F_a(x) = ax(1-x)$ を考えると,$a \in [0,4]$で$k(f_a)$ として maximal な列がすべて現れる。またこの場合 $a < a' \Rightarrow k(f_a) \leq k(f_{a'})$ という単調性を持っている。

さてここで与えられた maximal な記号列を持つ unimodal map をつくることを試みる。

まず写像

$$F(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

を考える。 $\Sigma = \{A, B\}^{\mathbf{N}}$とする。これはすべての記号列の集合である。位相は積位相をいれる。すると連続な全射$\pi : \Sigma \to I$があって

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\pi} & I \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ \Sigma & \xrightarrow[\pi]{} & I \end{array}$$

となっている。この図式から $i_F(x) = \pi^{-1}(x)$ がわかる。つまり Fには itinerary としてすべての記号列が現れる。明らかに $x \in I$が F-maximal であることと $i_F(x)$ が maximal であることは同値である。

maximal な記号列$\underline{w} = w_1w_2\cdots \in \Sigma$が与えられたとする。これを kneading sequence に持つような unimodal map G をつくる。

1. $\underline{w}$ が eventually periodic な場合を考える。つまり $\{\sigma^n(\underline{w})\}_{n\geq 0}$が有限とする。$n \geq 0$ に対し $a_n = \pi(\sigma^n(\underline{w}))$ とする。

1.1. $\underline{w}$が strictly preperiodic の場合。つまり$\underline{w}$じしんは periodic でないがある $n > 0$ に対し$\sigma^n(\underline{w})$ が periodic となる場合。$a_{-1} = \frac{1}{2}$とおく。$G : I \to I$を $n \geq -1$ に対し $G(a_n) = a_{n+1}$となるよう piecewise linear にとれば G は unimodal map で $k(G) = \{\underline{w}\}$ となる。

1.2. $\underline{w}$じしんが periodic な場合。同様に $n \geq 0$ で $G(a_n) = a_{n+1}$となるよう G を piecewise linear にとる。ただしこのときは$\underline{w}$の周期が p とすれば $k(G) = \{\underline{w}, w_1w_2\ldots w_{p-1}B\underline{w}\}$ である。

2. $\underline{w}$が eventually periodic でない場合。$E_1 = (\pi(\underline{w}), 1]$, $E_n = G^{-n+1}(E_1)$ とする。$\{E_n\}$ は互いに disjoint な開集合の族になり $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$とおくと Eは Iで dense な開集合。また $K = I \setminus E$は非加算集合である。Eは開区間の disjoint union になっているのでその各区間の端点を同一視することにより $K/\sim$は Iと同相になる。

$$
\begin{array}{ccc}
F\colon K & \longrightarrow & K \\
\downarrow & & \downarrow \\
G\colon I & \longrightarrow & I
\end{array}
$$

と G を定義すれば $k(G) = \{\underline{w}\}$ となる unimodal map である。

この 2 の場合について同値関係$\sim$がどのようなものか調べてみる。$E_1 = (\pi(\underline{w}), 1]$ なので $E_2 = (\pi(A\underline{w}), \pi(B\underline{w}))$ である。同じく E_nの 2^{n-2}個の成分である開区間は長さ $n-2$ の有限列 u に対し $(\pi(uA\underline{w}), \pi(uB\underline{w}))$ または $(\pi(uB\underline{w}), \pi(uA\underline{w}))$ となる。すなわち $x, y \in K$が $x \sim y$とはある有限列 u があって$\pi^{-1}(x) = uA\underline{w}$, $\pi^{-1}(y) = uB\underline{w}$ となることである。次節でみるようにこのような同値関係で記号力学系を割った商空間を self-similar set という。ここでの $I = K/\sim$はある self-similar set の部分とみなすことができる。

