数理解析研究所講究録
804巻 1992年 172-191

$\mathbb{C}^2$上の holomorphic vector fields とグラフ link の不変量について

愛知教育大　岡 伸篤 (Nobuastu Oka)

1. 序

原点の近傍 U で定義された複素常微分方程式 $\frac{dz}{dT} = Z(z)$, $Z(0)=0$ $T \in \mathbb{C}$ を考える。(ここで $Z(z)$ は、原点に特異点を持つ複素 Vector 場である。) この時、上記方程式の解は、原点を孤立特異点に持つ複素1次元の葉層 $\mathcal{F}_Z$ を U 上に与える。この葉層 $\mathcal{F}_Z$ の原点のまわりの状態は、多くの場合その線型部分の方程式 $\frac{dz}{dT} = A \cdot z$ $A = DZ(0)$ で決定される事が、Poincaré [12] Siegel [13], Brjuno [1] 等によって示されてきた。しかし、Vector 場の線型部分がいつでも葉層 $\mathcal{F}_Z$ を決定するわけではない。今、$\Lambda = \{\lambda_1 \cdots \lambda_n\}$ を A の固有値の集合とすると、$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} m_j \lambda_j$ $m_j \geq 0$ integer, $\sum_{j=1}^{n} m_j \geq 2$ という関係がある場合にそのような状態が起きる。特に、A の固有値のなす convex hull $\mathcal{H}(A) \subset \mathbb{C}$ が原点を含む場合は複雑で、原点の近傍での葉層 $\mathcal{F}_Z$ の位相的 type を決定することは重要な問題である。ここで、原点の近

傍での位相的typeを決定することは，原点の近傍の葉層$\mathcal{F}_Z$の葉を保存する位相同型写像による分類を与える事である。

特に$\mathbb{C}^2$の場合 $DZ(0)$の固有値が零でない場合，Dulac, Camacho, Neto Sad等によって分類が行なわれた。([6], [3] [2]参照。) それにともなって次に書くような位相不変量が発見されている。

$$\frac{dz}{dT} = Z(z) \qquad (z\in \mathbb{C}^2 \quad Z(0)=0 \quad T\in\mathbb{C})$$

$\lambda_1\ \lambda_2$を$DZ(0)$の固有値とすると

(a) λ_1/λ_2が有理数で$\lambda_1=\lambda_2$の場合 ZのJordan formが位相不変量

(b) $\lambda_1/\lambda_2>0$ $\lambda_1/\lambda_2 = n$ or $1/n$ の時 nが位相不変量

(c) $\lambda_1/\lambda_2<0$ $m\lambda_1+n\lambda_2=0$, $m,n>0$ の時は $Z(z)$は

$$(\lambda_1 z_1 + a z_1^{km+1} z_2^{kn} + R_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + (\lambda_2 z_2 + b z_1^{km} z_2^{kn+1} + R_2)\frac{\partial}{\partial z_2}$$

と書けてkとλ_1/λ_2が位相不変量 (ここで $R_1\ R_2$は $k(m+n)+1$ 以上のtermである。)

一方 $DZ(0)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$の場合については，その分類問題は複雑で未解決であるが，Camacho, Neto, Sadが[5]の中で，位相的typeを分類するための不変量として，Milnor numberを導入した。これは，一般の$\mathbb{C}^n$上のVector場の場合にも定義される。それは$\mu=\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_n/I$で定義される。ここで$\mathcal{O}_n$はholomorphic functionの原点のまわりのgerm全体のなす環でIはZの座標表示をした時の成分$Z_1\ Z_2 \cdots Z_n$で生成されるidealである。

我々は analytic surface の孤立特異点について定義される，もともとの Milnor number の概念を出発点として，$\mathbb{C}^2$ 上の原点の近傍で定義される複素 Vector 場の原点のまわりでの位相不変量を導入した。そのことについて報告する。

