

## 2次元微分同相写像の周期点と braid

鳴門教育大学

松岡 隆

Takashi Matsuoka

2次元微分同相写像の周期点は、「braid」の概念を用いて位相的に分類することができる。周期点の braid 型に関する近年の研究によって、braid 型と写像の力学系的性質との間に密接な関係があることが明らかになってきた。ここでは、これに関する現在までの研究状況について解説する。

### § 1. 周期点の braid の定義

まず、braid (組みひも) の概念を定義する。詳しくは、[3], [21] を参照されたい。M を曲面とする。M は境界  $\partial M$  をもってよいとする。

定義 1.  $n$  を自然数とするとき、M の部分集合  $\gamma$  で丁度  $n$  個の点からなるもの全体のなす集合を  $V_n(M)$  と表す。即ち

$$V_n(M) = \{ \gamma \mid \gamma \subset M, \# \gamma = n \}.$$

$V_n(M)$  に自然な位相を入れた空間の基本群を M 上の  $n$  次

braid group といひ、 $B_n(M)$  と表わす。基点  $x_0$  を明示するときは、 $B_n(M, x_0)$  とかく。 $B_n(M)$  の元を  $n$  次 braid といふ。

braid の概念は次に示すようなより直観的な方法でも定義できる。 $I = [0, 1]$  とする。

定義 2. 直積空間  $M \times I$  内の  $n$  個の曲線の組  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  で次の条件をみたすものを  $n$  次 geometric braid といふ。(図 1 参照)

(i)  $A_1, \dots, A_n$  は互いに disjoint

(ii)  $0 \leq t \leq 1$  に対し、 $A_i \cap (M \times \{t\})$  は  $T$  度 1 点からなる。  
(この 1 点を  $(x_{A_i}(t), t)$  と表わす)

(iii)  $V_n(M)$  の 2 元、 $\{x_{A_1}(0), \dots, x_{A_n}(0)\}$  と  $\{x_{A_1}(1), \dots, x_{A_n}(1)\}$  は一致する。(この元を  $\{A_1, \dots, A_n\}$  の基点といふ。)

基点を止めたまま、geometric braid の条件をみたしながら連続変形で移り合う 2 つの  $n$  次 geometric braid は、基点を止めて同値であるといひ、その同値類を  $n$  次 braid といふ。

3 次 geometric  
braid の例

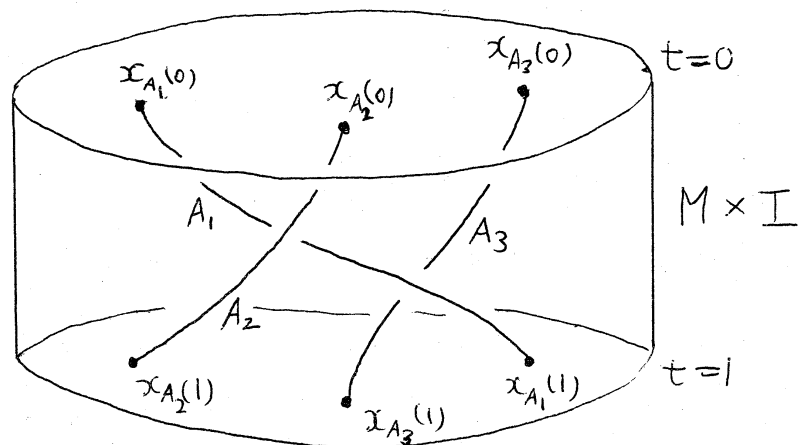


図 1

上の2つの定義は同値である。実際、geometric braid  $A_1, \dots, A_n$  が与えられたとき、 $V_n(M)$  内のループ  $\{x_{A_1}(t), \dots, x_{A_n}(t)\}$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) は  $B_n(M)$  の元を1つ定めた。逆に、 $\sigma \in B_n(M)$  に対し、 $\sigma$  を表わす  $V_n(M)$  内のループとして  $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) の形のものがとれる。ここに、各  $x_i(t)$  は  $M$  内の曲線である。このとき、 $M \times I$  内の曲線  $A_i = \{(x_i(t), t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$  の組は  $n$  次 geometric braid を与え、従って定義2の意味の  $n$  次 braid を定める。

例  $\mathbb{R}^2$  内での3個の曲線  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  が図2左の様な軌跡を描いて動くとするとき、 $\gamma(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\} \in V_3(\mathbb{R}^2)$  は  $V_3(\mathbb{R}^2)$  内のループとなり、3次 braid を定めた。これに対応する geometric braid は図2右となった。

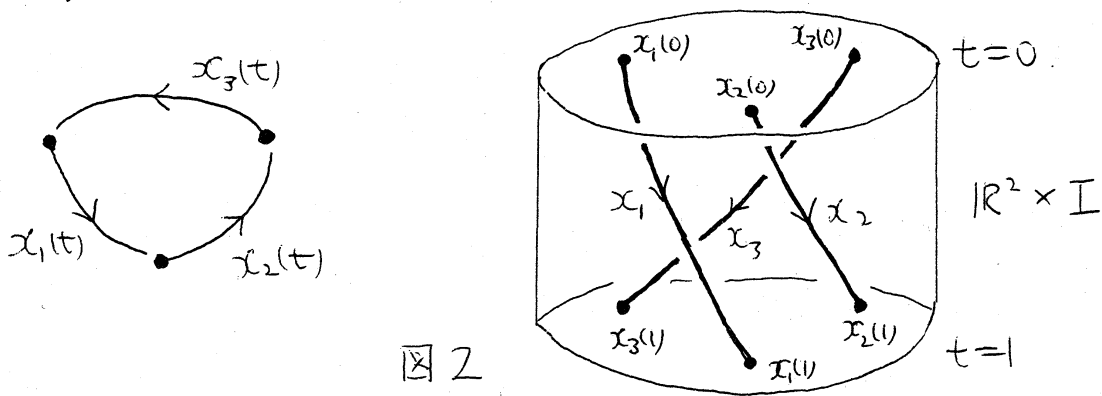
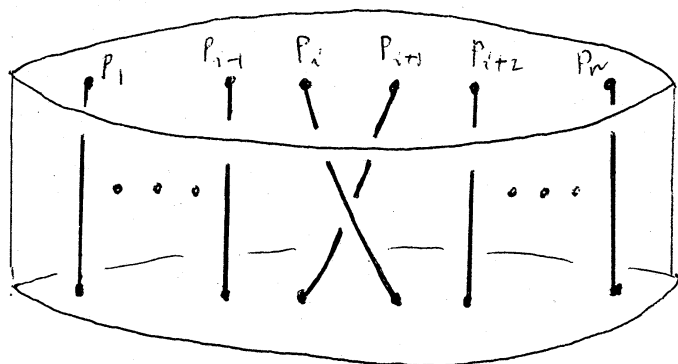
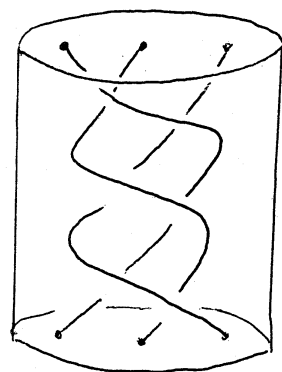


