数理解析研究所講究録
第810巻 1992年 318-323


# GALOIS ACTION ON THE PRO-NILPOTENT COMPLETION OF THE FUNDAMENTAL GROUPS OF ALGEBRAIC CURVES

京都大学数理研 織田孝幸 (TAKAYUKI ODA)

## §0. はじめに.

### §§*0.1 Credo of "Topos Church".*

代数多様体の cohomology 理論にはいろいろある。Algebraic de Rham cohomology, étale cohomology, $\mathbb{C}$ 上の多様体のときは singular cohomology とその上の Hodge 構造 etc... これら種々の cohomology 理論は独立ではなく比較定理として表現される、理論間の並行性を持っている。これをもっと積極的にとらえ言葉にだして言明すると、代数多様体の cohomology 理論の中には、種々の cohomology theories に現れる情報の全てを含んだ唯一の原初的、あるいは統合的 cohomology 理論があり、他の理論はそれからの"流出"として見做せるのではないかという vision に到達する。これが Grothendieck の motif 哲学である。

**Old Credo (0.1).** *Cohomology theory of algebraic varieties is motivic.*

さて代数多様体の homotopy 理論についてはどうであろうか?しばらく考えてみると、証拠の少なさに、ためらいを感じながらも次のように言いたいという誘惑には勝てない。

**New Credo (0.2).** *Rational homotopy theory of algebraic varieties is motivic. In particular, the rational fundamental groups of algebraic varieties are motivic.*

さて上の2番めの新しい信仰箇条を実現するには実際問題として、現在与えられた状況の下で次に何をなすべきかが問題となる。この点についてはまだはっきり分からないことの方が多いが曲線については少し手がかりがある。後でこれについて論じる。

### §§*0.2 Rational fundamental group .*

まず有理基本群の定義を思いだし、その研究史を簡単に振り返って見よう。

$X$ を位相空間とし、弧状連結とする。$X$ の点 $x$ を一つ選び、これを基点とする基本群を $\pi_1(X,x)$ と書く。$G=\pi_1(X,x)$ とする。群 $G$ の $\mathbb{Q}$ 係数の群環を $\mathbb{Q}G$ とすると、これは Hopf algebra をなす。$\varepsilon:\mathbb{Q}G\to\mathbb{Q}$ を augmentation、$I=ker(\varepsilon)$ を augmentation ideal とするとき、完備化 $\mathbb{Q}\hat{G}=\underleftarrow{lim}\mathbb{Q}G/I^n$ は完備 Hopf algebra となる。
$\Delta:\mathbb{Q}G\to\mathbb{Q}G\otimes\mathbb{Q}G$ を $g\in G\to g\otimes g$ で定まる対角写像とするとき、これの完備化 $\hat{\Delta}:\mathbb{Q}\hat{G}\to\mathbb{Q}\hat{G}\otimes\mathbb{Q}\hat{G}$ は comultiplication を与える。

*(0.2.1) Group like elments and Mal'cev completion.*
さて $\mathbb{Q}\hat{G}$ の部分集合 $\mathcal{G}$ を

$$\mathcal{G}=\{g\in\mathbb{Q}\hat{G}|\hat{\varepsilon}=1,\ \hat{\Delta}(g)=g\hat{\otimes}g\}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

で定めると $\mathcal{G}$ は群をなす。$\mathcal{G}$ の元を group like element という。自然な写像 $g \in G \to \mathbb{Q}\hat{G}$ は $G \to \mathcal{G}$ を引き起こし、これは群の準同型である。$\mathcal{G}$ を $G$ の Mal'cev completion という。群 $\mathcal{G}$ には $\mathcal{G}_{(m)} = \mathcal{G} \bigcap \{1 + I^m\}$ $(m = 1, 2, \ldots,)$ によって central filtration が入る。つまり、$\mathcal{G}_{(1)} = \mathcal{G}$ で、$[\mathcal{G}_{(k)}, \mathcal{G}_{(l)}] \subset \mathcal{G}_{(k+l)}$. さらに、このとき $\mathcal{G}_{(m)}$ は $m$ 次の高次交換子群 $\Gamma_m \mathcal{G}$ に一致し、上の central filtration は、降中心列になる。群 $G$ の lower central series は帰納的に

$$\Gamma_1 G = G, \qquad \Gamma_{m+1} = [\Gamma_m G, G]$$

によって定義され、自然に誘導される準同型

$$j_m : G/\Gamma_{m+1} G \to \mathcal{G}/\Gamma_{m+1}\mathcal{G} = \mathcal{G}/\mathcal{G}_{(m+1)}$$