2，準備．

ここでは我々の定理を述べるのに必要ないくつかの定義等を述べる。なお詳細は，[3]，[4] [5] 等を参照して下さい。

定義1． 原点の近傍 U で定義された Vector 場 Z ($Z(0)=0$) について特異点 0 が simple とは，$D(Z)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ であり，$\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}_+$ であるか，$\lambda_1=0$ $\lambda_2\neq 0$（あるいは $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2=0$）の時に言う。ただし，$\mathbb{Q}_+$ は正の有理数の集合。$\lambda_1=0$ $\lambda_2\neq 0$ ($\lambda_1\neq 0$ $\lambda_2=0$) を零 simple と言う。

注意1． $\mathbb{C}^2$ 上の複素 Vector 場の孤立特異点で有限回 blowing-up をするとその特異点はすべて simple になる。

定義2，原点の近傍 U で定義された Vector 場 Z の原点での desingularization とは，有限回の blowing-up の，のちに定義される Vector 場の特異点がすべて simple 特異点となり，Z から導かれる葉層 $\mathcal{F}_Z$ のうち，原点を通る葉がこの blowing-up の後，あらたに生じた，$\mathbb{C}P^1$ の和集合と横断的に交わるようになった状態を言う。

注意2．原点を通る葉とdesingularizationによって生じた$\mathbb{C}P^1$たちとの交点はblowing upされたVector場のsimple特異点かまたは，通常点である。交点が通常点の時は，その$\mathbb{C}P^1$は，Vector場から定まる葉層の葉にはならない。

定義3．VをVector場から定まる葉層の葉とする。この時，$\bar{V}=V\cup\{0\}$となるならば，VをそのVector場のseparatrixと言う。

定義4．Vector場Zがdesingularizationされた時，新たに生じた$\mathbb{C}P^1$をintervalで表わし，$\mathbb{C}P^1$と$\mathbb{C}P^1$の交点，および，$\mathbb{C}P^1$とseparatrixとの交点をVertexで表示する。さらに，separatrixをarrowhead lineで表示したグラフをfinal resolution pictureと言う。なを，$\mathbb{C}P^1$とseparatricesが横断的に交わり，しかも交点が通常点になる場合，それらのseparatricesをarrowhead lineで書くかわりに$\mathbb{C}P^1$を表わすlineの方を二重line ═ で表示する。この═の部分をcritical componentと言う。

定義5．final resolution pictureのdualグラフをVector場のplumbing diagramと言う。即ち，上記グラフの交点をedgeにarrowhead lineをarrowheadに，二重lineを◎に，その他のlineをVertex ●で表わすグラフのことである。

注意3．グラフの同型写像によって一致するものはすべて同一のfinal resolution pictureとみなす。

定義6．Plumbing diagram の各 vertex には $\mathbb{C}P^1$ 上の $\mathbb{D}^2$ bundle とみた時の bundle のオイラー数を添加する。このオイラー数を vertex weight と言う。

注意4．2つの plumbing diagram が等しいとは グラフ同型写像が存在し，対応する vertex の weight が等しい時に言う。

定義7．複素 vector 場 Z が generalized curve であるとは，Z を desingularization した後，すべての特異点が non-zero simple になる時に言う。この時，critical component を持つものを，degenerate generalized curve と言い，critical component を持たないものを non degenerate generalized curve と言う。

3，主定理 とその証明の概略

以下我々の結果を述べる。なお，splice diagram の定義，およびその性質については[8][9][10]等を参照して下さい。

Theorem 1．Z を $\mathbb{C}^2$ の原点の近傍 U で定義された $Z(0)=0$ となる generalized curve とする。今 P_Z を Z の plumbing diagram とする。この時 P_Z から minimal splice diagram Γ_Z が定まる。更に，Γ_Z が表現する graph link を L_Z とすると，L_Z から決定される cohomology class $m_{L_Z} \in H^1(S^3-L_Z)$ の Thurston ノルムが Γ_Z から計算される。これを $\| m_{L_Z} \|$ とすると，$\| m_{L_Z} \|$ が位相不変量になる。ただし，Γ_Z の arrowhead vertex に対応する Weight は 1 と定義する。□