II. 準備その2 —self-similar sets.

定義　位相空間 Kとその上の連続写像の集まり $\{F_i\}_{i=1}^d$の組 $(K, \{F_i\}_{i=1}^d)$ が ***self-similar***であるとは連続な全射$\pi : \Sigma \to K$があって各 $i = 1, 2, \ldots, d$ に対し

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\pi} & K \\ {\scriptstyle\sigma_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_i} \\ \Sigma & \xrightarrow[\pi]{} & K \end{array}$$

となることである。ただし$\Sigma = \{1, 2, \ldots, d\}^{\mathbf{N}}$で$\sigma_i$は $x_1 x_2 \cdots \in \Sigma$を $i x_1 x_2 \ldots$にうつす写像である。

これは topological にはΣ上の同値関係で

$$\underline{x} \sim \underline{y} \Rightarrow \sigma_i(\underline{x}) \sim \sigma_i(\underline{y}) \text{ for all } i$$

を満たすものによる商空間$\Sigma/\sim$と定義しても同じことである。

以降,次の条件を満たすもののみを考える。

条件（1）$d = 2$。

（2）F_iは単射（$i = 1, 2$）。

（3）$F_1(K) \cap F_2(K)$ は一点。

（4）Kは距離付け可能。

（5）$p \in F_1(K) \cap F_2(K)$ は $F_1^{-1}(p) = F_2^{-1}(p)$ を満たす。この pを *connecting point* と呼び$\sigma(\pi^{-1}(p)) \in \Sigma$を *connecting sequence* と呼ぶ。これは力学系における **kneading sequence** に対応したものである。

この条件のもとで connecting sequence が等しい self-similar set は同相である。つまり topological には connecting sequence ですべてが定まる。Kは連結で単連結になる。さらに $x, y \in K$について x と yを結ぶ simple arc がただひとつだけある。そ

れを$[x,y]$とかく。また $G:K\to K$が存在して

$$\begin{array}{ccc}\Sigma & \xrightarrow{\pi} & K\\ {\scriptstyle\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle G}\\ \Sigma & \xrightarrow[\pi]{} & K\end{array}$$

これは F_1,F_2の逆写像になる。この Gを $(K,\{F_i\})$ の *dynamics* という。

もし p が G によって eventually periodic なら $D=\{G^n(p)\}_{n\geq 0}$が有限なので $T=\bigcup_{x,y\in D}[x,y]$は tree になり Tは G で不変である。つまり $G(T)\subset T$。一般には D は無限なので不変な tree が存在するかどうかはいえない。ところが前の節での考察より次のことがわかる。

定理 上の条件のもと, self-similar set $(K,\{F_i\})$ に対し connecting sequence が eventually periodic でない maximal な記号列なら Kのコンパクト部分集合 $I=[G(p),G^2(p)]$があって Iは pを含み $G(I)=I$となる。つまり不変な部分集合で単位区間と同相なものがある。

なお, connecting sequence が eventually preperiodic なときも主張は正しい。

III. 準備その3 —complex dynamics.

2次多項式写像の族 $f_c(z)=z^2+c$を考える。*Julia*集合 J_c, *Mandelbrot*集合 Mなどを次のように定義する。まず

$$K_c=\{z\in\mathbf{C}|f_c^n(z)\not\to\infty\quad(n\to\infty)\}$$

とし *filled-in Julia*集合とよぶ。Julia 集合を $J_c=\partial K_c$とする。Mandelbrot 集合は

$$M=\{c\in\mathbf{C}|J_c\text{が連結}\}$$

または同値な定義として

$$=\{c\in\mathbf{C}|f_c^n(0)\not\to\infty\quad(n\to\infty)\}$$

と定義する。

2 次多項式 f_cに対し無限遠点の近傍 U,Vがあって等角写像$\phi_c: U \to V$で

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi_c} & V \\ {\scriptstyle f_c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle z\mapsto z^2} \\ U & \xrightarrow[\phi_c]{} & V \end{array}$$