は次の性質をもつ。

(1) $ker(j_m)$ は $G/\Gamma_{m+1}G$ の有限位数の元全体からなる。

(2) $\mathcal{G}/\Gamma_{m+1}\mathcal{G}$ の任意の元 $\xi$ に対して、ある正整数 $N$ があって $\xi^N \in Image(j_m)$. また $\mathcal{G}/\Gamma_{m+1}\mathcal{G}$ の任意の元 $\eta$ と任意の正整数 $N$ に対して、$\mathcal{G}/\Gamma_{m+1}\mathcal{G}$ の元が一意的に定まり、$\eta = \xi^N$。

つまり直観的には $\mathcal{G}/\Gamma_{m+1}\mathcal{G} ='' G/\Gamma_{m+1}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}''$ と考えられる。

*(0.2.2) Primitive elements and Mal'cev Lie algebra.*

$\mathbb{Q}\hat{G}$ の primtive elements 全体のなす集合 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} = \{x \in \hat{\mathbb{G}} \mid \hat{\varepsilon}(x) = 0,\ \hat{\Delta}(x) = x \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} x\ \}$$

でさだめる。$\mathcal{L}$ は $x, y \in \mathcal{L}$ に対し $[x, y] = xy - yx$ と定めて Lie algebra をなす。これを $G$ の Mal'cev Lie algebra という。$\mathcal{L}$ の filtration $\{\mathcal{L} \bigcap I^m\}_{m \geq 1}$ は $\mathcal{L}$ の lower cenral series と一致し、形式巾級数で定める "指数関数" $exp : \mathcal{L} \to \mathcal{G}$ と " 対数関数 " $log : \mathcal{G} \to \mathcal{L}$ という写像は集合 $\mathcal{G}$ と $\mathcal{L}$ の全単射を定める。

$\mathcal{G}/\Gamma_{m+1}\mathcal{G}$ は有理数体上のある巾零代数群の有理点のなす群と見倣せる。それも同じ記号で表すとき、その Lie 環 $Lie(\mathcal{G}/\Gamma_{m+1}\mathcal{G})$ は $\mathcal{L}/\Gamma_{m+1}\mathcal{L}$ に一致する。

*§§0.3 Short History toward Motivic Homotopy Theory.*

有理基本群の理論がより motivic になってゆく歴史を少し見てみよう。

*(0.3.1) Betti realization=Rational homotopy theory*

Rational Homotopy Theory は D. Quillen の次の論文で一応の完成を見た。
Quillen, D. Rational Homotopy Theory, Ann. of Math. **81** (1965), 205–295.

この論文ではいくつかの homotopy 圏の同値性が証明され、それを積み重ねて、1-connected CW 複体の homotopy 圏が differential graded algebra の homotopy 圏と同値であることが示されている。これは、後知恵で言えば、この後の de Rham homotopy 理論の伏線になっている。証明の途中に現れるつなぎの圏も、後の Sullivan, Chen の仕事と比較すると興味深い。

*(0.3.2) de Rham realization=de Rham homotopy theory*

1-connected $C^\infty$-manifold $M$ の高次実 homotopy 群 $\pi_q(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ $(q \geq 2)$ と、単連結とは限らない、多様体 $M$ の "実基本群" $\pi_1(M, *)/\Gamma_{m+1}\pi_1(M, *) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ を $M$ の微分形式の言葉で記述することは、一方で D. Sullivan によって minimal model の理論

を用いることによって行なわれ、他方で K. T. Chen によって反復積分を使って行なわれた。それぞれ、

Sullivan, D., *Infinitesimal Calculations in Topology*, Publ. Math. I.H.E.H. **47** (1978), 269–331.

Chen, K. T., *Iterated Path Integrals*, Bull. of the Amer. Math. Soc. **83** (1977), 831–879.

なお Sullivan の理論は、original の論文は通常の書き方の水準になく、全く分かりにくい。次の本が便利である。

Griffiths, P., and Morgan, J., *Rational Homotopy Theory and Differential Forms*, Birkhäuser, 1981.

