

Sklyanin代数の higher spin
表現を用いた Bethe Ansatz

東京大理 武部 尚志 (Takashi Takebe)

§0 序

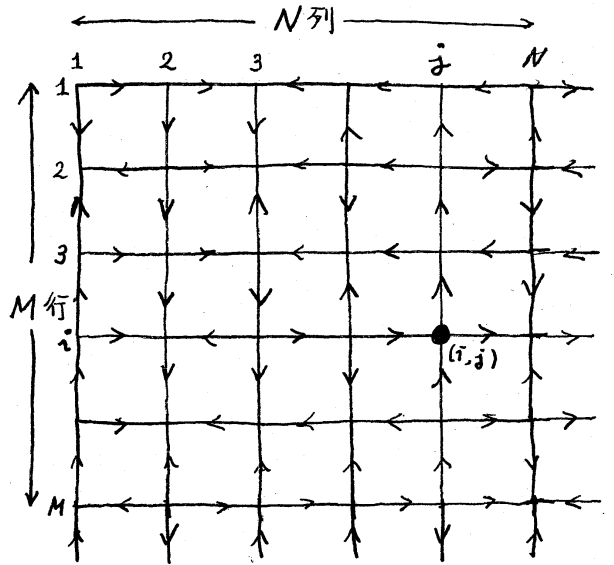
統計力学における2次元格子模型は、70年代以後Baxter, レニングラードschool, 京都school等によつてその数学的構造が研究され、特に量子逆散乱法を経て、量子群の発見の一端となった。その際に中心的役割を果たすのがYang-Baxter方程式と呼ばれる関係式であることは良く知られている。

量子群と直接に結びついていたのは、三角関数型R行列と呼ばれるYang-Baxter方程式の解であったが、ある極限でこの解を与える楕円関数型R行列という解があり、それぞれ6-vertex model, 8-vertex modelという模型に対応している。

ここでは、この楕円型R行列を用いて定義される代数(Sklyanin代数)の表現を使って8-vertex modelを一般化し、これにBethe Ansatzと呼ばれる手続を適用して、この模型のtransfer行列の固有ベクトルを構成できる事を示す。

§1 8 vertex model

結晶格子を非常に単純化した右のような $M \times N$ の格子 ($M+1$ 行目は1行目と、 $N+1$ 列目は1列目と同一視する) を考え、各辺は2つの“状態”のいずれかが一つをとるものとする。2つの状態は、便



宜上 (\rightarrow , \leftarrow) 及び (\uparrow , \downarrow) で表す。この系のエネルギーは、これらの状態の配置 (configuration) に対して、

$$E(\text{configuration}) = \sum_{(i,j)} E(i,j)$$

のように、各頂点 (vertex) での系のエネルギーの和になるとする。ここで $E(i,j)$ は、頂点 (i,j) での系のエネルギーで (i,j) につながる4本の辺上の状態の配置のみによって決まる。例えば、上の図の例では、

$$E(i,j) = E\left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array}\right)$$

さて、統計力学では、このような模型に対して分配関数 (partition function):

$$(1.1) \quad Z = \sum_{\substack{\text{可能なすべての} \\ \text{configuration}}} e^{-\beta E(\text{configuration})}$$

及び、系を大きくした時の熱力学的極限での(1原子当りの)自由エネルギー:

$$(1.2) \quad f = \frac{1}{\beta} \lim_{M, N \rightarrow \infty} \frac{1}{MN} \log Z$$

を求めることが重要である。(βは絶対温度の逆数に比例するパラメータ) これを求めるための一つの方法が、次に述べるtransfer行列の方法である。

今、(1.1)にあらわれる 2^{MN} 項の巨大な和を次のように順序交換して変形しよう。

$$(1.3) \quad Z = \sum_{\{x_1\}} \sum_{\{x_2\}} \cdots \sum_{\{x_N\}} T_{\{x_1\}\{x_2\}} T_{\{x_2\}\{x_3\}} \cdots T_{\{x_{N-1}\}\{x_N\}}$$

$$(1.4) \quad T_{\{x_j\}\{x_{j+1}\}} = \sum_{\{\alpha_j\}} \sum_{\alpha_{j+1}}^N e^{-\beta E(\alpha_j | \begin{array}{c} x_j \\ x_{j+1} \end{array} \alpha_{j+1})} \quad \alpha_{N+1} = \alpha_1$$

ここで、 $\{x_j\}$, $\{\alpha_j\}$ は、それぞれ(↑又は↓)及び(→又は←)を N 個ずつ並べたものである。 $V = \mathbb{C}^\uparrow \otimes \mathbb{C}^\downarrow \cong \mathbb{C}^2$ を、↑と↓を基底とするベクトル空間とすれば、 $T_{\{x_j\}\{x_{j+1}\}}$ を行列要素とする行列:

$$(1.5) \quad T = (T_{\{x_j\}\{x_{j+1}\}})_{\{x_j, x_{j+1}\}}$$

は、 $h_j = V^{\otimes N}$ の線型変換の行列と見ることが出来る。これを(row-to-row) transfer行列と呼ぶ。記号的に、

$$T = \begin{array}{cccccc} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \cdots & \alpha'_N \\ | & | & | & | & | \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_N \end{array}$$