図2

$M = \mathbb{R}^2$ ,  $D^2$  (閉円板) のとき、braid group の群構造は Artin によって決定されている。( [3], Th. 1.8, Cor. (1.8.4) ).  $i=1, \dots, n-1$  に対し、図3の geometric braid により定まった  $n$  次 braid を  $\sigma_i$  とかく。

図3. braid  $\sigma_i$ 図4  $\theta_3$ 

命題1.  $M = \mathbb{R}^2, D^2$  のとき,

- (1)  $B_n(M)$  は  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  を生成元にもつ有限生成群で、次の基本関係式をもつ。

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i-j| > 1$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-2$$

- (2)  $B_n(M)$  の center  $\{\sigma \in B_n(M) \mid \sigma \alpha = \alpha \sigma \text{ for } \forall \alpha \in B_n(M)\}$  は  $\mathbb{Z}$  と同形で、 $\theta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n$  が生成元である。

注  $\theta_n$  は、平面の  $360^\circ$  回転から自然に定まる braid である。例えば、 $\theta_3$  は図4に示されたものである。

さて、「周期点の braid」を定義しよう。以後、 $f: M \rightarrow M$  を smooth embedding で id とイソトピックなものとする。 $f$  に対し、イソトピー  $\{f_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$  で  $f_0 = \text{id}, f_1 = f$  をみたすものを1つ選んでおく。 $f$  の周期点で最小周期  $n$  をもつものを単に  $n$ -周期点 と呼ぶことにする。

定義3.  $\gamma = \{x_1, \dots, x_n\} \subset M$  を  $f$  の不変集合とすると  
 き、 $\gamma$  を基点とする  $V_n(M)$  内の  $n$ - $\tau$

$$f_t(\gamma) = \{f_t(x_1), \dots, f_t(x_n)\}$$

の定めた  $n$  次 braid を  $b(\gamma)$  とかき、 $\gamma$  が定めた braid とい  
 う。必要に応じて  $b(\gamma)$  を  $b(\gamma, f)$ ,  $b(\gamma, \{f_t\})$  とかき。

$x_0$  が  $f$  の  $n$ -周期点であるとき、 $b(\text{orb}(x_0))$  を  $x_0$  が定めた braid といひ、 $b(x_0)$  とかき。ここに、 $\text{orb}(x_0)$  は  $x_0$  の軌道を示す。

例  $f$  を Horseshoe 写像とし、イソトピー  $f_t$  を図5の様  
 に選ぶ。このとき、記号列 (011) に対応する  $f$  の 3-周期  
 軌道  $\gamma = \{x_1, x_2, x_3\}$  (図6) が定めた braid  $b(\gamma)$  は、図7  
 が示す様に  $\sigma_2 \sigma_1$  となる。

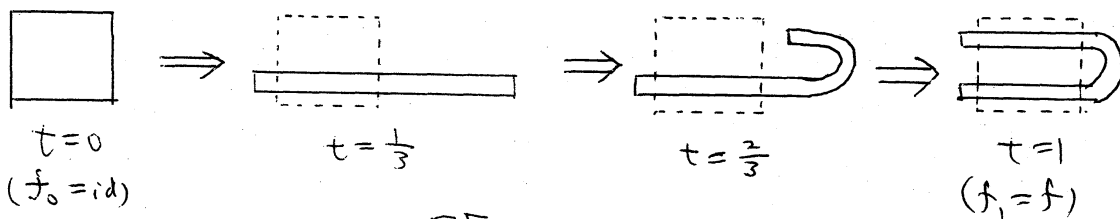


図5

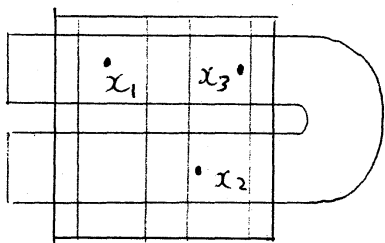


図6. 3-周期軌道  
 $\gamma = \{x_1, x_2, x_3\}$

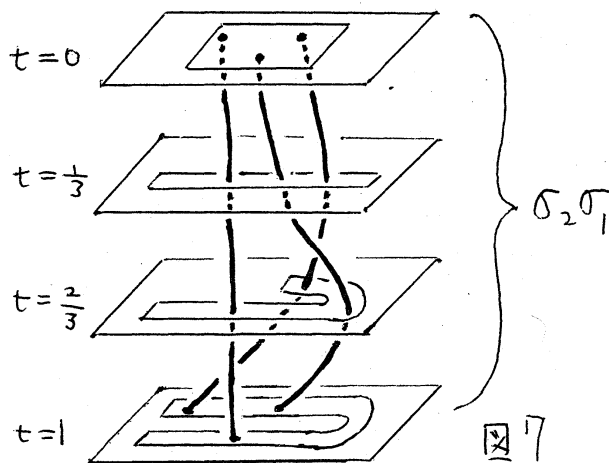


図7

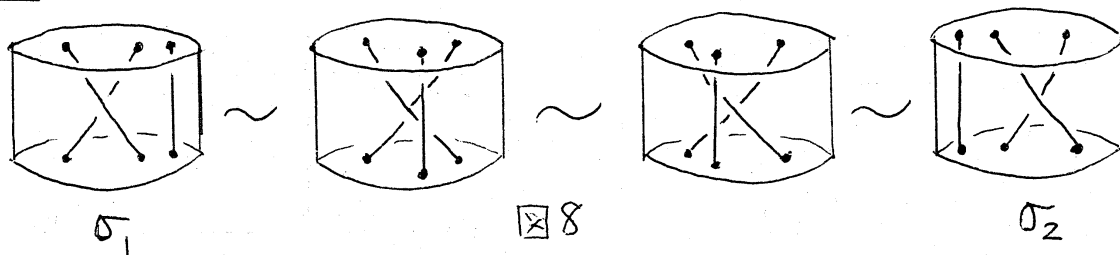
注意  $b(\gamma)$  の定義は、イソトピー  $\{t_t\}$  の取り方に依存する。例えば、 $M = \mathbb{R}^2, D^2$  のとき、 $\{g_t\}$  を別のイソトピーとすると、 $\exists m \in \mathbb{Z}, b(\gamma, \{g_t\}) = \theta_n^m b(\gamma, \{f_t\})$  となる。

braid の定義では基点  $\gamma_0$  が固定されているので、周期点の分岐問題や次章で述べる周期点の順序などを考える際には扱いが不便である。そこで、braid の定義をゆきめし、基点  $\gamma_0$  によらない概念である「braid type」を導入する。

#### 定義 4.

- (1) geometric braid の条件をみたしたから連続変形で移り合う 2 つの  $n$  次 geometric braid は同値であるという。勿論変形において、基点は動いてもよい。
- (2)  $\sigma \in B_n(M, \gamma_0), \sigma' \in B_n(M, \gamma'_0)$  が同値 ( $\sigma \sim \sigma'$  とかく)   
 $\iff$   $\sigma, \sigma'$  を表す geometric braid  $\{A_1, \dots, A_n\}, \{A'_1, \dots, A'_n\}$  が同値
- (3)  $\sigma \in B_n(M, \gamma_0)$  の同値類を  $\sigma$  が定める braid type といひ、 $[\sigma]$  とかく。

例  $B_3(\mathbb{R}^2)$  において、 $\sigma_1 \sim \sigma_2$  である。(図 8 参照)



次の命題は  $n$  次 braid type 全体の集合が braid group の共役類の集合と同一視できる事を示す。

命題 2.