Theorem 2. Z, Z' を原点の近傍で定義された，原点を孤立特異点に持つ generalized curve とする。今 Z と Z' が topological equivalence であるとする。この時，Z (Z') から導かれる minimal splice diagram Γ_Z ($\Gamma_{Z'}$) を用いて計算される Alexander polynomial を Δ_{Γ_Z} ($\Delta_{\Gamma_{Z'}}$) とする。また，Z と Z' の plumbing diagram の critical component の個数を n_Z および $n_{Z'}$ で表わすと，n_Z と Δ_{Γ_Z} の対 (n_Z, Δ_{Γ_Z}) および $n_{Z'}$ と $\Delta_{\Gamma_{Z'}}$ の対 $(n_{Z'}, \Delta_{\Gamma_{Z'}})$ は，一致する。ただし Δ_{Γ_Z} ($\Delta_{\Gamma_{Z'}}$) は一変数 Alexander polynomial で，mod $\pm t^N$ ($N \in \mathbb{Z}$) で定義する。□

注意5. Theorem 1 において arrowhead が 1 つも存在しない時には norm を 0 で定める。

ここでは Theorem 1 の証明の概要を述べる。詳細は[11] を参照して下さい。

第一に，我々は，separatrices と原点を中心とする十分小さい 4 次元 ball の境界 S^3_ε との交点から構成される S^1 の集合に注目する。non-degenerate な generalized curve の場合は link が構成されており，degenerate な場合，無数の S^1 から構成される。いずれの場合も，このままでは，その状態が不明なので，Vector 場を desingularization させて，その final resolution picture を調べる。この時の final resolution picture は，そのグラフが

表わすplumbing 4-manifoldを表わしている。またその時のarrowheadは，plumbing 4-manifoldの境界である，3-manifold（この場合3次元球面）と，arrowhead lineが表示するリーマン面との交点から構成されるlinkを定義ていることになる。したがって，そのdual graphであるplumbing diagramもS^3内のlinkを表現する。ここでvector場から構成されるplumbing diagramがtreeであること，plumbing 4-manifoldのintersection formの，determinantが今の場合は±1であることに注意する。この時にはNeumannの方法[8]によって，plumbing diagramからsplice diagramを構成する事が可能となる。次に，Camacho，Neto，Sadの定理によって([4]，[5]，)separatricesが原点に特異点を持つanalytic curveであること，さらに，そのcurveに，普通の意味で，desingularizationをほどこした時，それにともなってvector場もdesingularizationされてしまうことが，示されているので，もし，ZとZ'にtopological equivalenceがあれば，ZおよびZ'から定義されるplumbing diagramは，グラフ同型になる。さらに，両グラフにblowing down operationをほどこして，同型なminimal plumbing diagramを決定することができる。したがって上記より，同型なminimal splice diagramが定義される。もちろん，この時のsplice diagramのさまざまなweightも一致していることがわかる。また，このsplice diagram

からは，diagramの表現するlinkのThurston normが，計算されるので，そのnormは一致する。ただし，degenerateなgeneralized curveの場合は，desingularizationをほどこした後に，nozero-simple singularityのseparatrixになる原点を通るcurveに対応するarrowheadのみからlinkを構成する。もしZとZ'にtopological equivalenceがあれば，その位相同型写像によって導かれる，graph同型写像によって，それらのarrowheadは，1対1に対応する。ただし，arrowheadが1つも存在しない場合は，normを0と定めるが，これも明らかにinvariantである。□

注意6．ここでblowing upすることでは，原点の近傍のうち，boundaryの状況には変化は，おきない。したがって，splice diagramは，もともとのseparatricesと原点の近傍の閉包の境界S^3_εとのintersectionの作るS^1の集合の一部分，またはそのすべてを表わしている。このことから，上記のsplice diagramから計算されるnormは，上記のS^1で構成されるlinkのnormをはかっている。特に，non-degenerate generalized curveの場合は，separatricesとS^3_εの交点のなすlinkのnormになっている。

注意7．ZがHamiltonianの場合，それはnon-degenerateな場合のgeneralized curveになることが知られており，しかもその葉層は$\dot{x}=-f_y$　$\dot{y}=f_x$とした時のcurve $f=0$に関するMilnor fibration

と一致しているので，この時の Thurston norm は curve の場合の Milnor number を決定していることに他ならない。

4, $\mathbb{C}^2$ 上定義された原点に孤立特異点を持つ一般の複素 Vector 場の場合.