となるようなものが存在する。Uとしてできるだけ広い領域をとっておく。実際 $c \in \partial U$ となるようにできる。とくに $c \in M$のときは $U = \mathbf{C} \setminus K_c$になる。

半直線 $\{te^{2\pi i\theta} | t > 1\}$ をϕ_cでひきもどした l_θを角θの *external ray* という。$t \to 1$ のとき l_θが J_c上の点 zに収束すれば l_θが zに *land* するといい，θを zの *external angle* という。ただし複数の external ray がひとつの点に land することがあるので zの external angle はひとつに定まるとは限らない。

f_cの critical point 0 の orbit が有限のときつまり 0 が eventually preperiodic になるとき f_cを *postcritically finite* という。このとき $c \in M$となることに注意。f_cが postcritically finite のときはすべての external ray が land する。このようなときは $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ から J_cへの全射φ_cが自然にϕ_c^{-1}の拡張として定義される。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T} & \xrightarrow{\varphi_c} & J_c \\ {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_c} \\ \mathbf{T} & \xrightarrow[\varphi_c]{} & J_c \end{array}$$

ここで$\alpha(x) = 2x \pmod 1$ である。明らかに $z \in J_c$の external angle は$\varphi_c^{-1}(z)$ になる。$z \in J_c$の external angle を $A = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$ とすると $f_c(z)$ の external angle は $\{\frac{\theta}{2} | \theta \in A\}$。

とくに 0 が strictly preperiodic になるような c（これを Misiurewicz point とよぶ）に対しては 0 が（すなわち c も）J_cに含まれる。

$\mathbf{T}$ の点 x は有理数ならαの eventually periodic point になっているのだが，もっと詳しくいうと

xがαのperiodic point $\iff x = \dfrac{q}{p}$, p と qは互いに素で p は奇数

xがαのstrictly preperiodic point $\iff x = \dfrac{q}{p}$, p と qは互いに素で p は偶数

ゆえに $z \in J_c$が periodic ならその external angle は分母が奇数の有理数で, strictly preperiodic なら分母が偶数の有理数になる。逆も正しい。とくに Misiurewicz point c に対して J_cに関する c の external angle は分母が偶数である有理数となる。

$\Phi\colon \mathbf{C} \setminus M \to \mathbf{C} \setminus \overline{D}$を$\Phi(c) = \phi_c(c)$と定義すると等角写像になる。ここで $D = \{|z| > 1\}$。こちらにも同様に external ray, external angle などを定義することができる。つまり$\gamma_\theta = \Phi^{-1}(\{te^{2\pi i\theta}|t > 1\})$等とする。$\theta$が有理数のときは external ray は land する。θが分母が偶数のときは Misiurewicz point に land し, 分母が奇数のときには f_cが eigenvalue の絶対値が 1 となる周期点（ parabolic な周期点）を持つような c に land する。よって $\mathbf{T_Q} = \mathbf{T} \cap \mathbf{Q}$ とすると写像$\psi\colon \mathbf{T_Q} \to \partial M$が存在する。

ここで重要なことは J_cに関する external angle と Mに関する external angle が対応していることである。つまり c が Misiurewicz point のとき c での Mに関する external angle と J_cに関する external angle は一致し, f_cが parabolic な周期点を持つときは c での Mに関する external angle は J_cに関する external angle になっている。

postcritically finite な f_cの Julia 集合は $\mathbf{T}$ の連続像として表されることを見てきたがそれとは別の表し方もある。

定理　　postcritically finite な 2 次多項式 f_cに対し 0 が strictly preperiodic なら f_c^{-1}の branch F_1, F_2がとれて $\left(J_c, \{F_i\}_{i=1,2}\right)$は self-similar で前節の条件を満たす。

0 が periodic ならある self-similar set Kがあって $J_c = \rho(K)$ ただしρは有限個の点を除いて 1 対 1 の連続写像。この場合の Kは前節の条件（2）,（5）を満たさない。