とも書く。行列 T を使えば、(1.3) は、

$$(1.6) \quad Z = \text{Tr}_M T^M$$

と行列のトレースを使って簡単に表される。

ここまでは、各頂点へのエネルギーの与え方によらない一般論であった。以下では、“解ける模型”の代表的例である δ -vertex model を考える。模型の指定は、エネルギー E そのものよりも、Boltzmann weight $e^{-\beta E}$ の与え方を指定する方が便利である。 δ -vertex model は、次のように Boltzmann weight が指定された模型である：

$$(1.7) \quad R(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \uparrow & \leftarrow & \rightarrow & \downarrow \\ \rightarrow & a(\lambda) & & d(\lambda) \\ \rightarrow & & b(\lambda) & c(\lambda) \\ \leftarrow & & c(\lambda) & b(\lambda) \\ \downarrow & d(\lambda) & & a(\lambda) \end{array} \end{array} = \sum_{a=0}^3 W_a(\lambda) \sigma^a \otimes \sigma^a$$

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(1.8) \quad W_0(\lambda) = \frac{\theta_{11}(\lambda+\eta)}{\theta_{11}(\eta)}, \quad W_1(\lambda) = \frac{\theta_{10}(\lambda+\eta)}{\theta_{10}(\eta)}, \quad W_2(\lambda) = \frac{\theta_{00}(\lambda+\eta)}{\theta_{00}(\eta)}, \quad W_3(\lambda) = \frac{\theta_{01}(\lambda+\eta)}{\theta_{01}(\eta)}$$

($\theta_{ij}(z) = \theta_{ij}(z, \tau)$: characteristic を持つ τ -関数 [Mumford] 参照)

(1.7) は、例えば 2 行目 (\rightarrow) 3 列目 (\downarrow) の行列要素 $c(\lambda)$ が、
 $\begin{array}{c} \downarrow \\ \rightarrow \end{array}$ という配置に対するエネルギーを与える、と読む。 δ 種類の配置に対してのみおこなない Boltzmann weight が定義されているので δ -vertex model と呼ぶ。このモデルは、楕円曲線の modulus τ ($\text{Im} \tau > 0$)、"スペクトル・パラメータ" λ 、"非等方性" β

ラム-タ-eta という3つのパラメータを含む。R(λ)は、

Yang-Baxter 方程式:

$$(1.9) \quad R^{12}(\lambda-\mu) R^{13}(\lambda) R^{23}(\mu) = R^{23}(\mu) R^{13}(\lambda) R^{12}(\lambda-\mu)$$

を満たし、(Baxterの) 楕円R行列と呼ばれる。ここで、

$$R^{12}(\lambda) = \sum W_a \sigma^a \otimes \sigma^a \otimes 1_V, \quad R^{13}(\lambda) = \sum W_a \sigma^a \otimes 1 \otimes \sigma^a, \quad R^{23}(\lambda) = \sum W_a 1 \otimes \sigma^a \otimes \sigma^a$$

という $V^{\otimes 3}$ に作用する行列である。

Baxterは、70年代初めにこの模型を研究し、 $T(\lambda)$ の固有値と固有ベクトルを計算した。(1.6)から分かる様に、分配関数Zを求めるには、 $T(\lambda)$ の固有値が分かればよい。更に、自由エネルギーfを求めるには、(1.2)から分かるように最大固有値さえ分かればよい。このように問題は結局 $T(\lambda)$ のスペクトルに帰着される。また、 $T(\lambda)$ は磁性体のモデルであるXYZ模型という1次元量子力学系のHamiltonianとも密接に結びついており、その意味でも $T(\lambda)$ のスペクトルは重要である。

Baxterの方法は技巧的なものであったが、この方法を量子逆散乱法の立場から明快に説明したのが、[Takhtajan-Faddeev] (1979)である。(1.4)からtransfer行列 $T(\lambda)$ は、 $\text{End}(V^{\otimes N})$ の元を成分とする 2×2 行列のトレースとして、

$$(1.10) \quad T(\lambda) = \text{tr}_{V^{\otimes 2}} \tilde{J}(\lambda)$$

$$(1.11) \quad \tilde{J}(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} := L_N(\lambda) L_{N-1}(\lambda) \cdots L_1(\lambda)$$

$$(1.12) \quad L_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha_m(\lambda) & \beta_m(\lambda) \\ \gamma_m(\lambda) & \delta_m(\lambda) \end{pmatrix} := \sum_{a=0}^3 W_a(\lambda) \sigma^a \otimes \sigma_m^a$$

$$\left(\sigma_m^a = \underbrace{1_v \otimes \cdots \otimes 1_v}_{\sim} \otimes \underbrace{\sigma_m^a}_{\sim} \otimes 1_v \otimes \cdots \otimes 1_v \in \text{End}(h_{\mathcal{L}}) \right)$$

