

公理A系に対する Poisson 法則

東大・数理科学 平田 雅樹 (Masaki Hirata)

§1 問題と主定理.

M をコンパクト C^∞ Riemann 多様体, $f: M \rightarrow M$ を公理 A 微分同相写像とする。その非遊走集合 Σ を Ω で表わし, $f|_\Omega$ は混合的であると仮定する。Lipschitz 連続関数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ をポテンシャルとしてとり, u に対する平衡状態 (つまり, $P(u) = h_\mu(f) + \int u d\mu$, $P(u)$ は位相的圧力, $h_\mu(f)$ は測度論的エントロピー, μ が f -不変測度) $\mu = \mu_u$ とする。今の設定の下では, 平衡状態は一意的に存在して, Gibbs 測度と一致することは, よく知られた結果である。

$z \in \Omega$ を固定し, $U_\varepsilon(z)$ を z の ε -近傍とする。 $U_\varepsilon(z)$ 上の確率測度として, 平衡状態 μ の $U_\varepsilon(z)$ への制限:

$$\mu_\varepsilon := \frac{\mu|_{U_\varepsilon(z)}}{\mu(U_\varepsilon(z))}$$

ε とする。 $x \in U_\varepsilon(z)$ から $U_\varepsilon(z)$ に戻りまでの再帰時間を

$$T_\varepsilon(x) := \inf \{ i \in \mathbb{N}^+ ; f^i x \in U_\varepsilon(z) \}$$

と書き、また k 回目の再帰時間を $T_\varepsilon^{(k)}(x)$ と書く。

$$\text{i.e. } T_\varepsilon^{(1)}(x) := T_\varepsilon(x)$$

$$T_\varepsilon^{(k+1)}(x) := T_\varepsilon^{(k)}(x) + T_\varepsilon(f^{T_\varepsilon^{(k)}(x)} x) \quad k=1, 2, \dots$$

$T_\varepsilon^{(k)}$ は μ_ε -a.e. x について有限であるが、 $\varepsilon \rightarrow 0$ としたとき発散するのだから、 T_ε の平均 $E_{\mu_\varepsilon}[T_\varepsilon]$ で規格化することにする。つまり、規格化長回再帰時間：

$$C_\varepsilon \cdot T_\varepsilon^{(k)} \quad C_\varepsilon := 1 / E_{\mu_\varepsilon}[T_\varepsilon]$$

を考へるとき、 $\varepsilon \rightarrow 0$ での極限分布がどうなるか？ を考へた。

この問題を考へるために、次のような Counting measure (\mathbb{R}^+ 上の \mathbb{N}^+ -値 Radon 測度) を用意しよう。

$$Y_{\varepsilon, x} := \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{C_\varepsilon T_\varepsilon^{(k)}(x)}$$

ここで、 δ_p は $p \in \mathbb{R}^+$ での Dirac の δ -測度。

\mathbb{R}^+ 上の点過程 $Y_{\varepsilon, \cdot}$ を規格化再帰時間過程と呼ぶことにする。

先の問題は、 $Y_{\varepsilon, \cdot}$ の $\varepsilon \rightarrow 0$ での極限を考へる問題となる。

上述の問題に対する答えとして、次の主定理を得た。

主定理

μ_ν -a.e. $z \in \Omega$ に対し、規格化再帰時間過程の有限次

元分布は、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の Poisson 点過程の有限次元分布に収束する。つまり、任意の非負整数 k_1, \dots, k_m と互いに交わらない \mathbb{R}^d 上の任意の Borel 集合 B_1, \dots, B_m に対し、次式が成立する：

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon(\{x \in U_\varepsilon(z) ; Y_{\varepsilon,x}(B_1) = k_1, \dots, Y_{\varepsilon,x}(B_m) = k_m\}) \\ = \prod_{i=1}^m \frac{Q(B_i)^{k_i}}{k_i!} e^{-Q(B_i)} \end{aligned}$$

ただし、 Q は Lebesgue 測度。

上の定理で「 μ -a.e. $z \in \Omega$ について」は本質的である。実際、 $z \in \Omega$ が周期点であるとき、次の反例が成り立つ。

反例

$z \in \Omega$ を周期 m の周期点とする。このとき、規格化 1 回再帰時間 $C_\varepsilon T_\varepsilon^{(1)}$ の $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限分布は δ -分布と指数分布の線型結合となる。つまり、

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon(\{x \in U_\varepsilon(z) ; C_\varepsilon T_\varepsilon^{(1)}(x) < t\}) &= 1 - \rho_z + \rho_z (1 - e^{-\rho_z t}) \\ &= z, \quad \rho_z := 1 - \exp\{u(z) + u(fz) + \dots + u(f^{m-1}z)\} \end{aligned}$$