(1)  $\sigma, \sigma' \in B_n(M, \gamma_0)$  に対し

$\sigma \sim \sigma' \iff \sigma$  と  $\sigma'$  は共役,

i.e.  $\exists \alpha \in B_n(M, \gamma_0), \sigma' = \alpha \sigma \alpha^{-1}$

(2)  $B_n(M, \gamma_0) / \text{共役} \longrightarrow \{M \text{ 上の } n \text{ 次 braid type}\}$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $\sigma$  の共役類  $\longrightarrow [\sigma]$

は全単射

定義 5 不変集合  $\gamma$  の braid  $b(\gamma)$  が定める braid type  $[b(\gamma)]$  を  $\gamma$  の braid type と呼び、 $\beta(\gamma)$  とかく。

容易にわかるように、不変集合の braid type は次の意味でパラメータの変化に対し不変である。

命題 3.  $f_\mu : M \rightarrow M$  をイソトホーとし、 $\gamma_\mu$  を  $M$  に関し連続な  $f_\mu$  の不変集合で  $\# \gamma_\mu = n$  を満たすとする。

$\implies \gamma_\mu$  の braid type  $\beta(\gamma_\mu, f_\mu)$  は一定

この命題によって、周期点の braid type は、周期点の分枝について調べるときに有用な不変量であることがわかった。実

際. Sannami [29] は braid type を用いて, Henon 写像の周期点の分岐について調べている。

注 周期点の braid type から knot が定まる。周期点の knot 型については, Holmes, Williams [5] による詳しい研究がある。( [33], [34] など)

## §2. braid の分類

ここでは, 力学系理論において重要な意味をもつ, braid の分類を与える。この分類は コンパクト曲面上の同相写像に関する Nielsen-Thurston の分類を通して行なわれる。まず Nielsen-Thurston 理論を簡単に紹介しよう。( [10], [11], [32] などを参照)

定義6 コンパクト曲面  $N$  上の同相写像  $g: N \rightarrow N$  が reducible

$\iff \exists C_1, \dots, C_k : \text{disjoint essential curve s.t.}$

$$(i) \quad \forall i \neq j, \quad C_i \not\sim C_j$$

$$(ii) \quad \forall i, \exists j \text{ s.t. } g(C_i) \sim C_j$$

ここに essential curve とは, 1点や  $\partial N$  の成分にホモトピックでない単純閉曲線, 「 $\sim$ 」はイソトピックを表す。 $g$  が reducible でないとき, irreducible (既約) という。



定理1 (Nielsen-Thurstonの分類定理)

$g: N \rightarrow N$  をコンパクト曲面  $N$  上の既約な同相写像とすとき、次のいずれか一方のみがなりたつ。

(i)  $g$  は 周期的 i.e.  $\exists m \in \mathbb{N}, g^m \sim id$

(ii)  $g$  は pseudo-Anosov (pA) 型

i.e.  $\forall C: \text{essential curve}, \forall m \in \mathbb{N}, f^m(C) \times C$

更に、 $g$  が周期的  $\implies \exists g': N \rightarrow N$  同相写像,  $g \sim g', (g')^m = id$

$g$  が pA 型  $\implies g \sim \exists$  pA 写像 (定義省略)

上の  $g'$  や pA 写像を、 $g$  の Nielsen-Thurston 標準形 といふ。

Nielsen-Thurston 標準形は、conjugacy を除いて一意に定まる。

braid の分類に入る前に、もう一つの準備として写像の「blow-up」について述べる。smooth embedding  $f: M \rightarrow M$  の不変集合  $\gamma = \{x_1, \dots, x_n\}$  に対し、 $\hat{M}_\gamma$  又は単に  $\hat{M}$  で、 $M$  の  $\gamma$  の blow-up を表わす ([5])。  $\hat{M}_\gamma$  は  $M$  から  $\gamma$  を取り去って、代わりに  $n$  個の単位円周  $S_1, \dots, S_n$  をくっつけたものである。(図9)。

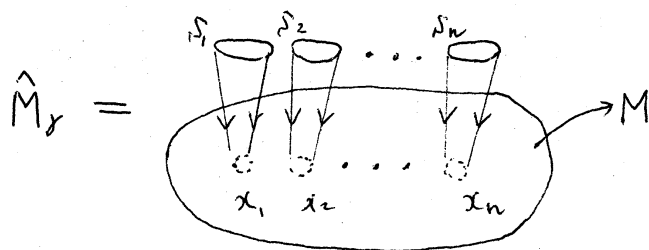


図9

$f$  を  $\hat{M}_\gamma$  に自然に拡張した写像を  $\hat{f}_\gamma: \hat{M}_\gamma \rightarrow \hat{M}_\gamma$ , または  $\hat{f}: \hat{M} \rightarrow \hat{M}$  とかき,  $f$  の  $\gamma$  での blow up と呼ぶ.  $\hat{f}_\gamma$  は,  $S_i$  上では次で定義された.

$$\hat{f}_\gamma|_{S_i}: S_i \rightarrow S_j, \quad \hat{f}_\gamma(v) = \frac{Df(x_i)v}{|Df(x_i)v|} \quad (v \in S_i)$$

ここに,  $j$  は  $f(x_i) = x_j$  で定まるもので,  $Df(x_i)$  は  $f$  の  $x_i$  での微分,  $S_i$  は  $T_{x_i}M$  の単位円周とみなす.

例  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} x$ ,  $\gamma = \{0\}$  のとき,  $\hat{f}_\gamma$  は図10に示されたような写像となる.

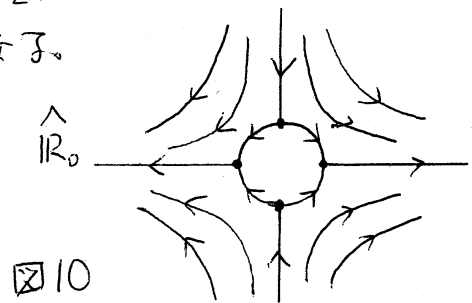


図10

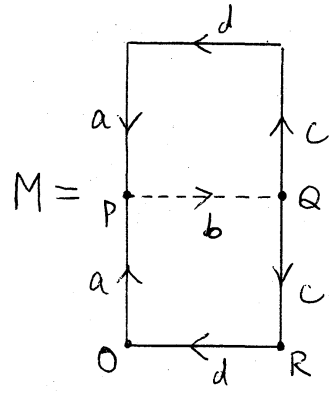
以上の準備の下, braid の分類に入った. 以後  $M$  はコンパクトとする.  $b \in B_n(M, \gamma)$  が任意に与えられたとする.  $b$  に対し, イソトピー  $\varphi_t: M \rightarrow M$  で,  $\varphi_0 = \text{id}$ ,  $\varphi_1(\gamma) = \gamma$ ,  $b(\gamma, \{\varphi_t\}) = b$  を満たすものを1つ選ぶ. このような  $\varphi_t$  が存在することは容易にわかる.