上記の定理 1, 2 は，一般の場合についても成立する。ここです，その事について述べる。そのために，もう少し準備をする。

定義 8. $\mathbb{C}^2$ 上の Vector 場の algebraic multiplicity とは，Z を原点のまわりで Taylor 展開して，

$$\begin{cases} \dot{x} = a_\nu(x,y) + R_1(x,y) \\ \dot{y} = b_\nu(x,y) + R_2(x,y) \end{cases}$$

となった時，その first non zero jet $(a_\nu(x,y), b_\nu(x,y))$ の次数 ν の事である。

proposition 1. Z, Z' を原点に孤立特異点を持つ Vector 場とする。もし，Z と Z' が topological equivalence とするならば，Z と Z' の定める minimal plumbing diagram は一致する。

注意 8. Z と Z' が一般の場合は，topological equivalence があったとしてもその plumbing diagram はグラフ同型になるとは言えない。

proposition 1 の証明.

Z および Z' の separatrices を S, S' とする。今，S と S' が，

desingularization されたとする。この場合まったく，同じ回数で desingularization される。その回数を k 回として その状態の Vector 場を Z, Z' に対応して $Z^{(k)}$, $Z'^{(k)}$ と書く。この時の $Z^{(k)}$, $Z'^{(k)}$ の特異点の状況を調べる。

Case (1) $Z^{(k)}$（および $Z'^{(k)}$）に関して invariant な $\mathbb{C}P^1$ 上に生じる特異点について．

$Z^{(k)}$ ($Z'^{(k)}$) の定める葉層を $\mathcal{F}_Z^{(k)}$ ($\mathcal{F}_{Z'}^{(k)}$) とすると，もし $\mathcal{F}_Z^{(k)}$ が $\mathbb{C}P^1$ と横断的に交われば $\mathcal{F}_{Z'}^{(k)}$ と $\mathbb{C}P^1$ も対応して，横断的に交わっている。その場合，Camacho [5] の Lemma 1 によって，その algebraic multiplicity は 1 であることがわかる。この時の固有値 $\lambda_1^{(k)}$, $\lambda_2^{(k)}$ および $\lambda_1'^{(k)}$ $\lambda_2'^{(k)}$ はいずれも zero ではなく，$m\lambda_1^{(k)} = n\lambda_2^{(k)}$ $m, n \in \mathbb{N}$ なる関係を持てない。なぜならば，そのような関係があれば，この特異点に関する separatrices が 1 個だけか無数にあることになり いずれも 2 つだけ持つことに反する。したがって non-zero simple になっている。この場合，plumbing diagram の間の同型写像によって 2 つの対応する特異点の separatrix を示す，arrowhead の間に対応がつく。次に $\mathbb{C}P^1$ 上に $Z^{(k)}$ の zero-simple singularity があらわれたとする。この時，位相同型写像で対応する $Z'^{(k)}$ の invariant な $\mathbb{C}P^1$ 上には zero simple singularity が存在している保障はない。zero simple singularity には必ず Vector 場に関して invariant になる特異点を通過する curve を持っている。