次節以下で主定理の証明のアウトラインについて述べるが、非遊走集合 Ω には (有限) Markov 分割が存在するので、

問題は本質的には記号力学系 Σ_A の問題に帰着できる。そこで、この報告では主に片側記号力学系 Σ_A の問題を考えたことにする。

§2 準備

$J = \{1, \dots, r\}$ を有限集合、 $A = (A_{ij})_{i,j=1,\dots,r}$ を既約な構造行列とする。配置空間 Σ_A^+ を

$$\Sigma_A^+ := \{x = \{x_i\}_{i=0}^{\infty} \in J^{\mathbb{N}}; Ax_i x_{i+1} = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}\}$$

で定義し、 Σ_A^+ 上のシフト σ で表す。(i.e. $(\sigma x)_i = x_{i+1}$)

$0 < \theta < 1$ を固定し、 Σ_A^+ 上の距離 $d = d_\theta$ を次のように導入する。

$$d_\theta(x, y) = \theta^n \quad \text{if } x_i = y_i \quad i=0, \dots, n-1, x_n \neq y_n.$$

Σ_A^+ 上の距離に関する Σ_A^+ 上の実数値 Lipschitz 連続関数の集合

を $\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ と書く。ノルム $\| \cdot \|_\theta := \| \cdot \|_\infty + \| \cdot \|_\theta$ ($\| \cdot \|_\infty$ は f の Lipschitz 定数) に関して、 $\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ は

Banach 空間になる。

ポテンシャル $u \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ に対する Ruelle 作用素 \mathcal{L}_u :

$\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+) \rightarrow \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ は次のように定義される。

$$\mathcal{L}_u f(x) = \sum_{\sigma y = x} e^{u(y)} f(y).$$

この作用素のスペクトルについては、次の基本的結果が知られている。

定理 (Ruelle)

L_u のスเปクトル半径は $e^{P(u)}$ であり、これは単正な固有値であり、対応する固有関数は正値関数である。

ここで、 $L_u 1 = 1$ なる仮定を置くことにする。これは一般性を失わない仮定であり、また、 $\rho(u) = P(u) = 0$ とする。

$u \in \mathcal{F}_0(\Sigma_A^+)$ に対する平衡状態 (i.e. $\mu(u) = \rho_\mu(u) + \int u d\mu$ を満たす σ -不変確率測度) を $\mu = \mu_u$ で表わす。この測度に関して以下が成立する。

$$\int L_u f \cdot g \, d\mu_u = \int f \cdot g \circ \sigma \, d\mu_u \quad \forall f, g \in \mathcal{F}_0(\Sigma_A^+).$$

4.2. 記号力学系 $(\Sigma_A^+, \sigma, \mu_u)$ に対して問題を設定する。まず、 $z \in \Sigma_A^+$ を固定し、 $\varepsilon > 0$ の近傍 I の筒集合

$$[z]_N := \{x \in \Sigma_A^+; x_i = z_i \quad i=0, 1, \dots, N-1\}$$

をとる。 $[z]_N$ 上の確率測度 μ_N を

$$\mu_N := \frac{\mu_u|_{[z]_N}}{\mu_u([z]_N)}$$

と定め、 $x \in [z]_N$ に対して σ による $[z]_N$ への再帰時間を $T_N(x)$ と書く。(i.e. $T_N(x) := \inf \{i \in \mathbb{N}^+; \sigma^i x \in [z]_N\}$)

ここで、次の特異摂動 (Ruelle 作用素) $\tilde{L}_N : \mathcal{F}_0(\Sigma_A^+) \rightarrow \mathcal{F}_0(\Sigma_A^+)$ を定義する。

$$\tilde{\mathcal{L}}_N f(x) := \mathcal{L}_u (1_{[z]_N^c} \cdot f)(x)$$

$1_{[z]_N^c}$ は $[z]_N$ の補集合の定義関数。

簡単な計算から次の補題が成立する。

補題

$$\mu_N(\{x \in [z]_N; T_N(x) = i\}) = \int \tilde{\mathcal{L}}_N^{i-1} (\mathcal{L}_u 1_{[z]_N}) d\mu_N$$

すなわち、最初に問題となるのは、規格化再帰時間 $C_N T_N$ ($C_N := 1/E_{\mu_N}[T_N]$) の $N \rightarrow \infty$ での極限分布である。と

すなわち、 $C_N T_N$ の Laplace 変換 $\varphi_N(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \varphi_N(\alpha) &:= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha C_N i} \mu_N(T_N = i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha C_N i} \int \tilde{\mathcal{L}}_N^{i-1} (\mathcal{L}_u 1_{[z]_N}) d\mu_N \end{aligned}$$

