

Theta lifting of cusp forms on the unitary group $U(d, d)$

渡部 隆夫 (東北大 教養)

0. Notation

F を総実代数体とし, $E = F(\sqrt{-1})$ とする. Z^n を E 上 $2n$ -次元のベクトル空間で, Witt-指数 n の skew Hermitian form \langle, \rangle_n をもつとする. 基底 $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ によって \langle, \rangle_n は行列

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$$

に対応するものとする. $(Z^n, \langle, \rangle_n)$ に対するユニタリ群を G^n とおく. 群 $GL_q^E = \text{Res}_{E/F}(GL_q)$, G^{n-q} ($1 \leq q \leq n$) を次の様に G^n に埋め込む.

$$\iota_n(GL_q^E) = \left\{ \iota_n(A) = \begin{pmatrix} A & & & \\ & 1_{n-q} & & \\ & & {}^t\bar{A}^{-1} & \\ & & & 1_{n-q} \end{pmatrix} \mid A \in GL_q^E \right\}$$

$$\iota_n(G^{n-q}) = \left\{ \iota_n(g) = \begin{pmatrix} 1_q & & & \\ & A & & B \\ & & 1_q & D \\ & C & & D \end{pmatrix} \mid g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G^{n-q} \right\}$$

さらに次の様に G^n の部分群を定義する.

- Q_q^n = the stabilizer of the totally isotropic subspace $\langle e_1, \dots, e_q \rangle$
- $\widetilde{M}_q^n = \iota_n(GL_q^E)\iota_n(G^{n-q})$ = a Levi subgroup of Q_q^n
- \widetilde{U}_q^n = the unipotent radical of Q_q^n
- $P_q^n = Q_1^n \cap Q_2^n \cap \dots \cap Q_q^n$
- $M_q^n = \widetilde{M}_1^n \cap \widetilde{M}_2^n \cap \dots \cap \widetilde{M}_q^n$ = a Levi subgroup of P_q^n
- U_q^n = the unipotent radical of P_q^n
- $\Delta_q^n = \iota_n(GL_q^E) \cap U_q^n$
- $L_q^n = \iota_n(GL_n^E) \cap \widetilde{U}_q^n$
- $N_q^n = \widetilde{U}_q^n \cap \widetilde{U}_q^n$
- V_q^n = the derived group of U_q^n
- $W_{q-1}^n = V_q^n \cap U_{q-1}^n$

上で与えた群の 1 つを H とするとき, $H(F)$ を H の F -有理点のなす群とし, $H(\mathbf{A})$ をその adèle 群とする. また $H(F \backslash \mathbf{A}) = H(F) \backslash H(\mathbf{A})$ とおく. $U_n^n(\mathbf{A})$ の元 u を

$$u = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t\bar{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & B \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbf{A}_E), \quad B = {}^t\bar{B} = (b_{ij}) \in M_n(\mathbf{A}_E)$$

と表示したときに

$$\begin{aligned}\widehat{u}_{i,j}^{n,-}(u) &= a_{ij}, & \widehat{u}_{i,j}^{n,+}(u) &= b_{ij} \quad \text{for } 1 \leq i < j \leq n \\ \widehat{u}_i^{n,+}(u) &= b_{ii}, & & \text{for } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

とする. 最後に $G^n(\mathbf{A})$ 上の保型形式のなす空間を $\mathcal{A}(G^n)$ とかき, cusp form のなす空間を $\mathcal{A}_0(G^n)$ とかく. $F \backslash \mathbf{A}$ 上の自明でない character μ を 1 つ固定しておく.

1. A filtration of $\mathcal{A}(G^n)$

まず保型形式の Fourier 展開を与える.

$$\begin{aligned}\widehat{U}_q^n &= \text{Hom}(V_q^n \backslash U_q^n(F \backslash \mathbf{A}), \mathbf{C}^*), & \widehat{\Delta}_q^n &= \text{Hom}((\Delta_q^n \cap V_q^n) \backslash \Delta_q^n(F \backslash \mathbf{A}), \mathbf{C}^*) \\ Z_q^n &= \langle e_{q+1}, \dots, e_n \rangle + \langle f_{q+1}, \dots, f_n \rangle\end{aligned}$$