と表される。量子逆散乱法の立場では、 L_m は線型散乱問題の局所遷移行列、 $T(\lambda)$ はモノドロミ - 行列と解釈される。重要なのは、 L_m が

$$(1.13) \quad R^{12}(\lambda-\mu) L_m^1(\lambda) L_m^2(\mu) = L_m^2(\mu) L_m^1(\lambda) R^{12}(\lambda-\mu)$$

$$\left(\begin{array}{l} L_m^1(\lambda) = \sum W_a \sigma^a \otimes 1_v \otimes \sigma_m^a, \quad L_m^2(\lambda) = \sum W_a 1_v \otimes \sigma^a \otimes \sigma_m^a \\ R^{12}(\lambda) = \sum W_a \sigma^a \otimes \sigma^a \otimes 1_{\mathcal{L}} \end{array} \right)$$

を満たし、従って (1.11) より

$$(1.14) \quad R^{12}(\lambda-\mu) T^1(\lambda) T^2(\mu) = T^2(\mu) T^1(\lambda) R^{12}(\lambda-\mu)$$

が成り立つことである。(T^1, T^2 は L_m^1, L_m^2 と同様に定義する。) この式は、(1.11) の $A(\lambda), \dots, D(\lambda)$ の交換関係を与えている。この交換関係を使って、次節で $T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ の固有ベクトルを構成する。

§2 Bethe Ansatz

まず簡単な 6 vertex model の Bethe Ansatz の概略を述べ、 δ -vertex model ではどのように変更が必要か説明する。

6 vertex model の Boltzmann weight は、(1.7) で楕円曲線の

モジュラスを $i\infty$ へ飛ばした極限として定義される。適当な比例定数をかけて、

$$(2.1) \quad R(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & & & \\ & b(\lambda) & c(\lambda) & \\ & c(\lambda) & b(\lambda) & \\ & & & a(\lambda) \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a(\lambda) &= \sin(\lambda + \eta) \\ b(\lambda) &= \sin(\lambda - \eta) \\ c(\lambda) &= \sin 2\eta \end{aligned}$$

となる。 $L_m(\lambda)$ も (1.12) と同様に定義される。定義から明らかに、 $L_m(\lambda)$ の成分 $\alpha_m(\lambda), \dots, \delta_m(\lambda)$ は、 $\mathcal{H} = \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{N}$ の m 番目の成分以外には、 1_V として作用するので、自然に V 上の作用素とも考えられる。この時、

$$(2.2) \quad \alpha_m(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & \\ & b(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \delta_m(\lambda) = \begin{pmatrix} b(\lambda) & \\ & a(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \gamma_m(\lambda) = \begin{pmatrix} & c(\lambda) \\ & \end{pmatrix}$$

となるから、 $\omega_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると、(local vacuum と呼ぶ)

$$(2.3) \quad \alpha_m(\lambda) \omega_m = a(\lambda) \omega_m, \quad \delta_m(\lambda) \omega_m = b(\lambda) \omega_m, \quad \gamma_m \omega_m = 0$$

となる。そこで、 $\Omega = \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_N \in \mathcal{H}$ とすると、(1.11) より

$$(2.4) \quad A(\lambda) \Omega = a(\lambda)^N \Omega, \quad D(\lambda) \Omega = b(\lambda)^N \Omega, \quad C(\lambda) \Omega = 0$$

である。Bethe Ansatz (のレニングラード学派による定式化)

とは、 $T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ の固有ベクトル Ψ を、

$$(2.5) \quad \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = B(\lambda_1) B(\lambda_2) \dots B(\lambda_M) \Omega$$

という形をしていると仮定して探そう。というものである。

(1.14) から、

$$(2.6) \quad [B(\lambda), B(\mu)] = 0, \quad A(\lambda) B(\mu) = \frac{1}{c(\mu, \lambda)} B(\mu) A(\lambda) - \frac{b(\mu, \lambda)}{c(\mu, \lambda)} B(\lambda) A(\mu)$$

$$\left(b(\mu, \lambda) = \frac{\sin 2\eta}{\sin(\mu - \lambda + 2\eta)}, \quad c(\mu, \lambda) = \frac{\sin(\mu - \lambda)}{\sin(\mu - \lambda + 2\eta)} \right)$$

等が得られるので、(2.4) とあわせて $A(\lambda), D(\lambda)$ の $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$

への作用が計算できる。その結果 $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ は、 λ_j について

$$(2.7) \quad \frac{a(\lambda_j)^N}{b(\lambda_j)^N} = \prod_{k=1, k \neq j}^M \frac{c(\lambda_k, \lambda_j)}{c(\lambda_j, \lambda_k)} \quad (j=1, \dots, M)$$