の $N \rightarrow \infty$ での極限を調べたいが、このためには $\tilde{\mathcal{L}}_N$ のスペクトル、特に絶対値最大固有値 α の $N \rightarrow \infty$ での漸近挙動が問題となる。

§3 $\tilde{\mathcal{L}}_N$ のスペクトル

Ruelle 作用素 \mathcal{L}_u を解析的に摂動した作用素のスペクトルについては、Ruelle, Pollicottらによりよく調べられているが、特異摂動した作用素である $\tilde{\mathcal{L}}_N$ に対しては、それらの結果を直接使うことはできない。そこで具体的に $\tilde{\mathcal{L}}_N$ の

スペクトルの性質を調べることがある。この構造について、
まず次の結果を得た。

命題

円環領域 $\Pi_\theta := \{t \in \mathbb{C}; \theta < |t| \leq 1\}$ 内の $\tilde{\mathcal{L}}_N$ のスペクトルは、有限多重度の孤立した固有値のみからなる。(これを $\{\lambda_N^{(j)}\}$ と書く)

次に問題となるのは $\tilde{\mathcal{L}}_N$ の絶対値最大固有値 (これを $\tilde{\lambda}_N$ と書く) の $N \rightarrow \infty$ での漸近挙動である。これを調べるためには、いくつかの準備が必要である。

まず、 $\zeta(t) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を形式的に次式で定義する:

$$\zeta(t) := \exp \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^p}{p} \sum_{x \in \text{Fix}_p \sigma} e^{S_p u(x)} \right\}$$

$$= \sum_{x \in \text{Fix}_1 \sigma} e^{u(x)} + \sum_{x \in \text{Fix}_2 \sigma} e^{u(x) + u(\sigma x)} + \dots$$

これは、Ruelle - Artin - Mazur のゼータ関数と呼ばれ、 ζ の極と Ruelle 作用素 \mathcal{L}_u の固有値との間に次の関係が知られている。

定理 (Ruelle)

円環領域 Π_θ 内の \mathcal{L}_u の固有値を $\{\lambda^{(j)}\}$ と書き、 $\lambda^{(j)}$ の多重度を m_j とする。このとき、 $1/\lambda^{(j)}$ は円環領域 $\Pi_\theta' := \{t \in \mathbb{C}; 1 \leq |t| < \theta^{-1}\}$ 内の $\zeta(t)$ の位数 m_j の極である。

る。逆も成立する。

次に形式的冪関数 $\tilde{\zeta}_N(t) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を次で定義する:

$$\tilde{\zeta}_N(t) := \exp \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^p}{p} \sum_{\gamma \in \text{Fix}_p \sigma} e^{\text{Sp}U(\gamma)} \prod_{j=0}^{p-1} 1_{[\gamma]_N}(\sigma^j \alpha) \right\}$$

この関数の極と、 $\tilde{\zeta}_N$ の固有値との間に、先の Ruelle の定理と同様の関係が成立する。

命題

円環領域 Π_θ 内の $\tilde{\zeta}_N$ の固有値 $\lambda_N^{(j)}$ の多重度を m_j とすると、 $1/\lambda_N^{(j)}$ は円環領域 Π_θ' 内の $\tilde{\zeta}_N(t)$ の位数 m_j の極である。逆も成立する。

以上のことから、 $\tilde{\zeta}_N(t)$ の収束半径を \tilde{r}_N とすると、

$$\tilde{r}_N = 1/\lambda_N$$

存在関係があることがわかるので、 \tilde{r}_N の ($N \rightarrow \infty$ の) 漸近挙動が問題となる。これに関して次の定理を得た。

定理

μ -a.e. z に対し、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{r}_N = 1 \quad (= \zeta(t) \text{ の収束半径})$$

2 のことから、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_N = 1$ (= ζ_u の最大固有値) があることがわかる。

また, $\tilde{\lambda}_N$ 以外の $\tilde{\mathcal{L}}_N$ のスペクトルについて以下の補題が成立する。

補題

ある $0 < \delta < 1$ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sup \{ |\lambda| ; \lambda \in \text{Spec}(\tilde{\mathcal{L}}_N) \setminus \tilde{\lambda}_N \} < \delta$$

($\text{Spec}(\tilde{\mathcal{L}}_N)$ は $\tilde{\mathcal{L}}_N$ のスペクトル集合)