とおく. $\Delta_q^n \cong \widetilde{U}_q^n \backslash U_q^n$ だから $\chi \in \widehat{\Delta}_q^n$ は自然に \widehat{U}_q^n の元とみなせる. いま $\chi \in \widehat{\Delta}_q^n$, $z \in Z_q^n$, $u \in U_q^n(\mathbf{A})$ に対して

$$\chi^*(z)(u) = \chi(u) \mu(\text{tr}_{E/F} \left(\sum_{i=q+1}^n \langle z, f_i \rangle_n \widehat{u}_{q,i}^{n,-}(u) - \langle z, e_i \rangle_n \widehat{u}_{q,i}^{n,+}(u) \right))$$

と定義する. このとき $\chi^*(z) \in \widehat{U}_q^n$ であり

$$\widehat{U}_q^n = \bigsqcup_{\chi \in \widehat{\Delta}_q^n} \chi^*(Z_q^n), \quad \{\psi \in \widehat{U}_q^n \mid \psi|_{W_q^n(\mathbf{A})} \equiv 1\} = \bigsqcup_{\chi \in \widehat{\Delta}_q^n} \chi^*(\langle e_{q+1} \rangle)$$

をもつ. そこで $\varphi \in \mathcal{A}(G^n)$, $\psi \in \widehat{U}_q^n$, $\alpha \in F$ に対して

$$\begin{aligned}\lambda_q^n(g; \psi; \varphi) &= \int_{U_q^n(F \backslash \mathbf{A})} \psi^{-1}(u) \varphi(ug) du \\ \xi_q^n(g; \psi; \alpha; \varphi) &= \int_{V_{q+1}^n(F \backslash \mathbf{A})} \mu^{-1}(\alpha \widehat{u}_{q+1}^{n,+}(v)) \left\{ \int_{W_q^n(F \backslash \mathbf{A})} \lambda_q^n(vwg; \psi; \varphi) dw \right\} dv\end{aligned}$$

と定義する. ただし, $q = n-1$ のときに限り $\xi_{n-1}^n(g; \psi; \alpha; \varphi)$ の定義に現われる $V_{n-1}^n(F \backslash \mathbf{A})$ 上の積分は $V_{n-1}^n U_n^+(F \backslash \mathbf{A})$ 上の積分で置き換えるものとする. ここで U_n^+ は成分 $u_n^{n,+}(\cdot)$ に対応する one parameter subgroup とする. $1 \leq q \leq n-1$ のとき, 次の Fourier 展開をもつ.

$$\begin{aligned}\int_{V_q^n(F \backslash \mathbf{A})} \varphi(vg) dv &= \sum_{\chi \in \widehat{\Delta}_q^n} \sum_{z \in Z_q^n} \lambda_q^n(g; \chi^*(z); \varphi) \\ \int_{W_q^n(F \backslash \mathbf{A})} \varphi(wg) dw &= \sum_{\chi \in \widehat{\Delta}_q^n} \sum_{\substack{z \in \langle e_{q+1} \rangle \\ \alpha \in F}} \xi_q^n(g; \chi^*(z), \alpha; \varphi)\end{aligned}$$

$\widehat{\Delta}_q^n$ の元 χ は各 $u_{j,j+1}^n(\cdot)$ ($1 \leq j \leq q-1$) に対応する one parameter subgroup 上 trivial でなければ非退化とよばれる. 非退化な character 全体の集合を $\widehat{\Delta}_q^n[0]$ とおく. このとき上で与えた Fourier 展開の部分 and を次の様にとる.

$$\Lambda_q^n(\varphi)(g) = \sum_{\chi \in \widehat{\Delta}_q^n[0]} \sum_{z \in Z_q^n} \lambda_q^n(g; \chi^*(z); \varphi)$$

$$\Lambda_{q+\frac{1}{2}}^n(\varphi)(g) = \sum_{\chi \in \widehat{\Delta}_q^n[0]} \sum_{\substack{z \in \langle e_{q+1} \rangle \\ \alpha \in F}} \xi_q^n(g; \chi^*(z), \alpha; \varphi)$$

これを用いて $\mathcal{A}(G^n)$ の不変部分空間を次で定義する: 半整数 r に対して

$$\mathcal{A}^r(G^n) = \begin{cases} \mathcal{A}(G^n) & \text{if } n \leq r \\ \{\varphi(g) \in \mathcal{A}(G^n) \mid \Lambda_r^n(\varphi)(g) \equiv 0\} & \text{if } 1 \leq r \leq n - \frac{1}{2} \\ \{0\} & \text{if } r \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

これは filtration

$$\{0\} \subset \mathcal{A}^1(G^n) \subset \mathcal{A}^{\frac{3}{2}}(G^n) \subset \dots \subset \mathcal{A}^{n-\frac{1}{2}}(G^n) \subset \mathcal{A}(G^n)$$

を与える. また

$$\mathcal{A}_0^r(G^n) = \mathcal{A}_0(G^n) \cap \mathcal{A}^r(G^n)$$

とおく.