### 定義7 (braid の分類)

$b \in B_n(M)$  が 既約, 周期的, または PA型

$\iff$   $(\varphi_t)_\gamma: \hat{M}_\gamma \rightarrow \hat{M}_\gamma$  がそれぞれ 既約, 周期的, または PA型

例.  $\sigma, \sigma_2^{-1} \in B_3(D^2)$  は PA 型であった。これを示すために  $b(x, \{\varphi_t\}) = \sigma, \sigma_2^{-1}$  とした  $\varphi_t: D^2 \rightarrow D^2$  を構成しよう。  $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$  とし  $M = T^2 / x \sim -x$  とおく。  $M$  は  $\mathbb{R}^2$  内の長方形領域  $[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$  において 図11 に示した矢印の通り、辺  $a, c, d$  を貼り合わせると  $S^2$  と同相である (図12)。



$P = (0, \frac{1}{2})$   
 $Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$   
 $R = (\frac{1}{2}, 0)$

図11

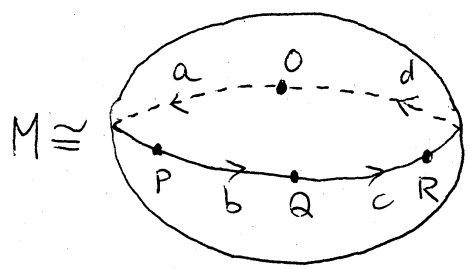


図12

行列  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  が導く同相写像  $\varphi: M \rightarrow M$  は  $O$  を不動点としてもち、自然に同相写像  $\varphi: \hat{M}_0 \rightarrow \hat{M}_0$  に拡張される。  $\varphi$  は辺  $a, b, c, d$  を図13の様に移す。また、  $\hat{M}_0 \cong D^2$  である。

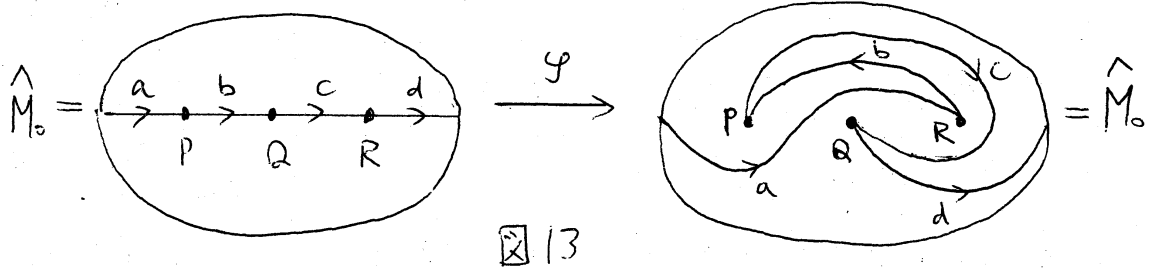


図13

よって  $\gamma = \{P, Q, R\}$  とせば、  $\varphi_0 = id, \varphi_1 = \varphi$  を与えた適當なイットセー  $\varphi_t: \hat{M}_0 \rightarrow \hat{M}_0$  に対し、  $b(x, \{\varphi_t\}) = \sigma, \sigma_2^{-1}$  となることがわかる。 また、  $(\varphi_t)_\gamma (= \hat{\varphi}_t)$  は  $T^2$  上の Anosov 微分

同相写像から導かれた事を用いるは、PA型となったことがわ  
 かる。よ、 $\sigma, \sigma'$  は PA型であった。 ([11, p.217])

定義8.  $b \in B_n(M)$  が PA型であったとき、定義7の  $(\hat{\Psi})_b$  に  
 イソトピックな PA写像を  $\Phi_b: \hat{M}_b \rightarrow \hat{M}_b$  とし、 $\pi_b: M \rightarrow M$   
 で、 $\Phi_b$  から定まった同相写像を表す。また、 $b$  のトポロジカ  
 ル・エントロピー  $h(b)$  を  $h(\pi_b) (= h(\Phi_b))$  として定義する。  
 $\pi_b$  の conjugacy class, 及び  $h(b)$  は、 $b$  により一意的に定まる。

Thurston [32], Asimov-Franks [1] による次の定理は、上に  
 述べた braid の分類の力学系理論における重要性を示す。

定理2.  $f: M \rightarrow M$  を id とイソトピックな smooth  
 embedding とし、 $\gamma$  を  $f$  の有限不変集合とする。このとき、

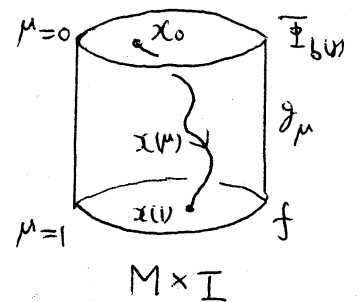
$L(\gamma)$  が PA型

$\Rightarrow$  (i)  $h(f) \geq h(b) > 0$

(ii)  $\forall p \in \mathbb{N}, \# \{f \text{ の } p\text{-周期点}\} \geq \# \{\pi_{b(f)} \text{ の } p\text{-周期点}\}$

(iii)  $\pi_{b(f)}$  の任意の  $p$ -周期点  $x_0$  に

対し、 $\pi_{b(f)}$  から  $f$  へのイソトピー  
 $g_\mu (0 \leq \mu \leq 1)$  と、 $g_\mu$  の  $p$ -周期点  
 $x(\mu)$  で  $x(0) = x_0$  をみたす  
 ものが存在する。



この定理は、 $PA$ 型周期点をもつ力は力学系的に複雑な写像であることを示し、更に、 $\tau$ の複雑さは、少なくとも $PA$ 写像の複雑さ以上であることを示している。

braidの分類に関する判定法として、以下に述べる結果が得られた。

定理3 (Boyland [6]).

$n$ : 素数,  $b \in B_n(D^2)$ ,  $\text{perm}(b)$  が cyclic

$\implies$  (i)  $b$  は 既約

(ii)  $e(b) \not\equiv 0 \pmod{n-1}$ , または  $e(b) = k(n-1)$ ,  $b^n \neq \theta_n^k$

$\implies b$  は  $PA$ 型

ここに、 $\text{perm}(b)$  は  $b$ に対応する置換、 $e(b)$  は  $b$ の指数和 (即ち、 $b = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots \sigma_{i_r}^{\varepsilon_r}$  と表わすとき、 $e(b) = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_r$ )。

例  $\sigma_1, \sigma_2^{-1} \in B_3(D^2)$  に対応する置換は  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  が cyclic だから、 $\sigma_1, \sigma_2^{-1}$  は 既約。また、 $e(\sigma_1, \sigma_2^{-1}) = 0$ ,  $(\sigma_1, \sigma_2^{-1})^3 \neq \theta_3^0 (= \text{単位元})$  だから、 $\sigma_1, \sigma_2^{-1}$  は  $PA$ 型。Horse-shoe写像の5-周期軌道で記号列  $(00111)$ ,  $(00101)$  に対応するものの braid は、いずれも  $\sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4$  となるが、この指数和は6で、 $n-1=4$ の倍数でないから、これも  $PA$ 型である。

定理4 (Kobayashi [17])  $b \in B_n(D^4)$  を閉じてできる link が、ソリッド・トラスの中で graph link と同値でない  
 $\Rightarrow b$  は PA 型の braid を部分として含む ([18], [19] も参照)

