数理解析研究所講究録
805巻 1992年 204-215

On contribution of elliptic elements to trace formula

三重大教育　古関春隆（Harutaka Koseki）

Selbergの跡公式（trace formula）はArthurによって数体上の一般のreductive群の場合に拡張され，Arthur-Selbergの跡公式と呼ばれるものが得られた。しかしながらこの公式を（Hecke作用素の跡の）explicitな計算の為に用いることは，一般には極めて困難であろう。たとえばelliptic regular elementの寄与には種々のtorusの"volume factor"が現れるが，これは一般には（非円分拡大の）相対類数などに帰着してしまう。しかし，保型形式論における様々な"comparisonの問題"に対しては，拡張された跡公式は有効な道具となると思われる。この場合，跡公式の一部または全体を，何らかの仮定のもとで単純な形に変形しておくことが望ましい。

以下では跡公式の単純化に関するKottwitz（+Arthur）の仕事の一部を紹介する。既にそれほど"最近の話題"ではなくなっている事なので恐縮ですが，この方面に初めて接する方の参考になれば幸いです。

§1. elliptic term の記述

以下 G は代数体 F 上の連結かつ単連結な半単純代数群とする。アデール上の test-function $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$, $f = \bigotimes_v f_v$, に対し Hecke 作用素 $r(f) \in \mathrm{End}(L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})))$ を

$$(r(f)\varphi)(x) = \int_{G(\mathbb{A})} \varphi(xg) f(g)\, dg$$

により定義する。このとき跡公式の左辺の方を cusp form の空間 $L^2_{cusp}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ における $r(f)$ の跡とするならば，右辺は truncated Eisenstein series や weighted orbital integral で表される種々の項の和になる。

さて $\gamma \in G(F)$ が F 上 elliptic であるとは，γが半単純で，中心化群 G_γ の中心 $Z(G_\gamma)$ が F 上 anisotropic となることであった。$G(F)$ の共役類や安定共役類に対しても，F 上 elliptic という概念を定義することができる。跡公式の右辺における $G(F)$ の elliptic elements の寄与は

$$\sum_{\mathcal{O}} \tau(G_{\mathcal{O}})\, \mathcal{O}_{\mathcal{O}}(f) \; ; \quad \mathcal{O} \text{ は } G(F) \text{ の elliptic な共役類}$$

と表される。ここで $G_{\mathcal{O}}$ は $\gamma \in \mathcal{O}$ の中心化群（γのとり方によらない）で $\tau(G_{\mathcal{O}})$ はその玉河数，また $\mathcal{O}_{\mathcal{O}}(f)$ は軌道積分である：

$$\mathcal{O}_{\mathcal{O}}(f) = \int_{G_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma g) \frac{dg}{dt} \quad (\gamma \in \mathcal{O}).$$

上の表示を安定共役類の言葉で書き直すことを考える。$G(F)$ の安定共役類とは "$\gamma_1, \gamma_2 \in G(F)$ について $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \exists x \in G(\overline{F})$ s.t. $x\gamma_1 x^{-1} = \gamma_2$" という同値関係に関する同値類のこ

とであった（$\bar{F}$はFの代数的閉包）。今後$G(F)$のellipticな安定共役類を代表的に$\mathcal{S}$で表す。Fの各素点vにおける$G(F_v)$やアデール$G(\mathbb{A})$においても安定共役類という概念が同様に定義されるが，上の$\mathcal{S}$を含む$G(F_v)$の安定共役類と$G(\mathbb{A})$の安定共役類をそれぞれ$\mathcal{S}_v$および$\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$で表す。さらに$\mathcal{S}$に含まれる$G(F)$の共役類全体を$\mathcal{S} \bmod G(F)$と書く。$\mathcal{S}_v \bmod G(F_v)$なども同様の意味で用いる。

以下ellipticな$\mathcal{S}$に対し$\sum_{\mathcal{O} \in \mathcal{S} \bmod G(F)} \tau(G_{\circ})\,\mathcal{O}_{\mathcal{O}}(f)$を考えるのであるが，簡単のため<u>$\mathcal{S}$はregular</u>と仮定する。$\gamma_0 \in \mathcal{S}$を固定しておく。仮定より$\gamma \in \mathcal{S}$に対し$G_\gamma$はtorusで常に$G_{\gamma_0}$と同型である。$T = G_{\gamma_0}$とおく。またFの絶対Galois群を$\Gamma$と書く。