なお, この定理は次数 dが 2 以上でも同様に成り立つ。その場合は 0 のかわりに $d-1$ 個の critical point について考えればよい。

後者の場合についてもう少し正確にいう。0 の周期を kとする。Uを 0 の immediate attracting basin とする。Uは単位円板と同型になる。∂U上に $f_c{}^k$の不動点がひとつだけあるのでそれを p とする。p の軌道を $P = \left\{p, f_c(p), \ldots, f_c^{k-1}(p)\right\}$とする。$J_c \setminus P$では f_c^{-1}の branch $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$がとれる。$K = (J_c \setminus P) \cup P' \cup P''$とする。ここで P', P''は Pのコピーで, Kの位相を適当にいれると$\tilde{F}_i$が $F_i\colon K \to K$に拡張できて $\left(K, \{F_i\}_{i=1,2}\right)$は self-similar になる。そして$\rho$を $x \in P$に対してその対応する P', P''

の点 x', x''を x にうつすようにとればよい。

self-similar set として表されるということは記号力学系Σの連続像として表されるということである。つまり Julia 集合 J_cの各点は記号列で書けることになる。ところで external angle がわかればそれがΣのどの記号列に対応しているかが計算できる。したがってそれを使えば J_c上の一点 zに land する external ray はどれとどれかということがわかることになる。

では Mandelbrot 集合 Mに関する external ray のどれとどれが同じ点に land するかというのはどうしたらわかるだろうか。$c, c' \in \partial M$について f_cと $f_{c'}$の力学系が同じなら（正確には qc-conjugate なら）$c = c'$である。力学系を見るには J_c上の力学系だけを見ればよく，さらには Hubbard tree と呼ばれる J_cの部分の上の力学系だけを見ればよい。だから同じ Hubbard tree を導くような external ray は同じ点に land することになる。

0 が strictly preperiodic なときは 0 が $(J_c, \{F_i\})$ の connecting point になっているので前節のように invariant な tree Tが存在する。この Tを（そのうえの力学系 $f_c|T$ もこめて）Hubbard tree という。Tを 0 でふたつの部分に分ける。$T = T_A \cup T_B \cup \{0\}$ ただし$\varphi_c(0)$を含むほうを T_Bとする。前々節と同じように $f_c|T$の kneading sequence を定めることができる。これは $(J_c, \{F_i\})$ の connecting sequence と一致している。もちろん dynamics G は $f_c|T$になる。しかし kneading sequence だけでは Hubbard tree は決まらないのである。kneading sequence ともうひとつ必要な情報は Tの $\mathbf{C}$ への埋め込まれ方である。実際 kneading sequence が同じでも $\mathbf{C}$ 上の力学系としては異なるものがある。そしてこのふたつが与えられれば f_cは完全に決まる。ゆえに external angle からこのふたつを求める方法を考えればよいことになる。

0 が periodic な場合も Hubbard tree を定義することができる。しかしこのときは J_cの部分ではなくもう少し別の方法を使う。詳しくは略すが同様に kneading sequence と Hubbard tree の埋め込まれ方で f_cが決まる。

IV. Main result

前節のような **external angle** という考え方を使えば区間力学系の **kneading sequence** の順序構造がわかりやすく理解され，それは **tree** 上の力学系の場合にも自然に適用できる。そのためにこの節では **Mandelbrot** 集合と **Julia** 集合の関係の中の **external angle** の構造だけをとりだしたものを考えることにする。以下 $\mathbf{T}$ の点を表す記号でθ等はパラメーター，t 等は相空間の点として使われる。

さきほどと同じく$\alpha\colon \mathbf{T}\to\mathbf{T}$ を $x\mapsto 2x \pmod 1$ とする。$\theta\in\mathbf{T}$ をひとつ固定したとき$\frac{\theta}{2}$と$\frac{\theta+1}{2}$で $\mathbf{T}$ をふたつの開区間に分け A_θ, B_θと名づける。ここで 0 を含むほうを B_θとする。また $C_\theta=\{\frac{\theta}{2},\frac{\theta+1}{2}\}$ とする。