### その他の結果

- (1) Benardete, Gutierrez, Nitecki [2] は  $b \in B_n(D^4)$  が既約同期的、または PA 型であることを判定するための完全なアルゴリズムを与えた。
- (2) Llibre, Mackay, Quaschi [16], [20] は genus が 0 または 1 である曲面に対し、エントロピーが 0 である braid を帰納的方法で決定した。
- (3) Huang [13], [14] は  $T^2$  上で braid を分類している。

### §3. braid type の シャルコフスキー型順序

ここでは、1次元写像の周期点の存在に関するシャルコフスキーの定理のアナロジーが、2次元微分同相写像について成り立つことを示す。この一般化において、braid type の概念が本質的な役割を果たす。

まず、シャルコフスキーの定理を述べよう ([4], [30], [31] 参照)。自然数全体を次の順序に並べる。(これをシャルコフスキー順序という。)

$$3, 5, 7, 9, \dots, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, \dots, 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 7, \dots$$

$$\dots, 2^4, 2^3, 2^2, 2, 1$$

定理5 (Sharkovskii)  $I = \mathbb{R}, [0, 1]$  とする。  $f: I \rightarrow I$  を連続とする。このとき、  $f$  が  $n$ -周期点をもてば、シャルコフスキー順序で  $n$  より右にある  $\forall m$  に対し、  $f$  は  $m$ -周期点をもつ。

系  $f_\mu: I \rightarrow I$  ( $0 \leq \mu \leq 1$ ) は連続で、  $f_0$  は周期点をもたず、  $f_1$  はすべての周期の周期点をもつとする。  $\mu$  を  $0$  から  $1$  まで動かすとき、初々  $n$ -周期点が登場するパラメータ値を  $M_n$  とかくとき、次が成り立つ。

$$M_1 \leq M_2 \leq M_{2^2} \leq M_{2^3} \leq \dots \leq M_{2 \cdot 7} \leq M_{2^2 \cdot 5} \leq M_{2^2 \cdot 3} \leq \dots$$

$$\dots \leq M_{2 \cdot 7} \leq M_{2 \cdot 5} \leq M_{2 \cdot 3} \leq \dots \leq M_7 \leq M_5 \leq M_3$$

(シャルコフスキー順序の逆の順序)

この系が示すように、シャルコフスキーの定理の2次元版を作ることができれば、2次元写像の分岐パターンへの構造に関する情報を得ることが出来る。

さて、2次元の問題に移ろう。次の集合を定義する。

$$BT_n(M) = \{ \beta : n\text{-次 braid type} \mid \text{perm}(\beta) \text{ が cyclic} \}$$

$$BT(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} BT_n(M)$$

$E$  を次のいずれかとする。

$$\text{Emb}_0(M) = \{ f: M \rightarrow M \text{ smooth embedding} \mid f \sim \text{id} \}$$

$$\text{Diff}_0(M) = \{ f: M \rightarrow M \text{ diffeo} \mid f \sim \text{id} \}$$

$$\text{Diffo}(M, \text{rel } \partial M) = \{ f \in \text{Diff}_0(M) \mid f = \text{id on } \partial M \}$$

このとき、 $\text{BT}(M)$  の元の間にはチャルコフスキ - 型順序「 $\geq$ 」が次で定義される。

定義 9.  $\beta, \beta' \in \text{BT}(M)$  に対し、

$$\beta \geq \beta'$$

$\iff$  braid type が  $\beta$  である周期点をもつ写像  $f \in E$

は、必ず braid type が  $\beta'$  である周期点をもつ。

勿論、この定義を意味するものにするためには、順序集合  $(\text{BT}(M), \geq)$  の構造を決定する必要があった。構造の完全な決定は現時点では望むべくもないが、いくつかの部分的結果は得られていた。以下それをまとめる。braid type  $\beta = [b]$  は、 $b$  が既約、周期的、PA型であることを従って、 $b$  を既約、周期的、PA型と呼ぶことにする。

定理 6 (Boyland [9])  $(\text{BT}(M), \geq)$  は半順序集合である。

定理 7 (Boyland [6])  $\beta = [b]$  が PA型ならば、

$$\{ \beta' \in \text{BT}(M) \mid \beta' \leq \beta \} = \text{bt}(\text{Inv } b).$$



ここに  $bt(\mathbb{R}^2) = \{ \beta(\gamma, \mathbb{R}^2) \mid \gamma: \mathbb{R}^2 \text{ の周期軌道} \}$ .

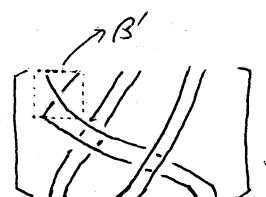
特に  $E = \text{Diffeo}(D^2, \text{rel } \partial D^2)$  なるは.

$\beta \cong$  無限個の braid type

定義 10 対応  $BT(D^2) \times BT(D^2) \rightarrow BT(D^2)$  を次のやり方で定義する.

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \\ (\beta, \beta') & \longmapsto & [\beta, \beta'] \end{array}$$

で定義する.

$$\beta = \left[ \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right], \quad \beta' = \left[ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right] \text{ かつ } [\beta, \beta'] = \left[ \begin{array}{c} \beta' \\ \beta \end{array} \right]$$


注  $[\dots[[\beta_1, \beta_2], \beta_3], \dots, \beta_k]$  を  $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k]$  とかくとき次が成り立つ ([8, p. 6]).

$\forall \beta \in BT(D^2), \exists \beta_1, \dots, \beta_k \in BT(D^2)$ , 既約 s.t.

$$\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k] \quad (\text{既約分解})$$

定理 8 (Boyland [8])  $\beta_0 \in BT(D^2)$  を既約とする. このとき.

(i)  $\beta \cong \beta' \Rightarrow [\beta_0, \beta] \cong [\beta_0, \beta']$

(ii)  $\beta < [\beta, \beta_0]$

(iii)  $\beta_0 \cong \beta' \Rightarrow [\beta, \beta_0] \cong [\beta, \beta']$

順序  $\cong$  の具体的な計算が次の 2 つの論文で行なわれていた.

命題 4 ([25])  $E = \text{Emb}_0(\mathbb{R}^2)$  とする。  $[\sigma_1^{i_1} \sigma_2^{-1} \dots \sigma_1^{i_d} \sigma_2^{-1}] \in \text{BT}_3(\mathbb{R}^2)$  を  $\beta(i_1, \dots, i_d)$  とかくとき、

$$(1) \quad \beta(i_1, \dots, i_d) > [\sigma_1^j] \iff -d \leq j \leq i_1 + \dots + i_d$$