という超越方程式 (Bethe 方程式) が成り立つ時 $T(\lambda)$ の固有ベクトルで、固有値は

$$(2.8) \quad \Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_M) = a^N(\lambda) \prod_{k=1}^M c(\lambda_k, \lambda)^{-1} + b^N(\lambda) \prod_{k=1}^M c(\lambda, \lambda_k)^{-1}$$

となる。

以上が 6 vertex model についての Bethe Ansatz の概要だが、もとの 8 vertex の場合にはこのままではいまうまいかない。(1.7) と (2.1) を比べると分かる通り、6 vertex model では γ_m が (2.2) のように退化していたが、8 vertex model では γ_m が非退化で、(2.3) のような local vacuum は存在しない。[Takhtajan-Faddeev] は、gauge 変換によって $L_m(\lambda)$ をひねる:

$$(2.9) \quad L_m(\lambda) \mapsto L_m^{\sim}(\lambda; s, t) = \begin{pmatrix} \alpha_m^{\sim}(\lambda) & \beta_m^{\sim}(\lambda) \\ \gamma_m^{\sim}(\lambda) & \delta_m^{\sim}(\lambda) \end{pmatrix} \\ := M_{m+n}^{-1}(\lambda; s, t) L_m(\lambda) M_{m+n-1}(\lambda; s, t)$$

ことで、これを解決した。ここで、 s, t はパラメータで、

$$(2.10) \quad M_k(\lambda; s, t) = \begin{pmatrix} \bar{\theta}_{11}(s+2k\gamma-\lambda) & C_k \bar{\theta}_{11}(t+2k\gamma+\lambda) \\ \bar{\theta}_{01}(s+2k\gamma-\lambda) & C_k \bar{\theta}_{01}(t+2k\gamma+\lambda) \end{pmatrix}$$

$$C_k = \left(\theta'_{10} \left(\frac{s+t}{2} + 2k\gamma \right) \right)^{-1}$$

$$\left(\bar{\theta}_{ij}(z) = \theta_{ij} \left(\frac{z}{\tau}, -\frac{z}{\tau} \right), \theta'_{ij}(z) = \theta_{ij} \left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau} \right) \right)$$

である。 C_k の決め方から、 $\det M_k$ は k によらない。このように $L_m(\lambda)$ をひねれば、 $\gamma_m^{\sim}(\lambda)$ は退化して、

$$(2.11) \quad \omega_m^n = \begin{pmatrix} \bar{\theta}_{11}(s+2(m+n)\eta) \\ \bar{\theta}_{01}(s+2(m+n)\eta) \end{pmatrix}$$

で local vacuum を定義すれば、(2.3) の代りに、

$$(2.12) \quad \alpha_m^n(\lambda) \omega_m^n = h(\lambda+2\eta) \omega_m^{n-1}, \quad \delta_m^n(\lambda) \omega_m^n = h(\lambda) \omega_m^{n+1}, \\ \gamma_m^n(\lambda) \omega_m^n = 0$$

となる ($h(z) = \text{const.} \times \bar{\theta}_{01}(z) \bar{\theta}_{11}(z)$)。従って、gauge 変換されたモノドロミ一行列を

$$(2.13) \quad \mathcal{T}^n(\lambda) = \begin{pmatrix} A^n(\lambda) & B^n(\lambda) \\ C^n(\lambda) & D^n(\lambda) \end{pmatrix} := L_N^n(\lambda) \cdots L_2^n(\lambda) L_1^n(\lambda) \\ = M_{N+n}^{-1}(\lambda; s, t) \mathcal{T}(\lambda) M_n(\lambda; s, t)$$

で定義し、 Ω の代りに $\Omega^n = \omega_1^n \otimes \omega_2^n \otimes \cdots \otimes \omega_N^n$ を使うと、(2.4) は

$$(2.14) \quad A^n(\lambda) \Omega^n = h^N(\lambda+2\eta) \Omega^{n-1}, \quad D^n(\lambda) \Omega^n = h^N(\lambda) \Omega^{n+1} \\ C^n(\lambda) \Omega^n = 0$$

に置き換る。Bethe Ansatz を使うためには、さらに

$$(2.15) \quad \mathcal{T}_{k,k'}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{k,k'}(\lambda) & B_{k,k'}(\lambda) \\ C_{k,k'}(\lambda) & D_{k,k'}(\lambda) \end{pmatrix} = M_{k'}^{-1}(\lambda) \mathcal{T}(\lambda) M_k(\lambda)$$

を導入する必要がある。 $\mathcal{T}^n(\lambda) = \mathcal{T}_{n+n, n}(\lambda)$ であり、 $T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda) = A_{k,k}(\lambda) + D_{k,k}(\lambda)$ である。(2.5) に代わるものとしては、

$$(2.16) \quad \mathcal{F}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = B_{n+1, n-1}(\lambda_1) \cdots B_{n+1, n-M}(\lambda_M) \Omega^{n-M}$$