例: π を $G^n(\mathbf{A})$ の既約保型表現とすると

- (1) π が cuspidal holomorphic $\implies \pi \hookrightarrow \mathcal{A}_0^{3/2}(G^n)$
- (2) π が generic $\implies \pi \hookrightarrow \mathcal{A}^n(G^n)/\mathcal{A}^{n-1/2}(G^n)$
- (3) π が Weil 表現 $\implies \pi \hookrightarrow \mathcal{A}^2(G^n)$ で, この場合次は同値になる.

$$\pi \text{ が cuspidal} \iff \pi \hookrightarrow \mathcal{A}^{3/2}(G^n) \iff \pi \hookrightarrow \mathcal{A}^1(G^n)$$

2. Theta lifting

整数 $d \geq 1$ を固定する. Hermitian space $(Z^d \otimes Z^n, \langle, \rangle = \sqrt{-1} \langle, \rangle_d \otimes \langle, \rangle_n)$ を考えることにより, 自然な写像

$$G^d \times G^n \rightarrow G^{2dn} \rightarrow Sp_{8dn} = Sp(Z^d \otimes Z^n, \text{tr}_{E/F}(\langle, \rangle))$$

をえる. $Mp_{8dn}(\mathbf{A})$ を $Sp_{8dn}(\mathbf{A})$ 上の metaplectic 群とし, ω_μ を μ に対応する $Mp_{8dn}(\mathbf{A})$ の Weil 表現とする. いま $E^* \backslash \mathbf{A}_E^*$ 上の character ν で, その A^* への制限が類体論から従う 2 次拡大 E/F に対応する character であるようなものを 1 つ固定する. このとき Gelbart - Rogawski ([1]) により, splitting $s_{\mu, \nu}: G^{2dn}(\mathbf{A}) \rightarrow Mp_{8dn}(\mathbf{A})$ が構成できる. これから $G^{2dn}(\mathbf{A})$ の Weil 表現 $\omega = \omega_\mu \circ s_{\mu, \nu}$ をえる. ω は $\mathcal{Y}^n(\mathbf{A}) = Z^d(\mathbf{A})^{\oplus n}$ 上の Schwarz - Bruhat 空間 $\mathcal{S}(\mathcal{Y}^n(\mathbf{A}))$ に実現される. $f \in \mathcal{S}(\mathcal{Y}^n(\mathbf{A}))$, $h \in G^d(\mathbf{A})$, $g \in G^n(\mathbf{A})$ に対して

$$\theta_j^{d,n}(h, g) = \sum_{\vec{x} \in \mathcal{Y}^n} \omega(h \cdot g) f(\vec{x})$$

とおく. 各 cusp form $\varphi \in \mathcal{A}_0(G^d)$ に対し

$$\theta^n(\varphi|f)(g) = \int_{G^d(F \backslash \mathbf{A})} \varphi(h) \theta_f^{d,n}(h, g) dh$$

とすれば, これは $G^n(\mathbf{A})$ 上の保型形式を与える. $G^d(\mathbf{A})$ の既約 cuspidal 表現 π に対し

$$\Theta^n(\pi) = \{\theta^n(\varphi|f) \mid \varphi \in \pi, f \in \mathcal{S}(\mathcal{Y}^n(\mathbf{A}))\}$$

とおき, これを π の theta lifting とよぶ.