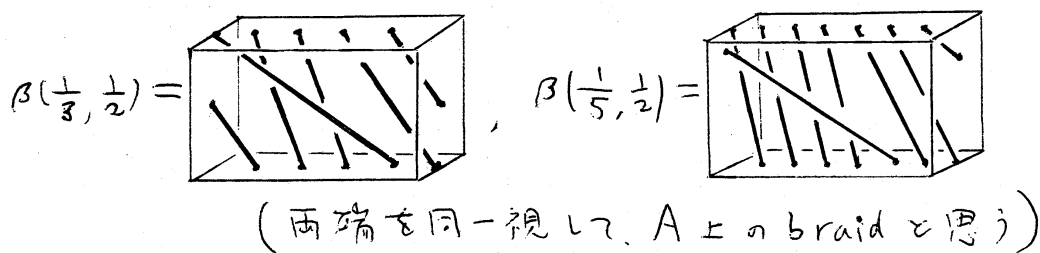
$$(2) \quad i \geq 3 \text{ と } \exists, \beta(i) > \beta(i-2), \theta_3 \cdot \beta(i-2)$$

$$(3) \quad \beta(1) > [\sigma_1, \sigma_2], [\sigma_1, \sigma_2]^{-1}$$

定理 9 (Boyland [7])  $A = \text{annulus}$  とし、  $E = \text{Diff}_0(A)$  とする。  
 $\forall a, b \in \mathbb{Q}, 0 < a < b < 1$ , に対し、  $\text{BT}(A)$  の 2 元  $\beta(a, b)$  が定義されたが (定義は省略)、これに関し次が成り立つ。

$$\beta(a, b) \geq \beta(a', b') \iff (a, b) > (a', b')$$

例  $\beta(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) < \beta(\frac{1}{5}, \frac{1}{2})$  である。 ことに、



注. この章での話に関連した話題として次の結果が成った。

定理 10 (Gambaudo [12], Matsumoto [22, Th. 0.1])

$f \in \text{Emb}_0(D^2)$  の任意の周期軌道  $\gamma$  で周期  $> 1$  であるものに対し、  $\gamma$  と link する  $f$  の不動点が存在する。

#### §4. braid group の Burau 表現の応用

ここでは  $M = D^2, \mathbb{R}^2$  の場合に, braid group の Burau 表現を用いれば,  $f$  の周期点の個数に関し詳しい情報が得られることを示す。

$M = D^2, B_n = B_n(D^2), \Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  とおく。  $\Lambda$  は  $t, t^{-1}$  上の Laurent 多項式環で

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i \mid a_i \in \mathbb{Z}, \text{有限個の } i \text{ を除いて } a_i = 0 \right\}$$

である。

定義 11 (被約 Burau 表現)  $R: B_n \rightarrow GL_{n-1}(\Lambda)$  を次で定義する。

$$R(\sigma_i) = R_i \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

ここに  $GL_{n-1}(\Lambda)$  は  $\Lambda$  の元を成分とする  $(n-1)$  次正方行列で逆行列をもつもの全体のなす群で,  $R_i$  は次で与えられる。

$$R_1 = \left[ \begin{array}{cc|c} -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & I_{n-3} \end{array} \right] \quad R_{n-1} = \left[ \begin{array}{cc|c} I_{n-3} & & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ & t & -t \end{array} \right]$$

$$i = 2, \dots, n-2 \text{ に対し} \quad R_i = \left[ \begin{array}{ccc|cc} I_{i-2} & & & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & t & -t & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & & & 0 & I_{n-i-2} \end{array} \right]$$

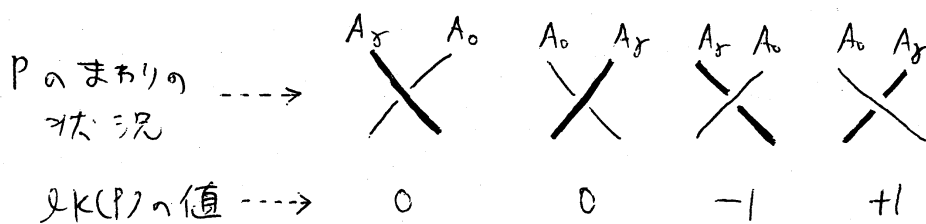
注  $R_i$  の逆行列は次の様になる。

$$R_1^{-1} = \left[ \begin{array}{cc|c} -t^{-1} & t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & I_{n-3} \end{array} \right] \quad R_{n-1}^{-1} = \left[ \begin{array}{cc|c} I_{n-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -t^{-1} \end{array} \right] \quad R_i^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|cc} I_{i-2} & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t^{-1} & t^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & & I_{n-i-2} \end{array} \right]$$

さて、 $\gamma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  を smooth embedding  $f: D^2 \rightarrow D^2$  の不変集合とし、 $x_0$  を  $\hat{f}_\gamma: \hat{D}_\gamma^2 \rightarrow \hat{D}_\gamma^2$  の不動点とする。このとき  $x_0$  が  $\gamma$  に何回絡んでいるかを表す linking number  $lk(x_0, \gamma)$  を次で定義する。

### 定義 12.

- (1)  $x_0 \in D^2 - \gamma$  の場合:  $b(\{x_0\}, \{f_t\})$  及び  $b(\gamma, \{f_t\})$  にそれぞれ対応する geometric braid を  $\{A_0\}, \{A_1, \dots, A_n\}$  とする。 $A_\gamma = A_1 \cup \dots \cup A_n$  とおき  $A_0$  と  $A_\gamma$  の各交差点  $P$  に対し、 $lk(P) \in \mathbb{Z}$  を次のように対応させた。 ([8, p.21])



このとき、 $lk(x_0, \gamma) = \sum_{P \in A_0 \cap A_\gamma} lk(P)$  と定義する。

- (2)  $\exists i, x_0 \in \mathcal{D}_i$  の場合:  $f$  を少し修正すれば  $x_0 \in D^2 - \gamma$  となるようにできるから、(1) で定めた値を  $lk(x_0, \gamma)$  とする。

例. 図14の場合,  $A_0$  と  $A_y$  の2つの交点の  $lk$  の値は0と1であるから,  $lk(x_0, \gamma) = 1$  となる。

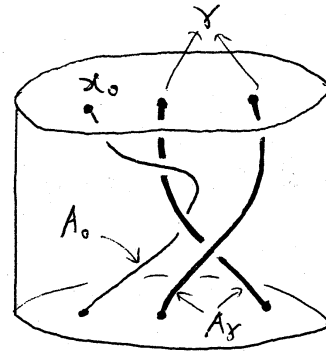


図14

$f$  の周期点の個数の評価は, 次の定理から導かれます。

定理11 [23]  $f \in Emb_0(D^2)$  とし,  $\gamma$  を  $f$  の有限不変集合とするとき,  $\hat{f}_\gamma: \hat{D}_\gamma^2 \rightarrow \hat{D}_\gamma^2$  に対し, 次の成り立つ。

$$-tr R(b(\gamma)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} Ind(N_i(\hat{f})) t^i$$

ここに,  $tr$  は行列のトレースを表し,  $Ind(\cdot)$  は不動点指数である, また,  $N_i(\hat{f}) = \{x \in Fix(\hat{f}) \mid lk(x, \gamma) = i\}$ 。

この定理は,  $b(\gamma)$  の Burau 行列のトレースを計算すれば, 各  $i \in \mathbb{Z}$  に対し,  $\gamma$  と  $i$  回絡む不動点の集合の不動点指数 (女子意味での個数) がわかることを示している。( [27, (5.5)] を参照)