$\mathcal{S}$の元$\gamma = x\gamma_0 x^{-1}$ $(x \in G(\bar{F}))$に対しΓ上の1-cocycle $(\sigma \mapsto \sigma(x)^{-1}x)$を対応させることにより，集合として

$$\mathcal{S} \bmod G(F) \approx \mathrm{Ker}\,(H^1(F,T) \to H^1(F,G)).$$

同様に
$$\mathcal{S}_v \bmod G(F_v) \approx \mathrm{Ker}\,(H^1(F_v,T) \to H^1(F_v,G)).$$

そこで下のdiagramを考える：

$$\begin{array}{ccc} H^1(F,T) & \longrightarrow & H^1(F,G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_v H^1(F_v,T) & \longrightarrow & \bigoplus_v H^1(F_v,G) \end{array}$$

（注意：E_8に対するHasse principleはTchernousovによって証明された。）Gの Hasse principleより，共役類のHasse map

$\lambda_s : \mathcal{S} \bmod G(F) \to \mathcal{S}_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})$ の fibre の元の個数は常に $Ш(T) := \mathrm{Ker}(H^1(F,T) \to \bigoplus_v H^1(F_v,T))$ の位数に等しい。他方 T の指標群 $\mathrm{Hom}_{\overline{F}}(T, \mathbb{G}_m)$ を $X^*(T)$ と書くと [Ono] より $\tau(T) = \#(H^1(F,X^*(T)))/\#(Ш(T))$。以上よりひとまず,

(1) $$\sum_{o \in \mathcal{S} \bmod G(F)} \tau(G_o) O_o(f) = \sum_{o \in \mathrm{Im}\,\lambda_s} \#(H^1(F,X^*(T))) O_o(f).$$

さて $H^1(F,X^*(T))$ を $\mathfrak{K}(T/F)$ と書くことにすると, 中山-Tate duality よりその Pontrjagin dual は $\mathfrak{K}(T/F)^D = H^1(F, T(\overline{\mathbb{A}})/T(\overline{F}))$ で与えられる。各 $\gamma \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ に対し

$$X_o(\gamma) = \{ (g,i) \in G(\overline{\mathbb{A}}) \times \mathrm{Hom}_{\overline{F}}(T,G) \mid ①, ② \}$$

① $i(\gamma_o) = g\gamma g^{-1}$

② i は $T \hookrightarrow G$ と $G(\overline{F})$ の作用により同値

とおくと $X_o(\gamma) \neq \phi$ で, $X_o(\gamma)$ には $G(\overline{F})$ が左から作用する。$X(\gamma) = G(\overline{F}) \backslash X_o(\gamma)$ とおくとこれには $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ が左から, $T(\overline{\mathbb{A}})/T(\overline{F})$ が右から作用し, $X(\gamma)$ は $T(\overline{\mathbb{A}})/T(\overline{F})$ に関する F-torsor になる。そこで $X(\gamma)$ が定める $H^1(F, T(\overline{\mathbb{A}})/T(\overline{F}))$ の元を $\mathrm{obs}(\gamma)$ とおくと作り方より $\mathrm{obs}(\gamma)$ は γ を含む $\mathcal{S}_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})$ の元 o にのみ depend するので, これを $\mathrm{obs}(o)$ と書く。すると

$$\mathrm{obs}(o) = 0 \iff X(\gamma)^{\Gamma} \neq \phi \iff o \in \mathrm{Im}\,\lambda_s.$$

よって (1) を書き直すと

(2) $$\sum_{o \in \mathcal{S} \bmod G(F)} \tau(G_o) O_o(f) = \sum_{o \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})} \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(T/F)} \langle \mathrm{obs}(o), \kappa \rangle O_o(f).$$

Kottwitzは$\mathcal{S}$がsingularの場合にも(2)の形の等式を証明したのであるが，その場合には，固定された$\gamma_0 \in \mathcal{S}$に対し，$I_0 = G_{\gamma_0}$とおき，I_0のL群の連結成分を$\hat{I}_0$，$\hat{I}_0^{\Gamma}$の中心をその単位元の連結成分で割った群$\pi_0(Z(\hat{I}_0^{\Gamma}))$を$\mathfrak{K}(I_0/F)$として，$\mathfrak{K}(I_0/F)^D$の中に$obs(0)$を構成している：