定義　各点 $t\in\mathbf{T}$ に対しその *itinerary* を $i_\theta(t)=\{x_1x_2\ldots,y_1y_2\ldots\}$ とする。ただし

$$x_i=\begin{cases}A, & \alpha^{i-1}(I^+)\subset A_\theta\\ B, & \alpha^{i-1}(I^+)\subset B_\theta\end{cases}$$

$$y_i=\begin{cases}A, & \alpha^{i-1}(I^-)\subset A_\theta\\ B, & \alpha^{i-1}(I^-)\subset B_\theta\end{cases}$$

$I^+=(t,t+\varepsilon), I^-=(t-\varepsilon,t)$ は小さい開区間でεは i に依存して小さくしてよい。θ の *kneading sequence* を $k(\theta)=i_\theta(\theta)$ で定義する。

注意　ほとんどの場合$\#i_\theta(t)=1$である。$\#i_\theta(t)=2$ になるような t は $n\geq 0$ があって$\alpha^n(t)\in C_\theta$になるものに限られる。また$\alpha(t)=s$ なら$\sigma i_\theta(t)=i_\theta(s)$ である。

補題 1　θが有理数のとき，

t が有理数 $\Longleftrightarrow i_\theta(t)$ は eventually periodic 。

証明は略す。t が有理数でないときはなりたたない。実際無理数θで $i_\theta(\theta)$ が periodic になるものがある。しかし $i_\theta(\theta)$ が strictly preperiodic になるような無理数はない。

$\mathbf{T}$ 上に同値関係$\underset{\theta}{\sim}$を次で定義する。

$$i_\theta(t) \cap i_\theta(s) \Longrightarrow t \underset{\theta}{\sim} s$$

$$t \underset{\theta}{\sim} s, s \underset{\theta}{\sim} r \Longrightarrow t \underset{\theta}{\sim} R$$

この同値関係$\underset{\theta}{\sim}$で $\mathbf{T}$ を割った商空間 $\mathbf{T}/\underset{\theta}{\sim}$を K_θと書く。自然な全射$\tilde{\varphi}_\theta$: $\mathbf{T} \to K_\theta$によってα_θ: $K_\theta \to K_\theta$がαから導かれる。

K_θへのΣからの全射πが記号列を対応する点に送る写像として定義される。θが periodic でないとき$\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma$が$\pi(\underline{x}) = \pi(\underline{y}) = x \in K_\theta$ならある $n \geq 0$ があって $\alpha_\theta{}^n(x) = \varphi_\theta(\frac{\theta}{2})$ となるのでα_θ^{-1}の branch F_1, F_2が K_θ上にとれて $(K_\theta, \{F_i\}_{i=1,2})$ は connecting sequence $k(\theta)$ の self-similar set になる。ゆえにθが分母偶数の有理数のとき K_θは $J_{\psi(\theta)}$と同相になる。θが分母奇数の有理数のときも self-similar ではないが $J_{\psi(\theta)}$と同相。

こうしてθが有理数のときは

$$t \underset{\theta}{\sim} t' \Longleftrightarrow J_{\psi(\theta)}\text{に関する external ray } l_t, l_{t'}\text{は同じ点に land する}$$

となる。

補題 2　　$t_1 \underset{\theta}{\sim} t_3, t_2 \underset{\theta}{\sim} t_4$で t_1, t_2, t_3, t_4が $\mathbf{T}$ 上にこの順序に並んでいたとすれば $t_1 \underset{\theta}{\sim} t_2 \underset{\theta}{\sim} t_3 \underset{\theta}{\sim} t_4$。