例  $f$  を図15で表わされる generalized horse-shoe とする。

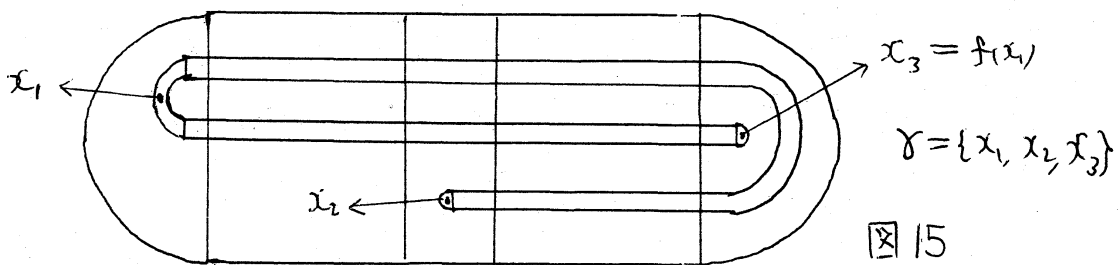


図15

この attractive  $t_2$  一周期軌道を  $\gamma$  とかくと,  $b(\gamma) = \sigma_1 \sigma_2^{-1}$  である。このとき

$$R(b(\gamma)) = R_1 R_2^{-1} = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -t^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & -t^{-1} \\ 1 & -t^{-1} \end{pmatrix}$$

よって,  $-\text{tr} R(b(\gamma)) = t + t^{-1} - 1$ . ゆえに

$$\text{Ind}(N_i(f)) = \begin{cases} 1 & i=1, -1 \\ -1 & i=0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となり,  $f$  は  $\gamma$  の linking number が  $1, -1, 0$  である個々の不動点をモブすることがわかった。

定理11において Burau 表現というものが現れる理由を説明しよう。  $f$  が generalized torse-shoe で次の条件をみたす場合を考えた。

(i) 長方形領域  $Q_1, \dots, Q_{n+1}$  が存在して,  $D^2 = (Q_1 \cup \dots \cup Q_{n+1})$  では  $f$  は縮小写像である

(ii)  $Q_{ij} = Q_j \cap f^{-1}(Q_i)$  の連結成分を  $Q_{ij,1}, Q_{ij,2}, \dots, Q_{ij,a_{ij}}$  とかくとき,  $f$  は各  $Q_{ij,k}$  上で線形

例えば, 図16で示わすれ  $f$  は条件をみたし,  $a_{11} = a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{33} = 1$ , その他  $a_{ij} = 0$  である。  $(n-1)$  次行列  $(a_{ij})$  は  $f$  の構造行列となった。  $f$  の attractive  $t_2$  周期軌道を  $\gamma$  とし,  $A_\gamma$  を  $f$  が定めた geometric braid とする。各  $\theta_{ijk}$  と  $A_\gamma$  の linking number  $l_{ijk}$  を定義12と同様に定義する。

また  $\Delta_{ijk} = \begin{cases} -1 & \text{子が不安定方向を逆向きに移す} \\ 1 & \text{同じ向きに移す} \end{cases}$

と置く。このとき、行列

$$\Gamma_f = \left( \sum_{k=1}^{a_{ij}} \Delta_{ijk} t^{l_{ijk}} \right)_{1 \leq i, j \leq n-1}$$

は Burau 行列  $R(b(\gamma))$  と一致することわかった。例えば、図16  
 の場合 (この場合、 $b(\gamma) = \sigma_2$  である)。

$$\Delta_{111} = \Delta_{211} = \Delta_{231} = \Delta_{331} = 1, \Delta_{221} = -1$$

$$l_{211} = l_{221} = 1, l_{111} = l_{231} = l_{331} = 0$$

だから (図17 参照)、 $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & -t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_2 = R(b(\gamma))$  となる。更に

$-\text{tr} \Gamma_f = \sum_{x \in \text{Fix}(f)} \text{Ind}(x) t^{lk(x, \gamma)}$  となる ( $\because Q_{ijk} \cap \text{Fix}(f) = \{x_{ijk}\}$  であるが、このとき

$-\Delta_{ijk} = \text{Ind}(x_{ijk}), l_{ijk} = lk(x_{ijk}, \gamma)$  である)。

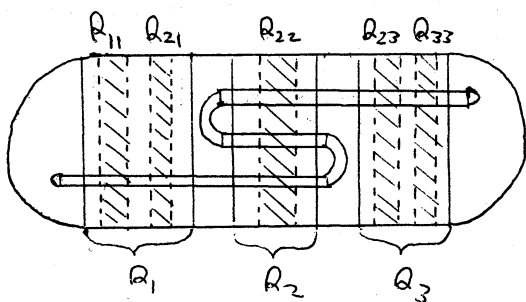


図16

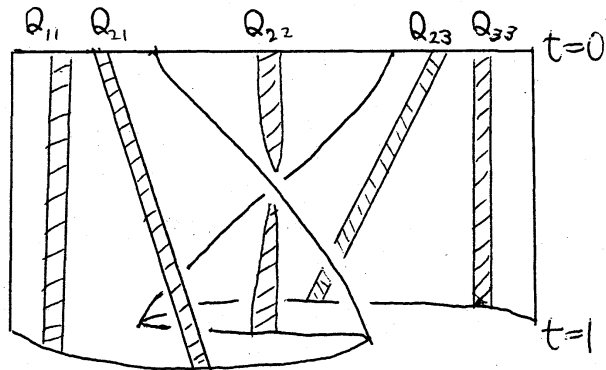


図17

$x \in N_x(\hat{f}^m)$  かつ  $i$  と  $m$  が互いに素ならば、 $x$  は  $\hat{f}$  の  $m$ -周期点である。また  $\#\{lk(x, \gamma) \mid x \in \text{Fix}(\hat{f}^m), x \in S_1 \cup \dots \cup S_n\} \leq n$   
 だから、定理11より  $f$  の周期点の個数に関し次がわかった。

系.  $b \in B_n(D^2)$  に対し  $r_i(b) \in \mathbb{Z}$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) を次で定義す  
 了。

$$-\text{tr} R(b) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i(b) t^i$$

このとき、次が成り立つ

$$\#\{f \text{ の } m\text{-周期点}\}$$

$$\geq \#\{i \in \mathbb{Z} \mid r_i(b)^m \neq 0, i \text{ は } m \text{ と素}\} - n$$

定理11を用いて、 $\mathbb{R}^2$  上の embedding に関する次の定理を導く  
 ことができました。

定理12 [26]  $f \in \text{Emb}_0(\mathbb{R}^2)$ ,  $\gamma: f$  の不変集合,  $\#\gamma = n$  とし,  
 $\gamma$  の元はすべて hyperbolic とする。このとき

$$m > 2n, r_i(b)^m \neq 0, i \text{ と } m \text{ は互いに素}, i \neq 0 \pmod{n}$$

$\Rightarrow f$  の  $m$ -周期点で、 $\gamma$  の linking number が  $i$  であるものが存在する。

注 Huang - Jiang [15] は、定理11とその系をトラスドに拡張している。また、定理11のわかりやすい証明も与えている。  
 さて、最後に  $\text{tr} R(b)$  を具体的に計算した結果を紹介しよう [28]。  $B_n$  において

$$p = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}, p(i_1, \dots, i_d) = p \sigma_{i_1} \cdots p \sigma_{i_d}, \theta = \theta_n$$



とあるとき、次の braid の表示法が得られる。

命題 5.  $\forall b \in B_n, \exists i_1, \dots, i_d > 0, \exists m \in \mathbb{Z}$  s.t.  
 $[b] = [\theta^m P(i_1, \dots, i_d)]$