[定理 1. elliptic (singular) な安定共役類$\mathcal{S} \subset G(F)$に対し，

$$\sum_{O \in \mathcal{S} \bmod G(F)} \tau(G_0)\, O_0(f) = \sum_{O \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})} \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(I_0/F)} \langle obs(O), \kappa \rangle\, e(O)\, O_0(f)。$$

ここで$e(O)$は[Kot 1]で定義された符号因子(±1)である。

この定理と(2)では符号因子$e(O)$の部分が見かけ上ズレている。実は各素点における$O_v \in \mathcal{S}_v \bmod G(F_v)$に対して$e(O_v) = \pm 1$が定義され，$O = (O_v)_v \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})$に対しては$e(O) = \prod_v e(O_v)$であるが，$O \in \mathrm{Im}\, \lambda_{\mathcal{S}}$のときは積公式$\prod_v e(O_v) = 1$が成立するので，結局ズレは生じない。

次に$\mathcal{S}$がregularのとき，$H^1(F, X^*(T)) \approx \pi_0(\hat{T}^{\Gamma})$となることを確認しておく。実際Tの1-parameter subgroupsの群を$X_*(T)$とすると，$\hat{T} = \mathrm{Hom}(X_*(T), \mathbb{C}^\times)$。完全列$1 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \xrightarrow{e^{2\pi i \cdot}} \mathbb{C}^\times \to 1$より

$$1 \to \mathrm{Hom}(X^*(\hat{T}), \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(X^*(\hat{T}), \mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}(X^*(\hat{T}), \mathbb{C}^\times) \to 1 \quad (\text{exact})。$$

よって

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Hom}_{\Gamma}(X^*(\hat{T}), \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\Gamma}(X^*(\hat{T}), \mathbb{C}^\times) & \longrightarrow & H^1(F, \mathrm{Hom}(X^*(\hat{T}), \mathbb{Z})) & \to & 0 \\ \| & & \| & & \| & & \\ \mathrm{Lie}(\hat{T}^{\Gamma}) & \xrightarrow{\ \exp\ } & \hat{T}^{\Gamma} & & H^1(F, X^*(T)) & & \end{array}$$

§2. elliptic term の単純化

$G(F)$ の（ellipticな）安定共役類 $\mathfrak{s}$ と F の素点 v に対して，local な stable orbital integral $SO_{\mathfrak{s}_v}(f_v)$ を

$$SO_{\mathfrak{s}_v}(f_v) = \sum_{O_v \in \mathfrak{s}_v \bmod G(F_v)} e(O_v)\, \mathcal{O}_{O_v}(f_v)$$

と定義する。$G(F_v)$ 上の調和解析において distribution $SO_{\mathfrak{s}_v}$ は，$\mathcal{O}_{O_v}$ そのものよりも基本的な役割りを果たすことが多い。しかし global な跡公式における $\mathfrak{s}$ の寄与は，一般には $SO_{\mathfrak{s}_v}(f_v)$ 達の積には分解しない（定理1参照）。だが test-function f が都合のよい成分をもつ場合には，実際そのように分解する：

定理2. $\mathfrak{s} \subset G(F)$ を elliptic (singular) な安定共役類とする。F のある有限素点 $\mathfrak{y}$ において，test-function f の $\mathfrak{y}$-成分 $f_{\mathfrak{y}}$ が任意の $O_{\mathfrak{y}} \in \mathfrak{s}_{\mathfrak{y}} \bmod G(F_{\mathfrak{y}})$ において

$$e(O_{\mathfrak{y}})\, \mathcal{O}_{O_{\mathfrak{y}}}(f_{\mathfrak{y}}) = \begin{cases} c & \cdots\ \mathfrak{s}_{\mathfrak{y}} \text{ が } F_{\mathfrak{y}} \text{ 上 elliptic}, \\ 0 & \cdots\ \text{otherwise} \end{cases}$$

