数理解析研究所講究録
804 巻 1992 年 97-105

Anosov endomorphisms の無限小安定性

早大 教育　　　池田 宏 (Hiroshi Ikeda)

§1 序章

力学系理論において構造安定性は重要な概念のひとつである。そして、無限小安定性はこの構造安定性と密接な関係がある。例えば、微分同相写像の理論においては、次のような結果が知られている。

定理A [Mañé, Robinson]. f を closed で滑らかな多様体 M の C^1 微分同相写像とする。このとき次の性質は同値である:

(a) f は C^1 構造安定である;

(b) f は公理Aと強横断性条件を満足する;

(c) f は無限小安定である。　　　[2, 4, 7]

endomorphisms の理論においては、次のような問題があった。

問題　endomorphism の無限小安定性は open property であるか。[1]

この質問に関して小谷は否定的な解答を得た。微分同相写像の無限小安定性は open property であることは明らかである。それで我々はすべての無限小安定な endomorphisms の集合の内部を考える。この内部にあるということが微分同相写像の無限小安定性の一般化としてふさわしいように思える。この考えが適当であることを示すための第一歩として、Anosov endomorphism について、我々は定理Aと類似した結果を示す。

定理．f を closed で滑らかな多様体 M の C^r Anosov endomorphism，$r \geq 1$ とする。このとき，次の性質は同値である：

（a）f は C^r 構造安定である；

（b）f は Anosov 微分同相写像であるか，または拡大的写像である；

（c）f は無限小安定な M の endomorphisms の集合の内部に属する。

§2 準備

Mを compact，連結かつ滑らかで境界のない多様体とする。$\mathrm{End}^r(M)$，$r \geq 1$，をMのC^r endomorphisms のC^r位相をもつ空間とする。$S(f) = \{x \in M \mid Tf \mid T_xM \text{ is not injective}\}$ とする。ここで、$f \in \mathrm{End}^r(M)$ である。

定義1．$f \in \mathrm{End}^r(M)$ としΛを$f(\Lambda) = \Lambda$ なる compact なMの部分集合とする。

Λは prehyperbolic 集合である。

$$\Updownarrow$$

以下のような性質をもつ連続的分割$TM|\Lambda = E^s \oplus E^u$，$TM$上のリーマンノルム$\|\cdot\|$，定数$K > 0$，$0 < \lambda < 1$が存在する：

(a) $(Tf)E^s \subset E^s$，　$(Tf)E^u = E^u$　；

(b) $\|(Tf)^n v\| \leq K\lambda^n \|v\|$　for $v \in E^s$，$n > 0$

$\|(Tf)^n v\| \geq K\lambda^{-n} \|v\|$　for $v \in E^u$，$n > 0$　；

(c) もし$x_1 \neq x_2 \in \Lambda$，$f(x_1) = f(x_2) = y$ならば $E^s_y = \{0\}$ である。

もしΛを$f(\Lambda) \subset \Lambda$ なる compact なMの部分集合とすると、$\Gamma^0(\Lambda)$を sup norm をもつ$TM|\Lambda$の continuous section

の空間とする。$T_f M|\Lambda$ を Λ 上の $TM|\Lambda$ の pull back バンドルとする。$\Gamma_f^0(\Lambda)$ を $T_f M|\Lambda$ の continuous section の空間とする。

線型作用素 $\mathcal{L}_f : \Gamma^0(\Lambda) \to \Gamma_f^0(\Lambda)$ を

$$\mathcal{L}_f(\eta) = (Tf)\circ\eta - \eta\circ f \quad \text{for} \quad \eta \in \Gamma^0(\Lambda)$$

で定義する。

定義２．$f \in \mathrm{End}^r(M)$ が無限小安定である。

$$\Updownarrow$$

線型作用素 $\mathcal{L}_f : \Gamma^0(M) \to \Gamma_f^0(M)$ が surjective である。

微分同相写像の無限小安定性の定義は［２］を見よ。endomorphism の無限小安定性は微分同相写像の無限小安定性の一般化である。実際、無限小安定な微分同相写像は endomorphism の無限小安定の定義を満足している。

定義３．$f \in \mathrm{End}^r(M)$ は Anosov endomorphism である。

$$\Updownarrow$$

$S(f) = \phi$，さらに次の性質をもつ定数 $K > 0$，$0 < \lambda < 1$ かつ TM 上のリーマンノルム $\|\cdot\|$ が存在する：

各 f-orbit (x_n) について、次の性質をもつ $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T_{x_n} M$

$= \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} E^s_{x_n} \oplus E^u_{x_n}$ が存在する；

(a) $(Tf)E^s_{x_n} = E^s_{x_{n+1}}$, $(Tf)E^u_{x_n} = E^u_{x_{n+1}}$ for all $n \in \mathbb{Z}$

(b) $\|(Tf)^n v\| \leq K\lambda^n \|v\|$ for $v \in E^s$, $n \geq 0$

(c) $\|(Tf)^n v\| \geq K^{-1}\lambda^{-n} \|v\|$ for $v \in E^u$, $n \geq 0$.