（[5]を参照。）したがって，そのinvariant curveは$\mathbb{C}P^1$に含まれていなければならない。なぜならば，そうでないとすると，$Z^{(k)}$でinvariantな互に横断的に交わるcurveが2本存在していることになり，zero simple singularityに反する。したがって，minimal plumbing diagramに対してそのような特異点はなんら影響を与えない。したがって，$Z^{(1)}$と$Z^{(2)}$のzero simple singularityが別に位相同型写像で対応する必要がない。次に，もし，$\mathbb{C}P^1$上に$Z^{(k)}$がnormal formで書いた時に，$\dot{x}=\lambda_1^{(k)}x$ $\dot{y}=\lambda_2 y+\alpha x^p$ for $p\in\mathbb{N}$の型のsingularityを持つとする。この場合も対応して$Z^{(2)}$にそのようなsingularityが存在する保障はない。しかし，この場合もそのような特異点は1本のseparatrixを持つことがわかるので，それは上と同様に$\mathbb{C}P^1$に含まれていなければならない。この場合はdesingularizationを$Z^{(k)}$のその特異点に関して続けて行なわなければならない。しかし，その際，新しいarrowhead lineは出現しないので，blowing down operationをほどこして，そのような特異点が$\mathbb{C}P^1$上に存在しない場合のグラフに帰着される。したがって，minimal plumbing diagramのレベルではそのような特異点が存在してもしなくてもグラフの同型には影響がない。

Case (2)　$\mathbb{C}P^1$と$\mathbb{C}P^1$の交点に現われる特異点について，

$Z^{(1)}$にあらわれる$\mathbb{C}P^1$と$\mathbb{C}P^1$の交点は同じ数だけ対応して，

$Z^{(k)}$にもあらわれる。その交点は次の2種類に分けられる。

(1) 一方の$\mathbb{C}P^1$がinvariantでもう一方の$\mathbb{C}P^1$がcritical componentの場合

(2) 両方の$\mathbb{C}P^1$がinvariantな場合

$Z^{(k)}$と$Z'^{(k)}$を対応させる位相同型写像のもと，(1)の交点は(1)に，(2)の交点は(2)に対応する。(1),(2)のいずれについても$Z^{(k)}$および$Z'^{(k)}$のseparatrixがその交点を通過することはない。(1)の場合，交点は$Z^{(k)}$の特異点でないから対応する$Z'^{(k)}$でも特異点ではない。(2)の場合は，交点はnon-zero simple singularityである。

Case (3) critical componentの$\mathbb{C}P^1$上に出現する特異点について，

$Z^{(k)}$のcritical componentは，同型写像のもと，$Z'^{(k)}$のcritical componentに対応する。今，この$\mathbb{C}P^1$上に$Z^{(k)}$の特異点が存在するとそのseparatrixにそう方向のalgebraic multiplicityが，Camacho [5] の Theorem 1によって零になる。したがって，その交点は特異点ではない。したがってcritical component上には$Z^{(k)}$の特異点は存在しない。よって対応する$Z'^{(k)}$にも特異点は存在しない。以上の考察より，Z, Z'の2つのminimal plumbing diagramは一致する。□

系. Z, Z'をproposition 1と同じ2つのVector場とする。ZとZ'がtopological equivalenceとすると，Z, およびZ'の

minimal splice diagram は一致する □

この系と，Theorem 1 および Theorem 2 の証明を適用すれば，Theorem 1，Theorem 2 に対応する結果が得られる。ここでは Theorem 2 に対応する結果のみを書く．

Theorem 3. Z, Z' を $\mathbb{C}^2$ 上の holomorphic vector 場とし，ともに原点を孤立特異点に持つとする。この時，Z および Z' が topological equivalent ならば，minimal splice diagram Γ_Z および $\Gamma_{Z'}$ が同型となり，Theorem 2 と同じ対 (Δ_{Γ_Z}, n_Z) と $(\Delta_{\Gamma_{Z'}}, n_{Z'})$ が一致する。 □

5, holonomy と splice diagram について，

この章では holonomy を考慮した splice diagram について考察する。vector 場を desingularization した時，non-zero simple singularity の中で，その固有値の比が負の有理数になっているものに注目する。即ち，$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = 0$ $(m_1, m_2 \in \mathbb{N})$ となっている 2 つの固有値 λ_1, λ_2 を持つ singularity である。この時 final resolution picture に対応する，$\mathbb{C}P^1$ 上の Disk bundle の fiber を十分小さくとって，その non-zero simple singularity の十分近傍の $\mathbb{C}P^1$ 上と，separatrix 上に十分小さい circle をとり，その上にフェンス $\mathbb{D}^2$ をたて，holonomy を調べる。（図 1 参照） ここで，$\widetilde{\mathcal{F}}$ を desingularization した vector 場によって導かれる final resolution picture の表現する plumbed 4-manifold 上の葉層とす