筆者の私見によれば、Chen のやり方のほうが、より直観的で分かりやすく思える。難点は結果がたくさんの小さな論文に散らばっていることである。彼の死後、記念の号が Illinoi Journal of Math. (198?) がでた。これには、Hain 等による、Chen の結果の survey もあり便利である。

*(0.3.3) Hodge realization=Mixed Hodge strutures on the rational homotopy groups*

各々、Sullivan と Chen の理論に基づいて、J. Morgan と R. Hain が代数多様体の高次有理 homotopy 群や 有理基本群に, 混合 Hodge 構造を定めた。

## §1 最初の問題.

§§*1.1 The case of single curve* :

体 $K$ 上の非特異完備、絶対連結な代数曲線 $C$ で種数 $g$ が 2 以上のものを考える。曲線 $C$ の $K-$有理点 $x$ : $Spec(K) \to C$ が一つ与えられているとせよ。$\bar{K}$ を体 $K$ の分離閉包とし $\bar{C} = C \otimes_K \bar{K}$ とする。$\pi_1(C)$ で $C$ の基本群を、$\pi_1(\bar{C})$ で $\bar{C}$ の基本群を表す。このとき、完全列：

$$1 \to \pi_1(\bar{C}) \to \pi_1(C) \to \pi_1(Spec\ K) \to 1$$

があり、さらに $\pi_1(C) \to \pi_1(Spec\ K)$ は $x$ から誘導される $\pi_1(x) : \pi_1(Spec\ K) \to \pi_1(C)$ を切断とする。よって $\pi_1(C)$ は $\pi_1(\bar{C})$ と $\pi_1(Spec\ \ K)$ の半直積である。$\pi_1(Spec\ K)$ の元による変換

$$Int(\sigma) : \xi \to \sigma\xi\sigma^{-1} \qquad (\sigma \in \pi_1(Spec\ K),\ \xi \in \pi_1(\bar{C}))$$

によって表現

$$\rho_{C,x} : \pi_1(Spec\ K) \to Aut\ \pi_1(\bar{C}) \quad (\sigma \to Int(\sigma))$$

が定まる。$l$ を素数とするとき、$\pi_1(\bar{C})$ の pro-$l$ 完備化を $\pi_1(\bar{C})_l$ とするとき、標準 全射 準同型 $\pi_1(\bar{C}) \to \pi_1(\bar{C})_l$ の核は特性部分群だから、$Aut\ \pi_1(\bar{C}) \to Aut\ \pi_1(\bar{C})_l$ という標準（全射）準同型が定まる。これと $\rho_{C,x}$ との合成を $\rho_{C,x;l}$ と書く。この "non-abelian" $l$-adic representation $\rho_{C,x;l}$ を調べると言うことが出発点の問題になる。$\pi_1(\bar{C})$ の pro-nilpotent completion $\pi_1(\bar{C})_{nil}$ は, 有限巾零群が $p$-Sylow 群の直積になることより $\pi_1(\bar{C})_l$ たちの直積 $\prod_l \pi_1(\bar{C})_l$ になる。

注意。体 $K$ の標数は 0 として、埋め込み $\iota : K \subset \mathbb{C}$ をひとつ固定すると、$\pi_1(\bar{C})_l$ は $C(\mathbb{C})^{an}$ の topological fundamental group $\pi_1(C(\mathbb{C})^{an}, *)$ の局所化 $\pi_1(C(\mathbb{C})^{an}, *) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{Z}_l$ と考えられる。

*§§1.2 Variable moduluis case, or the case of universal base.*

$\mathcal{M}_g$ を種数 $g$ の非特異完備代数曲線の moduli stack とする。$\mathcal{M}_{g,1}$ を種数 $g$ の一点を付点した非特異完備代数曲線の moduli stack とする。すると、$\mathcal{M}_{g,1} = \mathcal{C}_g$ はまた moduli $\mathcal{M}_g$ 上の標準元に対応する、universal family とも考えられる。このとき、2-morphism $\mathcal{C}_g \to \mathcal{M}_g$ は忘却関手 $(C, x) \to C$ で与えられる。さて、$Spec\ K$ 上のときと、同様にして $\mathcal{C}_g$ 上の geometric point $\mu : Spec\ \Omega \to \mathcal{C}_g$ に対して、その geometric fiber を $(C_\mu, x_\mu)$ とするとき、universal monodromy representation

$$\rho_{g;l} : \pi_1(\mathcal{C}_g, \mu) \to Aut\ \pi_1(C_\mu)$$

を得る。さて体 $K$ 上の組 $(C, x)$ に対して、moduli 空間への分類写像を $cl_{(C,x)} : Spec\ K \to \mathcal{C}_g$ とするとき可換図式：