§3　定理の証明

定理の証明の中で次の lemma を使う。

Lemma. $f \in \mathrm{End}^r(M)$, Λ を $f(\Lambda) = \Lambda$ である M の compact な部分集合とする。このとき、次のことは同値である。

Λ が prehyperbolic 集合である。

$\Updownarrow$

$\mathcal{L}_f : \Gamma^0(\Lambda) \to \Gamma^0_f(\Lambda)$ が同型写像である。

この lemma は[3]で述べられている。しかし、そこでは($\Uparrow$)の証明しか述べられていない。($\Downarrow$)は f が無限小安定である場合は自明である。だが、f が上記 lemma のように一般的な場合には証明のために長い評価が必要である。

定理の証明.

(b)$\Rightarrow$(a). Shub [8], Moser [5] より明らかである。

(a)⇒(b) は[6]で証明されている。

(b)⇒(c). もし f が Anosov 微分同相写像であるかまたは拡大的写像であるならば、M は prehyperbolic である。Lemma より、$\mathcal{L}_f : \Gamma^0(M) \to \Gamma_f^0(M)$ は上への写像だから、f は無限小安定である。さらに、すべての $g \in \mathcal{U}$ が Anosov 微分同相写像または拡大的写像であるような f の近傍 $\mathcal{U}$ が存在する。

(c)⇒(b). Anosov endomorphism f が拡大的写像でないと仮定する。このとき、f は真の Anosov endomorphism である。よって、次のような性質をもつ定数 $K>0$, $0<\lambda<1$, かつ TM 上のリーマンノルム $\|\cdot\|$ が存在する:

各 f-orbit (x_n) について以下の性質をもつ $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T_{x_n}M = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} E^s_{x_n} \oplus E^u_{x_n}$ が存在する;

(i) $(Tf)E^s_{x_n} = E^s_{x_{n+1}}$, $(Tf)E^u_{x_n} = E^u_{x_{n+1}}$ for all $n \in \mathbb{Z}$

(ii) $\|(Tf)^n v\| \leq K\lambda^n \|v\|$ for $v \in E^s$, $n \geq 0$

$\|(Tf)^n v\| \geq K^{-1}\lambda^{-n} \|v\|$ for $v \in E^u$, $n \geq 0$

(iii) $\dim E^s_x = \text{constant} > 0$ for all $x \in (x_n)$ and all f-orbit (x_n).

もし f が1対1の写像ならば、f は Anosov 微分同相写像である。それで f は1対1でないと仮定する。(i)と(ii)を使って $\mathcal{L}_f$ は1対1であることは容易に示せる。よって、

$L_f: \Gamma^0(M) \to \Gamma_f^0(M)$ は同型写像である。Lemma より、M は prehyperbolic である。f は1対1でないから、f は拡大的写像である。これは(iii)に矛盾する。（証明終）

§4 まとめ

便宜上、$f \in \mathrm{End}^r(M)$ が無限小安定な M の endomorphism の集合の内部に属することを、f は S-無限小安定であると呼ぶことにする。

定理Aと定理を比較することによって、次のような予想が考えられる。

予想．f を M の C^1 endomorphism とする。ここで、M は closed で滑らかな多様体で $\dim M \geq 2$ とする。このとき、次の性質は同値である：

(a) f は C^1 構造安定である；

(b) f は AS-微分同相写像であるかまたは拡大的写像である；

(c) f は S-無限小安定である。

ここで、AS-微分同相写像とは、公理Aと強横断性条件

を満足している微分同相写像のことである。

参考文献

[1] H. Ikeda, On infinitesimal stability of endomorphisms, The Study of Dynamical Systems, vol 7, World Scientific, Singapore, 1990, pp 59-84.

[2] R. Mañé, On infinitesimal and absolute stability of diffeomorphisms, Lecture Notes in Math., vol 468, Springer-Verlag, Berlin and New-York, pp 151-161.

[3] R. Mañé, Axiom A for endomorphisms, Lecture Notes in Math., vol 597, Springer-Verlag, Berlin and New-York, pp 379-388.

[4] R. Mañé, A proof of the C^1 stability conjecture, Publ. Math. I.H.E.S. 66 (1987), 161-210.

[5] J. Moser, On a theorem of Anosov, J. Diff. Equ. 5 (1969), 411-440.

[6] F. Przytycki, Anosov endomorphisms, Studia Math. 58 (1976), 249-285.

[7] C. Robinson, Structural stability of C^1 diffeomorphisms, J. Diff. Equ. 22 (1976), 28-73.

[8] M. Shub, Endomorphisms of compact differentiable manifolds, Amer. J. Math. 91 (1969), 175-199.