（c は $\mathfrak{s}_{\mathfrak{y}}$ で決まる定数）をみたすならば，

$$(*) \qquad \sum_{O \in \mathfrak{s} \bmod G(F)} \tau(G_O)\, \mathcal{O}_O(f) = \prod_v SO_{\mathfrak{s}_v}(f_v)。$$

この定理も一般の場合の証明は長くなるので，$\mathfrak{s}$ が regular の場合の証明を述べることにする。§1と同じく，$\gamma_0 \in \mathfrak{s}$ を固定して $T = G_{\gamma_0}$ とおく。定理1において O に関する和と κ に関する和は交換できることがわかるので，(*) の左辺は

$$\sum_{\kappa\in \mathfrak{K}(T/F)} \Big(\sum_{o \in \mathfrak{s}_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})} \langle \mathrm{obs}(o), \kappa \rangle e(o)\, \mathcal{O}_o(f) \Big)$$

と表される。ここで $\kappa \neq 0$ のとき o に関する和が消えることが言えれば，定理 2 は証明されたことになる。

そこで $\kappa \in \mathfrak{K}(T/F)$, $\kappa \neq 0$, を固定し，上の表示の κ に対応する項を $Q(\kappa)$ とおく。F の素点 v に対し，$\mathfrak{K}(T/F) = H^1(F, X^*(T))$ から $H^1(F_v, X^*(T))$ への局所化による κ の像を κ_v と書く。固定された $\gamma_0 \in \mathfrak{s}$ を通じて $\mathrm{Ker}(H^1(F_v, T) \to H^1(F_v, G))$ は $\mathfrak{s}_v \bmod G(F_v)$ と同一視される（P. 3 参照）。前者の元 x_v に対応する後者の元を $x_v(\gamma_0)$ と表す。すると容易にわかるように，γ_0 を含む $\mathfrak{s} \bmod G(F)$ の元を O_0 として，

$$Q(\kappa) = \langle \mathrm{obs}(O_0), \kappa \rangle \prod_v \sum_{x_v} \langle x_v, \kappa_v \rangle e(x_v(\gamma_0))\, \mathcal{O}_{x_v(\gamma_0)}(f_v)。$$

ここで v が有限素点のときは x_v の変域 $\mathrm{Ker}(H^1(F_v, T) \to H^1(F_v, G))$ は $H^1(F_v, T)$ そのものに一致する。よって定理 2 の仮定と次の lemma より $Q(\kappa) = 0$ が示された。Q.E.D.

<u>Lemma.</u> torus T が F_y 上 anisotropic ならば，localization $H^1(F, X^*(T)) \longrightarrow H^1(F_y, X^*(T))$ は injective である。

（証明）

$X^*(T)$ は torsion-free ゆえ $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ に tensor して

$$0 \to X^*(T) \to X^*(T) \otimes \mathbb{Q} \to X^*(T) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0 \quad (\text{exact})。$$

これに伴う（F および F_y 上の）Galois cohomology の長完全列において，仮定より $H^0(F, X^*(T) \otimes \mathbb{Q}) = H^0(F_y, X^*(T) \otimes \mathbb{Q}) = 0$ だから，

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to H^0(F, X^*(T)\otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \to & H^1(F, X^*(T)) & \to & H^1(F, X^*(T))\otimes \mathbb{Q} = 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \to H^0(F_{\mathfrak{y}}, X^*(T)\otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \to & H^1(F_{\mathfrak{y}}, X^*(T)) & \to & H^1(F_{\mathfrak{y}}, X^*(T))\otimes \mathbb{Q} = 0 \end{array}$$

横列は exact で左縦列は明らかに injective。よって右縦列も injective. Q.E.D.

§3. Euler-Poincaré 関数と simple trace formula

F の有限素点 $\mathfrak{y}$ を固定する。$G(F_{\mathfrak{y}})$ の Tits building を $\mathcal{B}$ とおくと $G(F_{\mathfrak{y}})$ は $\mathcal{B}$ に，そして $\mathcal{B}$ の facet 達の集合に，作用する。$\{\text{facets of } \mathcal{B}\}$ の $G(F_{\mathfrak{y}})$-作用に関する基本領域 $\mathcal{S}$ をひとつ取っておく。$\mathcal{S}$ は有限集合である。