3. Fourier coefficients of $\theta^n(\varphi|f)$

以下では, $\theta^n(\varphi|f)$ の §1 で述べた Fourier 係数をもとめる. $\varphi \in \mathcal{A}_0(G^d)$, $f \in \mathcal{S}(\mathcal{Y}^n(\mathbf{A}))$, $1 \leq q \leq n-1$ は固定しておく. また $\mathcal{Y}^n(\mathbf{A})$ の元 \vec{x} は, しばしば, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in Z^d(\mathbf{A})$ の形にかかれる. とくに $1 \leq q \leq d$ のとき

$$\begin{aligned} {}^* \vec{e}_q &= (e_1, \dots, e_q, 0, \dots, 0) \\ \vec{e}_{n-q}(z) &= (0, \dots, 0, -\sqrt{-1} \langle z, e_{q+1} \rangle_n f_q, \dots, -\sqrt{-1} \langle z, e_n \rangle_n f_q), \quad (z \in Z_q^n) \end{aligned}$$

とする. またこのとき

$$\mathcal{Y}_q^{n-q} = \{(0, \dots, 0, x_{q+1}, \dots, x_n) \in \mathcal{Y}^n \mid x_i \in Z_q^d, q+1 \leq i \leq n\}$$

とする.

THEOREM 1. 任意の $\chi \in \widehat{\Delta}_q^n[0]$ と $z \in Z_q^n$ について次をもつ.

(1) $q > d$ のとき

$$\lambda_q^n(g; \chi^*(z); \theta^n(\varphi|f)) = 0$$

(2) $1 \leq q \leq d$ のとき

$$\begin{aligned} \lambda_q^n(g; \chi^*(z); \theta^n(\varphi|f)) &= \int_{U_q^d(\mathbf{A}) \backslash U_d(G^{d-q})(F) \backslash G^d(\mathbf{A})} \int_{(\Delta_q^d V_q^d \backslash U_q^d)(F \backslash \mathbf{A})} \sum_{\vec{y}_{n-q} \in \mathcal{Y}_q^{n-q}} \\ &\quad \times \xi_{q-1}^d(uh; \tilde{\chi}, \sqrt{-1} \langle z, z \rangle_n; \varphi) \xi_q^n(uh; \chi^*(z); \omega(g)f)(\vec{y}_{n-q}) dudh \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} &\xi_q^n(h; \chi^*(z); f)(\vec{y}_{n-q}) \\ &= \int_{\Delta_q^n(\mathbf{A})} \chi^{-1}(\delta) \int_{L_q^n(\mathbf{A})} \chi^*(z)^{-1}(u) \omega(h \cdot \delta u) f({}^* \vec{e}_q + \vec{e}_{n-q}(z) + \vec{y}_{n-q}) dud\delta \end{aligned}$$

で, また $\tilde{\chi}(\delta) = \chi(\bar{\delta})$ とする.

この公式を導く過程で $\Theta^n(\pi)$ の cuspidality に関する条件がえられる.

THEOREM 2. $G^d(\mathbf{A})$ の既約 cuspidal 表現 π について, $\Theta^n(\pi)$ が cuspidal であるための必要十分条件は $\Theta^{n-1}(\pi \otimes \nu \circ \det) = 0$ となることである. また $\Theta^1(\pi)$ はいつでも cuspidal 表現になる.

(講演, および以前の preprint のなかで上の定理の ν が ν^{-1} となっていますが, これは misprint でした. 申し訳ありません.)

上の2つの結果から次が従う.

THEOREM 3. π を既約 *generic non-zero cuspidal* 表現とすると、 $\Theta^n(\pi)$ は $n \geq d+1$ で *non-zero* で、 $n \geq d+2$ で *cuspidal* にはならない。

ここで Theta lifting の non-vanishing については、Rallis の論法により、任意の既約 *non-zero cuspidal* 表現 π に対して、 $\Theta^{2d}(\pi)$ は *non-zero* であることが知られる。上の定理は π が *generic* ならば "2d" を "d+1" でおきかえてよいということを示している。また Theorem 1 から直接に次が導かれる。

THEOREM 4. r を半整数とする。このとき $\varphi \in \mathcal{A}_0^r(G^d)$ ならば、任意の $f \in S(\mathcal{Y}^n(\mathbf{A}))$ について $\theta^n(\varphi|f) \in \mathcal{A}^{r+1/2}(G^n)$ である。

これから $n > d$ のとき $G^d(\mathbf{A})$ からの theta lifting でえられる $G^n(\mathbf{A})$ の保型表現は *generic* にはならないことがわかる。

REFERENCES

1. S. S. Gelbart and J. D. Rogawski, *L-functions and Fourier-Jacobi coefficients for the unitary group $U(3)$* , *Invent. Math.* **105** (1991), 445 - 472.
2. S. Rallis, *On the Howe duality conjecture*, *Compositio Math.* **51** (1984), 333 - 399.
3. T. Watanabe, *Theta lifting of cusp forms on the unitary group $U(d, d)$* , preprint.