をとる。(2.6) と同様に (1.14) から、

$$(2.17) \quad B_{k, k+1}(\lambda) B_{k+1, k'}(\mu) = B_{k, k+1}(\mu) B_{k+1, k'}(\lambda) \\ A_{k, k'}(\lambda) B_{k+1, k'-1}(\mu) = \alpha(\lambda, \mu) B_{k, k'-2}(\mu) A_{k+1, k'-1}(\lambda) - \beta_{k'-1}(\lambda, \mu) B_{k, k'-2}(\lambda) A_{k+1, k'-1}(\mu)$$

等が得られるので、 $T(\lambda)$ の $\Psi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ への作用が計算できる

$$\left(\alpha(\lambda, \mu) = \frac{\hbar(\lambda - \mu - 2\eta)}{\hbar(\lambda - \mu)}, \beta_k(\lambda, \mu) = \frac{\hbar(2\eta)\hbar(\tau_k + \mu - \lambda)}{\hbar(\mu - \lambda)\hbar(\tau_k)}, \tau_k = \frac{s+t}{2} + 2k\eta - \frac{1}{2} \right).$$

但し、(2.14)から、これがうまくいくためには $M = (2.16)$ の B の数 $= N/2$ でなくてはならない (N を偶数と仮定する)。また、 $A(\lambda)$ や $D(\lambda)$ の作用で、 $\Omega^n \rightarrow \Omega^{n \pm 1}$ となるので、

$$(2.18) \quad \Psi_\theta(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n \theta} \Psi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$$

の形で、 $T(\lambda)$ の固有ベクトルを探すことになる。結果は、

$$(2.19) \quad \frac{\hbar^N(\lambda_j + 2\eta)}{\hbar^N(\lambda_j)} = e^{-4\pi i n \theta} \prod_{k=1, k \neq j}^M \frac{\alpha(\lambda_k, \lambda_j)}{\alpha(\lambda_j, \lambda_k)} \quad (j=1, \dots, M)$$

の下で $\Psi_\theta(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ は固有値

$$(2.20) \quad e^{2\pi i \theta} (\hbar(\lambda + 2\eta))^N \prod_{k=1}^M \alpha(\lambda, \lambda_k) + e^{-2\pi i \theta} (\hbar(\lambda))^N \prod_{k=1}^M \alpha(\lambda_k, \lambda)$$

を持つ固有ベクトルである。

[Takahajan-Faddeev]では、Bethe方程式(2.19)の解の $N \rightarrow \infty$ での漸近挙動などを仮定して、 δ vertex modelの自由エネルギーを計算しBaxterの結果を導いているが、ここではこれ以上は立ち入らない。

§3 Sklyanin代数

前節で見た通り、関係式(1.14)は模型の“可解性”に極めて基本的な役割を果たしていた。そこで、このような関係式を満た

このような $L(\lambda)$ を探すことが当然問題になる。Sklyanin は、 L が

$$(3.1) \quad L(\lambda) = \sum_{a=0}^3 W_a(\lambda) \sigma^a \otimes S^a$$

という形をしていると仮定すると、

$$(3.2) \quad R^{12}(1-\mu) L^1(\lambda) L^2(\mu) = L^2(\mu) L^1(\lambda) R^{12}(1-\mu)$$

が成り立つことは、 S^a が次の関係式を満たすことと同値であることを示した [Sklyanin (1982)]:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} [S^\alpha, S^\delta]_- &= -i J_{\alpha\beta} [S^\beta, S^\gamma]_+ , \\ [S^\alpha, S^\beta]_- &= i [S^\delta, S^\gamma]_+ . \end{aligned}$$

ここで、 (α, β, γ) は、 $(1, 2, 3)$ の巡回置換、 $[A, B]_\pm = AB \pm BA$ 、又、

$J_{\alpha\beta} = (W_\alpha^2 - W_\beta^2) / (W_\gamma^2 - W_\delta^2)$ で具体的には

$$(3.4) \quad J_{12} = \frac{\theta_{01}(\eta)^2 \theta_{11}(\eta)^2}{\theta_{00}(\eta)^2 \theta_{10}(\eta)^2}, \quad J_{23} = \frac{\theta_{10}(\eta)^2 \theta_{11}(\eta)^2}{\theta_{00}(\eta)^2 \theta_{01}(\eta)^2}, \quad J_{31} = -\frac{\theta_{00}(\eta)^2 \theta_{11}(\eta)^2}{\theta_{01}(\eta)^2 \theta_{10}(\eta)^2}$$