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(Spec\ K) & \xrightarrow{\rho_{C,x;l}} & Aut\ \pi_1(\bar{C})_l \\
{\scriptstyle \pi_1(cl_{(C,x)})}\downarrow & & \Vert \\
\pi_1(\mathcal{C}_g) & \xrightarrow{\rho_{g;l}} & Aut\ \pi_1(C_\mu)
\end{array}$$

が成立する。

こうするとき、少し考えてみると、上の可換図式の下辺の Galois 表現の内で曲線の moduli に依存しない固定部分を考えると、それが cyclotomic 表現の非アーベル化であって、$\mathbb{Q}$ のみにしか依存しない(つまり種数に依らない）普遍的なものと予想される。しかしながら、この状況は、geometric な部分 $\pi_1(\mathcal{C}_g \otimes \bar{\mathbb{Q}})$ をあんこにして、皮が $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ になっている、アンパンのごときものになっていて、geometric な部分に制限した、monodromy 表現：

$$\bar{\rho}_{g;l} : \pi_1(\mathcal{C}_g \otimes \bar{\mathbb{Q}}) \to Aut\ \pi_1(C_\mu)$$

を調べると、その性質が絶対 Galois 群の方にも反映されると期待される。それゆえ、$\bar{\rho}_{g;l}$ を調べることが課題となる。最初に、$\pi_1(\mathcal{C}_g \otimes \bar{\mathbb{Q}})$ の構造について、次の”自明な”結果を得る。

**Theorem (1.1).** *The fundamental group of the algebraic stack $\mathcal{C}_g \otimes \bar{\mathbb{Q}}$ is isomorphic to the profinite completion $\hat{\Gamma}_{g,1}$ of the Teichmüller group $\Gamma_{g,1}$ of one pointed Riemann surfaces of genus $g$.*

証明は、[O-1] を見よ。

さて次の節で、$\bar{\rho}_{g;l}$ の transcendental version を局所的に調べる。つまり、これの Betti realization を問題にする。

## §2 Local monodromy on the fundamental groups of algebraic curves in the Betti realization.

この節では、前節の monodromy 表現の transcendental version の Betti 実現を局所的に調べる。この結果は、朝田衛氏、松本真氏との共同研究である。以下の話しは、複素数体 $\mathbb{C}$ 上の解析多様体の圏で考える。

種数 $g$ の安定代数曲線 $C_0$ の local universal deformation $f : \mathcal{X} \to \mathcal{D}$ を考える。このとき、$\mathcal{D}$ の次元は $3g-3$ であって、複素円盤 $3g-3$ 個の直積としてよい。$C_0$ が maximally degenerate, つまり全ての既約成分が射影直線になっているとき、$C_0$ は $3g-3$ 個の 2 重点をもち、既約成分の個数は $2g-2$ 個である。このとき、$C_0$ の 2 重点を $X$ 上で考えて、これら $X$ の critical points の局所定義方程式として、

$$x_i y_i = t_i \qquad (1 \leqq i \leqq 3g-3)$$

がとれ、さらに $(t_1, \cdots, t_{3g-3})$ を多重円盤 $\mathcal{D}$ の座標系として考えることができる。 さて $\mathcal{D}^0 = \{\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_{3g-3}) \, | t_i \neq 0, \ \text{for all } i \ (1 \leqq i \leqq 3g-3)\}$ と置くとき、$f$ の $\mathcal{D}^0$ への制限は smooth である。このとき制限された写像を同じ記号で表す。$\mathbf{t} \in \mathcal{D}^0$ のファイバー $f^{-1}(\mathbf{t}) = X_{\mathbf{t}}$ を考え、これの基本群 $\pi(X_{\mathbf{t}}, *)$ 上の monodromy 表現

$$\rho_f : \pi(\mathcal{D}^0, \mathbf{t}) \to Out \ \pi(X_{\mathbf{t}}, *)$$

を問題にする。

我々の得た結果は次の二つである。

(1) 上の monodromy 表現の完全な組合せ論的記述である。これは通常 Picrad-Lefschetz 公式と呼ばれるものの、non-abelian version と見做せる結果である。Bass-Serre による群のグラフの基本群の理論を用いて、結果が定式化される。