K_θ上に順序を次のようにいれる。

$x \in K_\theta$に対しθとθ'を$\tilde{\varphi}_\theta^{-1}(x)$ の元のうち最小のものと最大のものとして閉区間 $I_x = [\theta, \theta']$を考える。ただし $x = \tilde{\varphi}_\theta(0)$ のときは $I_x = [0, 1]$とする。0 はどの点とも同値にならないので $x \neq \tilde{\varphi}_\theta(0)$ に対し I_xは 0 を含まない閉区間である。また補題 2 より $x, y \in K_\theta$に対し I_x, I_yは一方がもう一方に完全に含まれるかまたは共通部分を持たないことがわかる。

$$x \underset{\theta}{<} y \Longleftrightarrow I_x \supset I_y$$

と定義する。明らかに$\tilde{\varphi}_\theta(0)$ は最小元である。K_θの元 x, yで $x \underset{\theta}{<} y$となるものに対して interval $[x, y]_\theta$を $\{z | x \underset{\theta}{\leq} z \underset{\theta}{\leq} y\}$ で定める。これは有理数θに対して K_θに順序を定めたことにもなっている。

今まではθをひとつ決めたときの t に関する同値関係の話しであったが今度はθの同値関係について考える。

$\theta, \theta' \in \mathbf{T}$ が$\theta \sim \theta'$であるとは $k(\theta) = k(\theta')$ でありかつθ, θ'のαによる orbit は $(A_\theta \cap A_{\theta'}) \cup (B_\theta \cap B_{\theta'}) \cup C_\theta \cup C_{\theta'}$に含まれる。

補題 3　$\sim$は同値関係である。

補題 4　$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$がこの順序に $\mathbf{T}$ 上に並んでいて$\theta_1 \sim \theta_3, \theta_2 \sim \theta_4$なら $\theta_1 \sim \theta_2 \sim \theta_3 \sim \theta_4$。

補題 5　$\theta \sim \theta' \Longleftrightarrow \underset{\theta}{\sim} = \underset{\theta'}{\sim}$。

この$\sim$による同一視によりできる $P = \mathbf{T}/\sim$を組合わせ Mandelbrot 集合と呼ぶ。同一視する写像をΨ: $\mathbf{T} \to P$と書く。補題 5 から$\theta \sim \theta'$なら K_θと $K_{\theta'}$は同じものと思ってよい。そこでθのかわりに $c = \Psi(\theta) \in P$を使って$\underset{c}{\sim}, \tilde{\varphi}_c, K_c$などと書くこともある。

例 次のようなとき$\theta \sim \theta'$である。

$\forall n \geq 0 \quad \left|\alpha^n(\theta) - \frac{1}{2}\right| \geq \left|\theta - \frac{1}{2}\right|, \quad \theta' = 1 - \theta$

このときθが 2 進小数で $0.\omega_1\omega_2\ldots \quad (\omega_i = 0 \text{ or } 1)$ となったとするとその kneading sequence $k(\theta) = k(\theta')$ はθが non-periodic なら

$$k(\theta) = \{x_1 x_2 \ldots\}, \quad x_i = \begin{cases} A, & \text{if} \quad \omega_i\omega_{i+1} = 01 \text{ or } 10 \\ B, & \text{if} \quad \omega_i\omega_{i+1} = 00 \text{ or } 11 \end{cases}$$

θが periodic なら

$$k(\theta) = \{x_1 x_2 \ldots, y_1 y_2 \ldots\}, \quad x_i = y_i \text{ は同上 } (i \neq kn, k = 1, 2, \ldots)$$
$$x_{kn} = A$$
$$y_{kn} = B$$

となる。∎

$\theta \sim \theta'$なら任意の $n \geq 0$ に対し$\alpha_\theta^n(\theta) \underset{\theta}{\sim} \alpha_{\theta'}^n(\theta')$, $\alpha_\theta^n(\theta) \underset{\theta'}{\sim} \alpha_{\theta'}^n(\theta')$ なのでθとθ'は有理数なら同じ Hubbard tree を導く。よって

$$\theta \sim \theta' \Longleftrightarrow M\text{に関して}\gamma_\theta, \gamma_{\theta'}\text{は同じ点に land する}$$