各 $\sigma \in \mathcal{S}$ に対しその $G(F_{\mathfrak{y}})$ 内での stabilizer を $G(F_{\mathfrak{y}})_\sigma$ と表す。各 $G(F_{\mathfrak{y}})_\sigma$ は $G(F_{\mathfrak{y}})$ の開 compact 部分群になる。このとき $G(F_{\mathfrak{y}})$ の Euler-Poincaré 関数 f_{EP} を次の様に定義する：

$$f_{EP} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} (-1)^{\dim \sigma} vol(G(F_{\mathfrak{y}})_\sigma)^{-1} (G(F_{\mathfrak{y}})_\sigma \text{の特性関数})。$$

定義より $f_{EP} \in C_c^\infty(G(F_{\mathfrak{y}}))$。ただし $vol(\ )$ は $G(F_{\mathfrak{y}})$ 上の Haar 測度に関する体積で，f_{EP} はこの Haar 測度の取り方に依存する。これを modify した $\tilde{f}_{EP} := (-1)^{g} f_{EP}$ ($g = rank_{F_{\mathfrak{y}}} G$) を，ここでは仮に，正値 Euler-Poincaré 関数と呼ぶことにする。

Euler-Poincaré関数という名称は，f_{EP} が $G(F_{\mathfrak{p}})$ の Euler-Poincaré 測度と結びつくことに由来していると思われる。すなわち f_{EP} が $G(F_{\mathfrak{p}})$ の Haar 測度 dg に関して定義されている時測度 $f_{EP}(1)dg$ は dg および $\mathcal{S}$ のとり方によらず，$G(F_{\mathfrak{p}})$ の Euler-Poincaré 測度となる。（つまり $G(F_{\mathfrak{p}})$ の cocompact かつ torsion-free な（離散）部分群 Γ の Euler-Poincaré 標数は

$$\chi(\Gamma) := \sum_{p} (-1)^p \dim_{\mathbb{Q}} H^p(\Gamma, \mathbb{Q}) = \int_{G(F_{\mathfrak{p}})/\Gamma} f_{EP}(1)\, dg$$

で与えられる（Serre）。）

また表現論的には $\tilde{f}_{EP}$ は $G(F_{\mathfrak{p}})$ の Steinberg 表現の pseudo-coefficient になる（Casselman）。すなわち $G(F_{\mathfrak{p}})$ の既約 tempered 表現 π に対し，

$$\operatorname{trace} \pi(\tilde{f}_{EP}) = \begin{cases} 1 \cdots \pi : \text{Steinberg 表現}, \\ 0 \cdots \text{otherwise}. \end{cases}$$

さて $\tilde{f}_{EP}$ は §2 定理2 の "$f_{\mathfrak{p}}$ の条件" をみたす。実はより強く，次が成立する：

<u>定理3.</u> $\tilde{f}_{EP}$ の軌道積分は dg および $\mathcal{S}$ のとり方によらない。さらに $\mathcal{A}$ を $G(F_{\mathfrak{p}})$ の安定共役類，$\mathcal{O} \in \mathcal{A} \bmod G(F_{\mathfrak{p}})$ とするとき，

$$e(\mathcal{O})\, \mathcal{O}_{\mathcal{O}}(\tilde{f}_{EP}) = \begin{cases} c \cdots \mathcal{A} \text{ が } F_{\mathfrak{p}} \text{ 上 elliptic}, \\ 0 \cdots \text{otherwise}. \end{cases}$$

ここで c は $\mathcal{A}$ で決まる定数である。

（この定理や定理2における $G_0(F_{\mathfrak{p}})$ の測度のとり方については

[Kot 4]参照。)

よってある有限素点$\mathfrak{p}$においてtest-functionの$\mathfrak{p}$-成分を$G(F_\mathfrak{p})$の正値Euler-Poincaré関数にすれば，跡公式の"右辺"における elliptic elements の寄与は定理2の(*)の形に単純化される。さらに，定理3を眺めていると，ellipticでない元の寄与が消えることも言えそうな気がしてくるが，これは(少なくとも現在のところ)"$\mathfrak{p}$における仮定"だけからは証明できない。

定理4. Fのある有限素点$\mathfrak{p}$において$f_\mathfrak{p}$は$G(F_\mathfrak{p})$の正値Euler-Poincaré関数で，$\mathfrak{p}$と異なるある有限素点ℓにおいてf_ℓは$G(F_\ell)$の supercuspidal 表現の行列成分であるとする。このとき

$$\mathrm{trace}(r(f)\,|\,L^2_{cusp}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))) = \sum_{s} \prod_{v} SO_{s_v}(f_v)。$$