注 上の  $\{i_1, \dots, i_d, m\}$  は一意的でない。

braid type のこの表示法を用いて、Burau 行列のトレースを次の様に計算することができた。

命題 6.  $\text{tr } R(\theta^m P(i_1, \dots, i_d))$   
 $= -(-t)^{d+mn(n-1)} \sum_{P, Q} \left\{ (-1)^{\#Q} (-t)^{\sum_{i \in Q} i_i} \prod_{P \in P} J_{i_P} \right\}$

ここに、 $J_i = -t + t^2 - \dots + (-t)^{i-1}$  であり、和  $\sum_{P, Q}$  は次を満たす  $P, Q \subset \{1, \dots, d\}$  すべてを合わせた。

(i)  $P \cap Q = \emptyset, P \cup Q \neq \emptyset$

(ii)  $\forall p \in P$  に対し、 $1 \leq i \leq n-2$  s.t.  $p+i \in P \cup Q$




(iii)  $\forall q \in Q$  に対し、 $q+1, \dots, q+n-2 \notin P \cup Q$


$q+n-1 \in P \cup Q$

ただし、 $\{1, \dots, d\}$  における足し算は mod  $d$  で考えた。



条件をみたす、 $P, Q$  の取り方は、次のように存在するところか

リヤすい。  $d$  個の箱を並べることにする。ただし



$i \in P$  のとき  }  
 $i \in Q$  のとき  } の形の箱を選ぶとする。  
 $i \notin P \cup Q$  のとき  }

例えば  $d=5$ ,  $P=\{2\}$ ,  $Q=\{3\}$  のとき、並べるとなると 5 個の箱は  となる。このとき、次が成り立つ。

命題 6 の条件 (ii)

$\Leftrightarrow$   の後には高々  $(n-3)$  個の  が続く

条件 (iii)

$\Leftrightarrow$   の後には高々  $(n-2)$  個の  が続く

例  $n=d=5$  のとき、可能な  $P, Q$  の選び方は

$\left\{ \begin{array}{l} \text{|||||} \cdots 1 \text{通り} \\ \text{|||||} \quad \text{|||||} \quad \text{|||||} \quad \text{|||||} \quad \text{|||} \end{array} \right.$

$\cdots$  巡回置換を施したものを数えて、25通り

の合計 26通りある。

$-\text{tr} R(b)$  のある項の係数が正であれば、 $b$  は PA 型の braid を含むから、命題 6 を用いて、PA 型 braid のあるクラスを見い出すことができる。また  $b(\text{Fix}(t))$  となりうる braid の形を調べることができた。[28]

## REFERENCES

1. D. Asimov and J. Franks: Unremovable closed orbits, *Geometric Dynamics, Lecture Notes in Math.* 1007(1983), Springer, 22-29. Revised version, preprint.
2. D. Benardete, M. Gutierrez, and Z. Nitecki: Braids and the Nielsen-Thurston classification, preprint.
3. J.S. Birman: Braids, Links, and Mapping Class Groups, *Ann. Math. Studies* 82, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974.
4. L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz and L.S. Young: Periodic points and topological entropy of one dimensional maps, *Lecture Notes in Math.* 819 (1980), Springer, 18-34.
5. R. Bowen: Entropy and the fundamental group, *The Structure of Attractors in Dynamical Systems, Lecture Notes in Math.* 668 (1978), Springer, 21-29.
6. P. Boyland: Braid types and a topological method of proving positive entropy, preprint.
7. P. Boyland: An analog of Sharkovski's theorem for twist maps, *Hamiltonian Dynamical Systems, Contemporary Math.* 81 (1988), A.M.S., 119-133.
8. P. Boyland: Braid types of periodic orbits for surface homeomorphisms, *Notes on Dynamics of Surface Homeomorphisms, Lecture Notes*, (1989), Warwick Univ., 1-50.
9. P. Boyland: Rotation sets and monotone periodic orbits for annulus homeomorphisms, preprint.
10. A.J. Casson and S.A. Bleiler: Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston, *London Math. Soc. Student Texts* 9, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
11. A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poenaru: *Travaux de Thurston sur les surfaces*, *Asterisque* 66-67, Soc. Math. France, 1979.
12. J.M. Gambaudo: Periodic orbits and fixed points of a  $C^1$  orientation-preserving embedding of  $D^2$ , *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 108 (1990), 307-310.
13. H. Huang: Motions of curve and topological proof of Kra's results, abstract.
14. H. Huang: On homeomorphisms and braid types of surfaces, abstract.
15. H. Huang and B. Jiang: Braids and periodic solutions, *Topological Fixed Point Theory and Applications, Lecture Notes in Math.* 1411 (1989), Springer, 107-123.
16. J. Guaschi, J. Llibre, and R.S. MacKay: A classification of braid types for periodic orbits of diffeomorphisms of surfaces of genus one with topological entropy zero, preprint.
17. T. Kobayashi: Links of homeomorphisms of a disk and topological entropy, *Invent. Math.*, 80 (1985), 153-159.

18. T. Kobayashi: Links of homeomorphisms of surfaces and topological entropy, *Proc. Japan Acad.*, 60 (1984), 381-383.
19. T. Kobayashi: Links of embeddings of surfaces and topological entropy, *The Theory of Dynamical Systems and its Applications to Nonlinear Problems* (H.Kawakami ed.), World Sci. Publ., Singapore, 1984, 42-49.
20. J. Llibre and R.S. MacKay: A classification of braid types for diffeomorphisms of surfaces of genus zero with topological entropy zero, preprint.
21. S. Moran: *The Mathematical Theory of Knots and Braids: An Introduction*, North-Holland Math. Studies 82, North-Holland, Amsterdam, 1983.
22. S. Matsumoto: Flows of the solid torus and fixed point free homeomorphisms of the plane, preprint.
23. T. Matsuoka: The number and linking of periodic solutions of periodic systems, *Invent. Math.*, 70 (1983), 319-340.
24. T. Matsuoka: Waveform in the dynamical study of ordinary differential equations, *Japan J. Appl. Math.* 1(1984), 417-434.
25. T. Matsuoka: Braids of periodic points and a 2-dimensional analogue of Sharkovskii's ordering, *World Sci. Adv. Ser. in Dynam. Sys. 1*, World Sci. Publ., Singapore, 1986, 58-72.
26. T. Matsuoka: The number and linking of periodic solutions of non-dissipative systems, *J. Diff. Equations*, 76 (1988), 190-201.
27. T. Matsuoka: The number of periodic points of smooth maps, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 9 (1989), 153-163.
28. T. Matsuoka: in preparation.
29. A. Sannami: A topological classification of the periodic orbits of the Hénon family, *Japan J. Appl. Math.*, 2 (1989), 291-330.
30. A.N. Sharkovskii: Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself, *Ukr. Mat. Z.*, 16 (1964), 61-71 (Russian).
31. P. Štefan: A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endmorphisms of the real line, *Commun. Math. Phys.*, 54 (1977), 237-248.
32. W.P. Thurston: On the geometry and dynamics of diffeomorphisms on surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 19 (1988), 417-431.
33. P.J. Holmes: Knots and orbit genealogies in nonlinear oscillators, *New Directions in Dynamical Systems* (T. Bedford & J. Swift eds.), London Math. Soc. Lecture Notes 127 (1988), Cambridge Univ. Press, 150-191.
34. P.J. Holmes: Knotted periodic orbits in suspensions of Smale's horseshoe: Extended families and bifurcation sequences, preprint.