K_θのときと同様に P上にも順序$<$を定める。この場合にも$\Psi(0)$ が最小元になる。

$c \in P$に対し $L_c = [\tilde{\varphi}_c(0), \tilde{\varphi}_c(\theta)]_c$とする。ただし$\theta$は$\Psi(\theta) = c$ となるもの。$x \in L_c$が *c-maximal* とは任意の $n \geq 0$ に対して$\alpha_c^n(x) \underset{c}{\geq} x$ となることとする。$M_c = \{x \in L_c | x \text{ は c-maximal}\}$ とおく。

定理　　$c \in P$に対し順序を保存する全単射λ: $M_c \to [\Psi(0), \Psi(c)]$が存在し $x \in M_c$が non-periodic なら$\tilde{\varphi}_c^{-1}(x) = \Psi^{-1}(\lambda(x))$, x が periodic なら$\tilde{\varphi}_c^{-1}(x) \supset \Psi^{-1}(\lambda(x))$ となる。

この定理が複素力学系としてはどういう意味を持っているかを系の形で説明しよう。$M_{\mathbf{Q}} = \psi(\mathbf{T_Q}) \subset \partial M$上にも Pのように順序$<$が定まる。$c \in M_{\mathbf{Q}}$に対し $M_c \subset J_c$ は上で定義したものと同じものである。$\mathcal{M}_c = M_c \cap \varphi_c(\mathbf{T_Q}) \subset J_c$とする。

系　　$c \in M_{\mathbf{Q}}$に対し順序を保存する全単射λ: $\mathcal{M}_c \to [\psi(0), c]_{M_{\mathbf{Q}}}$が存在し $z \in \mathcal{M}_c$が strictly preperiodic なら zの J_cおよび Mに関する external angle は一致する。zが periodic なら J_cに関する external angle は Mに関する external angle を含む。

これは第 1 節で述べた Milnor-Thurston の結果の拡張になっている。そしてこれはまた Mandelbrot 集合が Julia 集合をたくさん寄せ集めてできた形をしていることのひとつの現れになっている。実際, Mandelbrot 集合の順序が小さいところの順序構造は順序が大きいところの Julia 集合によって決まることが系よりわかる。また幾何学的には Mandelbrot 集合の形状について次のようなことがわかる。

系　　Misiurewicz point c について f_cの Hubbard tree Tが n 以上に分枝する点を持たなければ $c' < c$ となる c'で Mは n 以上に分枝しない。ここで集合 Xが $x \in X$で n 分枝するとは十分小さい単連結近傍 Uに対し $U \setminus \{x\}$ の連結成分の数が n になることである。

これはある点に external ray が n 本 land すればそこで n 分枝することからす

ぐにわかる。例えば M の実部分 $M \cap \mathbf{R}$ では Misiurewicz point において枝分かれしない。

REFERENCES

1. P. Collet and J.-P. Eckmann, "Iterated maps of the interval as dynamical systems," Birkhäuser, 1980.
2. A. Douady and J. H. Hubbard, *Etude dynamique des polynomes complexes.* Orsay, (1984–1985)
3. ———————, *On the dynamics of polynomial-like mappings*, Ann. Sci. École Norm. Sup. Paris **18** (1985), 287–343.
4. J. Milnor, *Self-similarity and hairness in Mandelbrot set*, in "Computers in geometry and topology," ed. by M. C. Tangora, Lec. Note in pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker.
5. ————, *Dynamics in one complex variables: introductory lectures*, SUNY Stony Brook Institute for Mathematical Sciences. preprint (1990)
6. J. Milnor and W. Thurston, *On iterated maps of the interval*, Lecture Note in Math., Springer-Verlag.
7. W. Thurston, *On the combinatrics of iterated rational maps.* preprint