る。$\widetilde{\mathcal{F}}$の葉に接する実1次元力学系でMorse-Smale typeとなるものが構成できるから([3]参照)$\widetilde{\mathcal{F}}$は，このフェンスに横断的に交わっている。このフェンスは位相的には，solid torusになりこの中に実1次元力学系(葉層)が定義される。holonomyは各non-zero simpleなsingularityのまわりで調べていけばよいから，線型部分を持つ複素Vector場のresonance条件$m_1\lambda_1+m_2\lambda_2=0$を持つ場合の同様なフェンス上の実1次元力学系のholonomyを調べることに帰着する。これらについては，Camacho, Neto, Sadたちによりよく研究されている。([2], [3]参照)。

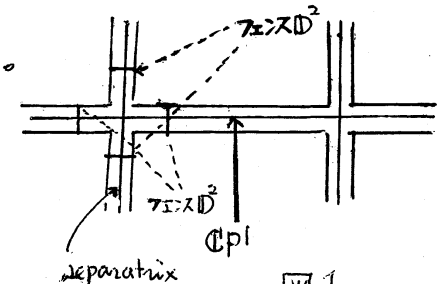


図1

このsolid torus内の1次元力学系が定めるholonomy写像は次の補題の形で書けることがよく知られている。

Lemma 1. $\frac{dz}{dT}=Z(z)$ $z=(z_1,z_2)$, $DZ\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ $m_1\lambda_1+m_2\lambda_2=0$ $(m_1, m_2\in\mathbb{N})$となる常微分方程式を考える。γを原点を中心とした$z_1=0$上のcircleとする。このcircle上にフェンスD^2をたてると，Zにより導かれた葉層$\mathcal{F}_Z$は，このsolid torus内に1次元葉層Xを定義する。この時．γの近傍のXによるholonomy写像をfと定義すると $f(z)=\mu_1 z+Az^{kn+1}+\cdots\cdots$ と書ける。ただし$\mu_1=\exp 2\pi\lambda_2/\lambda_1 i$である。同様に，$z_2=0$上の原点を中心とする十分小さいcircle γ'をとり，holonomy写像をgで定義すると，$g(z)=\mu_2 z+Bz^{km+1}+\cdots$ となる。ただし$\mu_2=\exp 2\pi\lambda_1/\lambda_2 i$である。

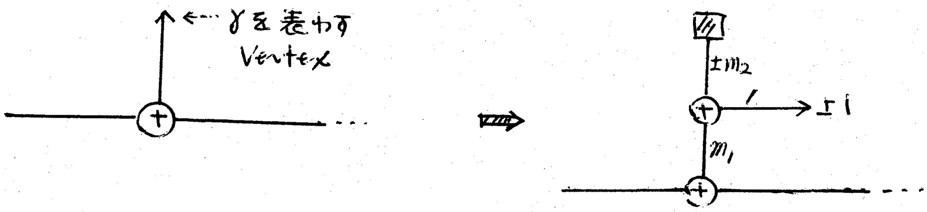
ただし，m，k，n は $\frac{dz}{dT}=Z(z)$ の normal form を $\begin{cases} \frac{dz_1}{dT}=\lambda_1 z_1 + a z_1^{km+1} z_2^{kn} + R_1 \\ \frac{dz_2}{dT}=\lambda_2 z_2 + a z_1^{km} z_2^{kn+1} + R_2 \end{cases}$