ここでsは$G(F)$の($F_\mathfrak{p}$上) ellipticな安定共役類を動く。

さて，今までのF-group Gに対し，その quasi-split inner F-form G'をとり，inner-twisting $\psi/\bar{F}: G \xrightarrow{\sim} G'$を固定する。1-cocycle $(\sigma \mapsto \psi({}^{\sigma}\psi)^{-1})$の定める$H^1(F, G'_{ad})$の元を$c_\psi$とおく。$G'_{ad}$は仮定より連結であるから，$F$の素点の有限集合$S$で，$v \notin S$ならば$c_\psi$の$H^1(F_v, G'_{ad})$への像が$0$となるようなものが存在する。必要ならば$S$を拡げて，$S$は1個以上の有限素点を含むと仮定してよい。$v \notin S$ならば$\psi$を少しひねった写像によって$G$は$G'$と$F_v$上同型になる。以後$v \notin S$では$G(F_v)$を$G'(F_v)$と

同一視する。

Gの跡公式をG'の跡公式と比較するため，test-function $f=\otimes_v f_v \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$と$f'=\otimes_v f'_v \in C_c^\infty(G'(\mathbb{A}))$について以下の仮定を設ける：

① $v \notin S$ならば$f_v=f'_v$，

② 任意の有限素点$\mathfrak{p} \in S$において$f_\mathfrak{p}$は$G(F_\mathfrak{p})$の，$f'_\mathfrak{p}$は$G'(F_\mathfrak{p})$の正値Euler-Poincaré関数，

③ 任意の無限素点$v \in S$においてf_vとf'_vのstable orbital integralの間に"matching"が成立している，

④ ある有限素点$\mathfrak{l} \notin S$において$f_\mathfrak{l}=f'_\mathfrak{l}$は$G(F_\mathfrak{l})=G'(F_\mathfrak{l})$のsupercuspidal表現の行列成分。

ここで③の意味については[Shel]などを見られたい。

<u>定理5.</u> 上の①～④のもとで

$$\mathrm{trace}(r(f)\,|\,L^2_{cusp}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})))=\mathrm{trace}(r(f')\,|\,L^2_{cusp}(G'(F)\backslash G'(\mathbb{A})))。$$

これは定理4とSelberg principleなどから従う。

さて，ある無限素点$w \in S$において$G(F_w)$がcompactであると仮定する。このとき$G'(F_w)$はcompact Cartan subgroupを持ち，従って離散系列表現を持つ。$G(F_w)$の（有限次元）既約unitary表現π_wをとると，π_wとの間に"character relation"が生じるような$G'(F_w)$の離散系列表現が$[W:W_c]$個存在する。ただしWは$G'(\mathbb{C})$のWeyl群，W_cは$G'(F_w)$の，compact Cartan部分群

に関するWeyl群である。これらの中の任意のひとつをπ'_wとおく。

予想. π'_wのHarish-Chandra parameterがある程度以上"regular"なとき，上の④を次の④'でおきかえても定理5は成立する：

④' 上の無限素点$w \in S$において，f_wはπ_wのcharacterでf'_wはπ'_wのpseudo-coefficient.

この方向では伊吹山氏，橋本氏，筆者などの研究があるが，一般には未解決と思われる。

— References —

[Kot 1] R. Kottwitz, Sign changes in harmonic analysis on reductive groups, Trans. AMS 278 (1983), 289 - 297

[Kot 2] ——, Stable trace formula: cuspidal tempered terms, Duke Math. J. 51 (1984), 611 - 650

[Kot 3] ——, Stable trace formula: elliptic singular terms, Math. Ann. 275 (1986), 365 - 399

[Kot 4] ——, Tamagawa numbers, Ann. Math. 127 (1988), 629 - 646

[Ono] T. Ono, On the Tamagawa number of algebraic tori, Ann. Math. 78 (1963), 47 - 73

[Shel] D. Shelstad, Characters and inner forms of a quasi-split group over $\mathbb{R}$, Compos. Math. 39 (1979), 11 - 45