である。重要なのは $J_{\alpha\beta}$ が λ によらないということであり、(3.3) は $(\tau$ と η をパラメータとする) 代数の関係式となる。

$$Q = \langle S^0, S^1, S^2, S^3 \rangle / \underbrace{\quad}_{(3.3)}$$

を Sklyanin 代数と呼ぶ。§0 で述べたように、楕円型 R 行列の極限は三角関数型 R 行列で、これは量子群と結びついていた。Sklyanin 代数についても、 S^α を適当にスケール変換しながら極限をとることによって、

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow i\infty & \quad \tau \quad Q \rightarrow U_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) \quad (\mathfrak{g} = \mathfrak{e}^{\pi i \tau}) \\ \eta \rightarrow 0 & \quad \tau \quad Q \rightarrow U(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) \end{aligned}$$

となる。

Sklyanin は [Sklyanin (1983)] で、この代数の有限次元表現を詳しく調べた。ここでは、次の "spin l " 表現 ($l = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$) を使う。これは、 $2l+1$ 次元の整関数の空間

$$V_l = \left\{ f(v): \mathbb{C} \text{ 上 正則} \mid \begin{aligned} f(v+1) &= f(-v) = f(v), \\ f(v+\tau) &= e^{-4\pi i l (2v+\tau)} f(v) \end{aligned} \right\}$$

上の表現で、各生成元の作用は、

$$(3.5) \quad (S^a f)(v) = \frac{S_a(v-l\tau) f(v+\tau) - S_a(v-l\tau) f(v-\tau)}{\theta_{11}(2v)}$$

で与えられる。ただし、

$$\begin{aligned} S_1(v) &= \theta_{11}(\tau) \theta_{11}(2v), & S_4(v) &= \theta_{10}(\tau) \theta_{10}(2v), \\ S_2(v) &= i\theta_{00}(\tau) \theta_{00}(2v), & S_3(v) &= \theta_{01}(\tau) \theta_{01}(2v) \end{aligned}$$

である。

特に $l=1/2$ の場合は (1.12) に相当し S^a を Pauli 行列 σ^a で表わすことができる。 $V_{\frac{1}{2}}$ の基底として、

$$(\theta_{00}(2v, 2\tau) - \theta_{10}(2v, 2\tau), \theta_{00}(2v, 2\tau) + \theta_{10}(2v, 2\tau))$$

を取れば、(3.5) より S^a は

$$(2.6) \quad S^a = 2 \frac{\theta_{00}(\tau) \theta_{01}(\tau) \theta_{10}(\tau) \theta_{11}(\tau)}{\theta_{00}(0) \theta_{01}(0) \theta_{10}(0)} \sigma^a$$

となる。 S^a の間の関係式 (3.3) は 2 次同次式であるから、表現は勝手な定数を掛けることができることに注意する。

§4 8 vertex model の一般化

以上述べてきたことを組み合わせようというのが、この小論の目的である。

$\{l_1, l_2, \dots, l_N\}$ を半整数の列とし、スピン l_m を持つ L 行列を (3.5) の表現を使って、

$$(4.1) \quad L_m(\lambda) = \sum_{a=0}^3 W_a(\lambda) \sigma^a \otimes P_{l_m}^{(m)}(S^a)$$

によって定義する。ここで、 $P_{l_m}^{(m)}$ は、Sklyanin 代数のスピン l_m 表現を $h_{\mathbb{Z}} = V_{l_1} \otimes V_{l_2} \otimes \dots \otimes V_{l_N}$ の第 m 成分に作用させる表現:

$$(4.2) \quad Q \ni X \mapsto P_{l_m}^{(m)}(X) = 1_{V_1} \otimes \dots \otimes 1_{V_{m-1}} \otimes P_{l_m}(X) \otimes 1_{V_{m+1}} \otimes \dots \otimes 1_{V_N}$$

である。この L 行列から、モノドロミー行列を (1.11) と同様に、

$$(4.3) \quad \mathcal{T}(\lambda) := L_N(\lambda) \dots L_2(\lambda) L_1(\lambda) =: \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}$$

で定義して、 $T(\lambda) = \text{tr}_{\mathbb{C}^2} \mathcal{T}(\lambda)$ の固有値、固有ベクトルを計算することが問題である。物理的には、不均一な格子模型を考えていることになる (更に、 $L_m(\lambda)$ を $L_m(\lambda - \lambda_m)$ のように定数 λ_m を導入してざらし、スペクトル・パラメータも不均一にできる。[Takebe] 参照)。

§2 と同様に、適当な gauge 変換によって L_m をひねって、local vacuum が存在するようにして Bethe Ansatz を適用しよう。必要な gauge 変換は、スピン 1/2 の場合とほぼ同じで、

$$(4.4) \quad L_m(\lambda) \mapsto L_m^m(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha_m^n(\lambda) & \beta_m^n(\lambda) \\ \delta_m^n(\lambda) & \gamma_m^n(\lambda) \end{pmatrix} \\ = M_m^n(\lambda; s, t; l_m)^{-1} L_m(\lambda) M_{m-1}^m(\lambda; s, t; l_m)^{-1}$$