とした時の係数から求められるものである。□

更に Camacho [2] の定理によって f は次の形のいずれかの normal form と位相共役である。

$f_{normal}(z)=\lambda z(1+z^{km_1})$ あるいは，$f_{normal}(z)=\lambda z$。ただし，$\lambda=\exp(-m_1/m_2)2\pi i$ である。次に，f_{normal} の iteration を考える。この時，$\bigcap_{p\in\mathbb{Z}}(f_{normal}^{m_2})^p(D^2)-\{0\}$ は $2km_2$ 個の連結成分にわかれる。（図2参照）この連結成分に注目する。1つの連結成分に含まれる点を z_0 として，z_0 に次々に f_{normal} の iteration を行うと，z_0 に f_{normal} の線型部分を iterate した時に次々に含まれていく連結成分と同じ部分の連結成分に含まれていく。ここで f_{normal} の線型部分は周期写像であるから，$f_{normal}^{m_2}(z_0)$ をみると z_0 と同じ連結成分に含まれる。z_0, $f_{normal}(z_0)$ $f_{normal}^2(z_0)\cdots\cdots f_{normal}^{m_2}(z_0)$ を次々に X の orbit を利用して結び，更に z_0 と $f_{normal}^{m_2}(z_0)$ を，1つの連結成分内の arc で結べば，X の orbit の γ のまわりでの近似が得られる。これは，γ 上の $(m_1 \pm m_2)$ cable になっている。また，blowing up する点 a の近傍を U とする。U を a で blowing up したものを $\tilde{U}$ とする。このとき，$\tilde{U}-\mathbb{C}P^1$ 上の葉層と，$U-\{a\}$ の葉層とは，位相同型になっている。したがって，a の separatrix 上に存在する circle にフェンスをたてた時，そのフェ

ンス上での力学系は final resolution picture に対応する plumbed 4-manifold 上でのフェンス $S^1\times D^2$ の力学系と位相同型となる。しかも，F_ε 上に Morse-Smale 型の1次元力学系が存在していることに再び注意すると，$\partial U = S^3_\varepsilon$ と separatrix の交点によって作られる link の S^3_ε 内での近傍における1次元力学系ともみなせる。したがってその holonomy も final resolution picture 上で考えているものとも位相共役である。したがって minimal splice diagram におけるこの separatrix に対応する arrowhead vertex に対し $(m_1\pm m_2)$ cable operation をほどこす。つまり，

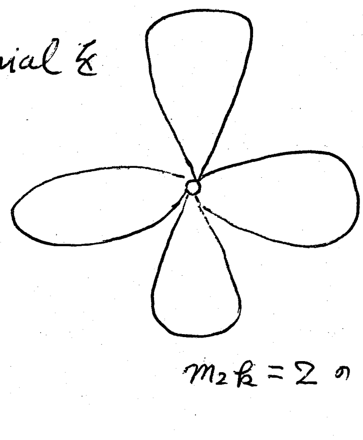


となる。

ここで ▨ は γ に対応する arrowhead vertex を表わす。

固有値の比が $\mathbb{Q}$ になるすべての arrowhead vertices に今の cable operation をほどこす。このようにして定義された minimal splice diagram も位相不変である。

図2



$m_2 k = 2$ の場合

次に，この diagram から Alexander polynomial を読みとりこれを $A(t,t^{-1})$ と表わすと，これが原点のまわりの位相不変量になる。

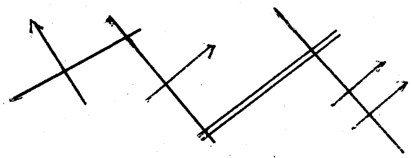
位相不変になることの証明には，今までの minimal splice diagram が位相不変になることに加えて，$\lambda_1/\lambda_2 = -m_1/m_2 \in \mathbb{Q}_-$ の場合 m_1, m_2 が topological invariant になる事をみればよい。なぜならば U 上の Z および Z' が位相同型ならば，それを blowing up した $\tilde{U}$ 上の $\tilde{Z}$ および $\tilde{Z}'$ の位相同型が $\tilde{U}-\mathbb{C}P^1$ 上では自然に $U-\{0\}$ の位相同型から定まるからである。Z と Z' が flow equivalence ならば holonomy map f と f' が位相共役になる事に注意する。後は，Camacho の proposition [3] の証明を繰り返すことによって，上記の m_1, m_2 は位相不変になることがわかる。ここでは，簡単に証明を繰り返すことにする。つまり Z および Z' が線型部分をもつ場合に帰着される。ただし $DZ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $DZ' = \begin{pmatrix} \lambda_1' & 0 \\ 0 & \lambda_2' \end{pmatrix}$ で $\lambda_1/\lambda_2 = m_1/m_2$ $\lambda_1'/\lambda_2' = m_1'/m_2'$ とする。今，f と f_{normal} は位相共役より $A f A^{-1} = f_{normal}$ である。