§4 記号力学系に対する Poisson 法則

まず, $\tilde{\mathcal{L}}_N$ は次のように分解できることに注意しておく。

補題

$$\tilde{\mathcal{L}}_N = \tilde{\lambda}_N \hat{E}_N + \hat{\mathcal{G}}_N$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{=} \text{=} \text{ } \hat{E}_N : \tilde{\lambda}_N \text{ に対応する eigen projection.} \\ \hat{\mathcal{G}}_N : \hat{E}_N \hat{\mathcal{G}}_N = \hat{\mathcal{G}}_N \hat{E}_N = 0 \quad \Sigma \text{ 上の有界線型} \\ \text{作用素} \end{array} \right)$$

上の補題中の $\hat{\mathcal{G}}_N$ について以下の評価が成立する。

補題

μ_n -a.e. z に対して, ある自然数 N_0 と正定数 H, B, ν

$0 < \delta < 1$ が存在して, 任意の $N > N_0$ に対して

$$\|\hat{\mathcal{G}}_N^i\|_\infty \leq H \delta^i \quad \text{for } \forall i \in \mathbb{N}.$$

先 Z_N の分解を用いると、規格化再帰時間 $C_N T_N$ の Laplace 変換 $\varphi_N(\alpha)$ は以下の通りに書ける。

$$\varphi_N(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha C_N i} \left\{ \tilde{\lambda}_N^{i-1} \int \tilde{E}_N(Z_u 1_{[z]_N}) d\mu_N + \int \tilde{E}_N^{i-1}(Z_u 1_{[z]_N}) d\mu_N \right\}$$

次に、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N(\alpha)$ の計算に必要な量の計算結果をまとめておく。

補題

μ -a.e. z に対し、

$$i) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\int \tilde{E}_N(Z_u 1_{[z]_N}) d\mu_N}{1 - \tilde{\lambda}_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \tilde{E}_N 1 d\mu_N = 1$$

$$ii) \quad C_N := 1 / E_{\mu_N}[T_N] = \mu([z]_N)$$

$$iii) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\int \tilde{E}_N(Z_u 1_{[z]_N}) d\mu_N}{C_N} = 1$$

$$iv) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} C_N \sum_{i=1}^{\infty} \int \tilde{E}_N^i 1 d\mu_N = 0$$

これらを用いると、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}$ (μ -a.e. z に対し)。

これは次の定理を意味している。

定理

μ -a.e. z に対し、規格化再帰時間 $C_N T_N$ の $N \rightarrow \infty$ での極限分布が存在し、それは (パラメータ 1 の) 指数分布

布である。

次に長回再帰時間 $T_N^{(k)}$ を次で定義する：

$$T_N^{(1)}(x) := T_N(x)$$

$$T_N^{(k)}(x) := T_N^{(k-1)}(x) + T_N(\sigma^{T_N^{(k-1)}(x)} x) \quad k=2,3,\dots$$

μ_N は σ の $[\mathbb{Z}]_N$ 上の誘導変換：

$$\sigma^{T_N(\cdot)} : [\mathbb{Z}]_N \rightarrow [\mathbb{Z}]_N$$

α 不変測度であることに注意すれば、 $C_N(T_N^{(k+1)} - T_N^{(k)})$ と $C_N T_N$ とは同分布であり、また、 $(\Sigma_A^+, \sigma, \mu_\alpha)$ が weakly Bernoulli であることから、 $C_N(T_N^{(k+1)} - T_N^{(k)})$ の分布は $N \rightarrow \infty$ の極限で互いに独立になることに注意すれば、次の結果を得る。

命題

μ_N -a.e. z に対し、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N (C_N T_N^{(k)} \leq t \text{ かつ } C_N T_N^{(k+1)} > t) = \frac{t^k}{k!} e^{-t}$$

“=”、規格化再帰時間過程 $Y_{N,\cdot}$ ：

$$Y_{N,\cdot} := \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{C_N T_N^{(k)}(\cdot)}$$

と定義すれば、上の命題は、次のように表現することができる。

定理

μ -a.e. z に対し、規格化再帰時間過程 Y_N の有限次元分布は、 $N \rightarrow \infty$ で Poisson 点過程の有限次元分布に収束する。

§ 5 Remark.

以上、片側記号力学系についての Poisson 法則についての述べたが、両側記号力学系に対しても容易に拡張することができる。また、主定理は $z \in \Omega$ の ε -近傍に対しての Poisson 法則なので、Markov 分割に沿った筒集合に対する Poisson 法則とは、若干のギャップがある。しかし、 $U_\varepsilon(z)$ は筒集合の有限個の和集合でうまく近似してやることにより、主定理を示すことができる。詳しくは [H] を参照。

文献

[H]: M. Hirata. Poisson law for Axiom A diffeomorphisms
(to appear in Ergod. Th. & Dynam. Sys.)