ただし、(2.10)の M_k を使って、

$$(4.5) \quad M_m^n(\lambda; s, t; l) := M_{2lm+n}(\lambda; s, t)$$

と定義する。local vacuum ω_m^n は、

$$\omega_m^n(s; v) = a_m^n(s) \tilde{\omega}_m^n(s; v) \in V_{lm}, \\ \tilde{\omega}_m^n(s; v) = \prod_{k=1}^{2lm} \theta\left(v + \frac{s}{2} + \frac{\tau}{4} + (2lm + n - 3lm - \frac{1}{2})\eta + 2k\eta\right) \\ (4.6) \quad \times \prod_{k=1}^{2lm} \theta\left(v - \frac{s}{2} - \frac{\tau}{4} - (2lm + n - 3lm - \frac{1}{2})\eta - 2k\eta\right),$$

$$\frac{a_m^n(s)}{a_m^{n-1}(s)} = \exp \left\{ \frac{4\pi i l_m \eta}{\tau} \left(s + 2(2lm + n)\eta - 2l\eta \right) - 2\pi i l \eta \right\}$$

によつて、定数倍を除いて定義される。この複雑な定義式は、(2.12)型の性質が成立するように決められている：

$$(4.7) \quad \alpha_m^n(\lambda) \omega_m^n = \kappa^{(l_m)}(\lambda + \eta) \omega_m^{n-1}, \\ \delta_m^n(\lambda) \omega_m^n = -\kappa^{(l_m)}(-\lambda - \eta) \omega_m^{n+1}, \\ \gamma_m^n(\lambda) \omega_m^n = 0.$$

但し、 $\kappa^{(l)}(z) = 2 \exp\left(\frac{4\pi i l \eta}{\tau} (z - \eta)\right) \theta_{11}(z + 2l\eta)$ 。

(4.7)を示すには次のようにする。例えば $\delta_m^n(\lambda)$ の $f(v) \in V_{lm}$ への作用は、(3.5)から分かるように、

$$(\delta_m^n(\lambda) f)(v) = \frac{C}{\theta_{11}(2v)} (\Gamma_+(v) f(v + \eta) - \Gamma_-(v) f(v - \eta))$$

のような、一種の差分商の形に表わされる。ここで C は v によらない定数である。(3.5), (4.1), (4.4) から具体的に $\Gamma_{\pm}(v)$ を求めると、

$$\begin{aligned} \Gamma_{+}(v) &= \text{const. } x \\ &\times \theta\left(v + \frac{\xi}{2} + \frac{\tau}{4} + (2lm - 3l + n + \frac{1}{2})\eta\right) \\ &\times \theta\left(v - \frac{\xi}{2} - \frac{\tau}{4} - (2lm + l + n + \frac{1}{2})\eta\right) \\ &\times \theta\left(v + \frac{\xi}{2} + \frac{\tau}{4} + (2lm - l + n - \frac{1}{2})\eta - \lambda\right) \\ &\times \theta\left(v - \frac{\xi}{2} - \frac{\tau}{4} - (2lm - l + n - \frac{1}{2})\eta + \lambda\right), \end{aligned}$$

$$\Gamma_{-}(v) = \Gamma_{+}(-v)$$

となり、これから ω_m^m (又は $\tilde{\omega}_m^m$) に作用させると 0 になることがわかる。 Γ_{+} を求めるには、Riemann の関係式、例えば

$$\begin{aligned} &\theta_{00}(x) \theta_{00}(y) \theta_{00}(u) \theta_{00}(v) + \theta_{01}(x) \theta_{01}(y) \theta_{01}(u) \theta_{01}(v) \\ &+ \theta_{10}(x) \theta_{10}(y) \theta_{10}(u) \theta_{10}(v) + \theta_{11}(x) \theta_{11}(y) \theta_{11}(u) \theta_{11}(v) \\ &= 2 \theta_{00}\left(\frac{x+y+u+v}{2}\right) \theta_{00}\left(\frac{x+y-u-v}{2}\right) \theta_{00}\left(\frac{x-y+u-v}{2}\right) \theta_{00}\left(\frac{x-y-u+v}{2}\right) \end{aligned}$$

や、Landen 変換

$$\theta_{01}(2z, 2\tau) = \frac{\theta_{01}(0, 2\tau)}{\theta_{00}(0, \tau) \theta_{01}(0, \tau)} \theta_{00}(z, \tau) \theta_{01}(z, \tau)$$

および、 τ - q 換数の modular 変換性、例えば

$$\theta_{11}\left(\frac{z}{c}, -\frac{1}{c}\right) = -i (-i\tau)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\pi i}{c} z^2\right) \theta_{11}(z)$$

などを使って長い計算を行う。 α_m^m , \int_m^m の作用については、上で C , const. と書いた部分も重要である。(題材はすでに10年も前の話 ([Takhtajan-Faddeev], [Sklyanin]) なのに、今まで誰も手をつけていなかったのは、むしろこの計算の面倒さ