$\bigcap_{p=-\infty}^{p=+\infty} f^{m_2 p}(\mathbb{D}^2) - \{0\} = \bigcap_{p=-\infty}^{p=+\infty} A f_{normal}^{m_2 p} A^{-1}(\mathbb{D}^2) - \{0\}$ は，同じ個数の component を持つ。しかも f と f' が位相共役より，f' についても $\bigcap_{p=-\infty}^{p=+\infty} f_{normal}^{m_2 p}(\mathbb{D}^2) - \{0\}$ と同じ個数の component にわかれる。したがって $f'^{m_2'}(p)$ と p は同じ component にもどったとすれば $f^{m_2'}$ でも同じ component にもどっている。よって，$m_2' = m_2 k$ $k \in \mathbb{Z}$ 同様に $m_2 = m_2' k'$ $k' \in \mathbb{Z}$ も言える。したがって $m_2 = m_2'$ holonomy g についても同じことが言えて，$m_1 = m_1'$ も言える。□

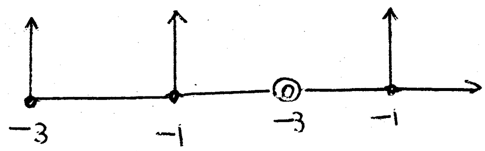
最後に具体的な例について計算した結果を述べる。

例
$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 y \\ \dot{y} = x^9 + y^4 + 2x^3y^2 \end{cases}$$

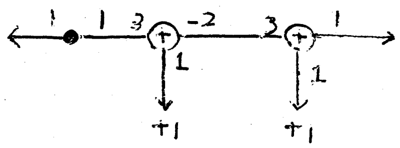
final resolution picture



plumbing diagram



splice diagram



Thurston norm

18

対

$$(\ t^{-2}(t^{10}-1)(t+1)(t-1)^2,\ 1\ )$$

参考文献

[1] A.D. Brjuno, *Analytic form of differential equations*, Trans. Moscow Math. Soc. 25 (1971).

[2] C. Camacho, On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^2$, Asterisque 59-60, (1978) 83-94.

[3] C. Camacho and P. Sad Classification and Bifurcations of holomorphic flows with resonances in $\mathbb{C}^2$, Invent. Math. 67, (1982) 447-472

[4] C. Camacho and P. Sad Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, Ann. of Math. 115, (1982) 579-595.

[5] C. Camacho, A. L. Neto and P. Sad, Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields, J. Differential Geometory 20 (1984) 143-174.

[6] H. Dulac. Recherches sur les points singularities de equations differentielles, J. Ecole polytechnique 2, (1904) 1-125.

[8]. D. Eisenbud, and W. D. Neumann, Three-dimentional link theory and invariants of plane curve singularities Ann. Math. Studies 101 princeton Univ. press.

[9] W. D. Neumann Complex algebraic plane curves via their links at infinity Invent. Math. (1989) 445-489.

[10] W. D. Neumann On the topology of curves in complex surface, Topological methods in algebraic transformation groups, proceedings of a conference at Rutgers University, Progress in Math. Vol. 80, 1989.

[11] N. Oka On holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^2$ and invariants of the graph links, preprint.

[12] H. Poincaré Sur les propriétés des fonctions definies par les équations aux différences partielles, Thèse, paris (1879).

[13] C. L. Siegel Über die normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung Nachr Akad. Wiss. Gottingen Math. Phys. 21-30 (1952)