(2) もう一つは、上の monodromy 表現がファイバーの基本群の weight filtration にどのように作用するか、記述することである。これは、$C_0$ の双対グラフの不変量を用いて記述される。

これらの結果の詳細は、[AMO] にある。別の機会に話したこともあるので、ここでは詳しく書かない。ただ、全体の流れの中でこの部分が何を目指しているか、理解していただきたい。

## §3 今後の問題.

現実の問題として、次の段階を目指すとすると、なんとか手がつくかも知れないのは次の二つの問題であろう。

一つ目は、前節の局所的な monodromy 表現の問題を、Hodge realization で考えることである。すでに Betti realization では完全な結果が得られているゆえ、これより Hodge analogue がどうなるべきか、予想できる。ここでは、安定曲線の退化に伴い、その基本群の Malicev Lie algebra 上の混合 Hodge 構造がどのように振舞うか調べる必要がある。これは反復積分で記述されるゆえ、実際に調べることは曲線の第 2 種および第 3 種微分を含むある種の反復積分の、曲線の退化に伴う variational formulae を調べることが実質的な問題になる。

ここで問題になるのは、基本群の Malcev Lie algebra 上の混合 Hodge 構造の variation の下台をなす、局所系を定義する可積分接続が holomorphic な data のみで記述されず、第 2 種微分をも含む形でしか定式かされないことである。すると、接続には monodromy に反映しない、apparent singularities があり、これをどう処理するかが一つの問題になる。ナイーブに考えると、問題の定式化には本質的でない、反復積分の表示の仕方による、第 2 種、第 3 種微分の特異点のモヂュライが回避できない。

二つ目は、大域的な問題で、Betti realization で考える。ここでは $\mathcal{C}_g$ の analytic context での実現である、analytic stack $\mathcal{C}_g^{an}$ を考える。これは $K(\pi, 1)$ space でその

基本群は one-pointed Riemann surface of genus $g$ の Teichmüller 群 $\Gamma_{g,1}$ になる。§1 で考えた、monodromy 表現 $\bar{\rho}_{g;l}$ の Betti version を考えて、monodromy 表現

$$\rho_g : \Gamma_{g,1} \to Aut\ \pi_1(C_\mu)$$

を得る。但し、ここで $C_\mu$ は genus $g$ の typical Riemann surface.

さて問題は $\rho_g$ の組合せ論的な記述にある。これは例えば implicite には Hatcher-Thurston 等にはある。しかし望ましいのはここで§2で言及した局所的な記述と両立する、分り易い記述である。これができれば Galois 表現の問題のみならず、共形場の理論の monodromy 表現の大域的な記述について現在予想されている結果の証明にも役に立つはずである。

問題の自然な定式化には、Teichmüller 群を指数有限の groupoid として含む、自然な groupoid を調べ、さらにその graphs of groups への作用も、各 graph of groups の fundamental groupoid への作用を定めるように定式化するのが自然であろう。

高次 homotopy 群のときも、問題はいろいろある。面白い例は
Carlson, Clemens, and Morgan
Mixed Hodge structure on $\pi_3(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. Ann. École. Norm. Sup. (1984).
に見い出される。

## References

[AMO]. Mamoru Asada, Makoto Matumoto, Takayuki Oda, *Local Monodromy on the Fundamental Groups of Algebraic Curves along a Degenerate Stable Curves*, Preprint RIMS-850 , December, 1991.

[O1]. Takayuki Oda, *Etale homotopy type of the moduli spaces of algebraic curves*, Preprint.

補足 あるいは、いいわけ.

全体を読み直してみると、何か漠然として捉え難い書き方になっている。§1 の Theorem(1.1) の直前に書いた文節については、もっと詳細な形で問題なり、予想の形で改めて別の機会に書きたい。現状ではまだ speculation の部分が多過ぎて書き難い。