に原因があるのであろう。))

local vacuumが分れば、後の手続きは§2と同じである。

$$(4.8) \quad n_m := n + 2 \sum_{k=1}^{m-1} (l_k - l_m)$$

とすると、 $\mathcal{T}(\lambda)$ のgauge変換は、

$$(4.9) \quad \mathcal{T}(\lambda) \mapsto \mathcal{T}^n(\lambda) = \begin{pmatrix} A^n(\lambda) & B^n(\lambda) \\ C^n(\lambda) & D^n(\lambda) \end{pmatrix} \\ = L_N^{n_N}(\lambda) \cdots L_1^{n_1}(\lambda) = M_{2l_N N + n_N}^{-1} \mathcal{T}(\lambda) M_{n_1}$$

で定義され、 A^n, C^n, D^n は、

$$(4.10) \quad \Omega^n(s) = \omega_1^{n_1}(s) \otimes \cdots \otimes \omega_N^{n_N}(s) \in \mathfrak{h}_g \quad n \in \mathbb{Z}$$

に次のように作用する。

$$(4.11) \quad \begin{aligned} A^n(\lambda) \Omega^n &= \kappa^{(l_1, \dots, l_N)}(\lambda + \eta) \Omega^{n-1}, \\ D^n(\lambda) \Omega^n &= (-1)^N \kappa^{(l_1, \dots, l_N)}(\lambda - \eta) \Omega^{n+1}, \\ C^n(\lambda) \Omega^n &= 0 \end{aligned}$$

ここで、 $\kappa^{(l_1, \dots, l_N)}(z) = \prod_{k=1}^N \kappa^{(l_k)}(z)$ である。

前と同様に、

$$(4.12) \quad \tilde{\mathcal{T}}_{k,k'}(\lambda) = M_k(\lambda; s, t)^{-1} \mathcal{T}(\lambda) M_{k'}(\lambda; s, t) = \begin{pmatrix} A_{kk'} & B_{kk'} \\ C_{kk'} & D_{kk'} \end{pmatrix}$$

を導入し、

$$(4.13) \quad \mathbb{F}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = B_{n+1, n-1}(\lambda_1) \cdots B_{n+M, n-M}(\lambda_M) \Omega^{n-M}$$

とし、

$$(4.14) \quad \mathbb{F}_\theta(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n \theta} \mathbb{F}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$$

型の $T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda) = A_{k,k}(\lambda) + D_{k,k}(\lambda)$ の固有ベクトル v を探す。 $\mathcal{T}^n(\lambda) = \mathcal{T}_{2l_N N + n_N, n_1}(\lambda)$, $2l_N N + n_N - n_1 = 2l_{\text{total}}$ ($l_{\text{total}} = \sum_{m=1}^N l_m$) と

あるから、(2.18) の前の議論と同様に、今度は $M = l_{\text{total}}$ とする (l_{total} が整数になると仮定する)。ポイントは、同じ R 行列 (1.7) を使っているため、 $A_{k,k'}, \dots, D_{k,k'}$ の間の交換関係は、前と同じ (2.17) である、ということである。

以上から、§2 と同じ方法で、次の結果を得る。([Takebe])

$\mathbb{E}_\theta(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ ($M = l_{\text{total}}$) は、 $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ が

$$(4.15) \quad \frac{\kappa^{(l_1, \dots, l_N)}(\lambda_j + \eta)}{(-1)^N \kappa^{(l_1, \dots, l_N)}(-\lambda_j - \eta)} = e^{-4\pi i \theta} \prod_{k=1, k \neq j}^M \frac{\alpha(\lambda_k, \lambda_j)}{\alpha(\lambda_j, \lambda_k)} \quad (j=1, \dots, N)$$

を満たす時、 $T(\lambda)$ の固有ベクトルで、固有値は、

$$(4.16) \quad e^{2\pi i \theta} \kappa^{(l_1, \dots, l_N)}(\lambda + \eta) \prod_{k=1}^M \alpha(\lambda, \lambda_k) \\ + (-1)^N e^{-2\pi i \theta} \kappa^{(l_1, \dots, l_N)}(-\lambda - \eta) \prod_{k=1}^M \alpha(\lambda_k, \lambda)$$

である。

§ 参考文献

Mumford D.: Tata Lectures on theta I (Birkhäuser) (1983).

Sklyanin E. K.: Func. Anal. Appl. 16-4 (1982) pp 263-270;

Func. Anal. Appl. 17-4 (1983) pp 273-284.

Takhtajan (Takhtadzhan) L. A., Faddeev L. D.: Russian Math.

Surveys 34:5 (1979) pp 11-68.

Takebe T.: Generalized Bethe Ansatz with the general spin representations of the Sklyanin algebra, J. of Phys. A. (to appear)