数理解析研究所講究録
813巻 1992年 144-154

Seifert circles for surface braids

大阪市立大学理学部・学振特別研究員
鎌田聖一 (Seiichi Kamada)

R^3内の有向結び目・絡み目に対し、そのSeifert曲面を構成する方法としてSeifertのアルゴリズムが知られている。R^4内の有向閉曲面に対するSeifert多様体の構成法は、例えば河内―渋谷―鈴木[5]によるmotion picture methodを用いたものがある。最近Carter―斉藤[1]はR^4内の有向閉曲面に対し、Seifertのアルゴリズムに類似したSeifert多様体の構成法を与えた。我々はR^4内の閉2次元ブレイドに対して、Seifert多様体を構成する方法を与える。R^4内の有向閉曲面は常に閉2次元ブレイドに変形できる[3]ので、これはR^4内の有向閉曲面に対してそのSeifert多様体を構成する一つの方法である。

2次元ブレイドはチャートにより表わされるが、我々はこのチャートを用いてSeifert多様体をハンドル分解により与える。

注意．Carter－斉藤の構成法もそのSeifert多様体にある意味でハンドル分解を与えているが，それは虫食い穴のあるハンドル体に1－ハンドルと2－ハンドルを接着する形式となっている。しかし、彼らの方法は与えられたR^4内の有向閉曲面に直接（ただし、それがR^3への正則な射影を与えている時）に適用できるという長所がある。我々の構成法は彼らの方法の特殊なケースとして解釈できることを注意する。

チャート及びそれが表わす2次元ブレイドの定義は[2]［4］を参照。

構成法を述べる前にそこで用いられる用語の説明をする。

Fを4次元多様体W内に埋め込まれた有向曲面とする。hをWに埋め込まれた3次元球又はソリッドトーラスで，$F\cap h = F\cap \partial h$ かつ次の(1)(2)(3)のいずれかを満たすとき，hはFに1－ハンドル（(1)のとき），2－ハンドル（(2)のとき），ラウンドハンドル（(3)のとき）として接着しているという。

(1) hは3次元球で$F\cap h$は∂h上の2枚の2次元球である。

(2) hは3次元球で$F\cap h$は∂h上の1枚のアニュラスである。

(3) hはソリッドトーラス $S^1\times I\times I$ で，$F\cap h$ は $S^1\times I\times\partial I$ である。

W内の曲面 $F'=cl(F\cup\partial h-F\cap h)$ をFからhに沿って手術して得られた曲面という。(1)及び(3)のときF'は向きつけ不可能となる場合もあるが，ここでは向きつけ可能となる場合のみを考え，F' にはFより誘導される向きを入れる。

Mを有向3次元多様体とする。M_0をM内の有向3次元多様体とし，$\partial M_0=F$ とする。M_0の向きがMの向きに一致し，$cl(M-M_0)=h$が3次元球又はソリッドトーラスで上の(1)(2)(3)のいずれかを満たすとき，hはM_0に接着する1-ハンドル((1)のとき)，2-ハンドル((2)のとき)，ラウンドハンドル((3)のとき)であると呼ばれ，MはM_0にhを接着して得られた多様体であるという。

MをM_0にラウンドハンドルを一つ接着して得られた多様体とするとき，MはM_0に1-ハンドルを一つ接着し，その後2-ハンドルを一つ接着して得られる。

mを自然数とする。$B^2=\{(x,y)\in R^2 \mid 0\le x\le m+1,\ -1\le y\le 1\}$とし，点 $z_i=(i,0)\in R^2$，点 $\overline{z_i}=(i,-1)\in R^2$ $(i=1,2,\cdots,m)$ とする。A_iをz_iと$\overline{z_i}$を結ぶ線分$\{(x,y)\in R^2 \mid x=i,\ -1\le y\le 0\}$，$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m$，$X_m=\{z_1,\cdots,z_m\}$，$\overline{X_m}=$

$\{\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_m\}$, $D^2 = \{(w, t) \in R^2 \mid 0 \le w \le 1,\ 0 \le t \le 1\}$とする。

Fを$B^2 \times D^2$内の2次元ブレイドとする。定義より∂D^2上の各点pに対し、$F \cap B^2 \times \{p\} = X_m \times \{p\}$が成立する。さて、$B^2 \times D^2$内の閉曲面$\hat{F}$を次の様に定める。

$$\hat{F} = F \cup \overline{X_m} \times (\mathrm{int}\, D^2) \cup A \times \partial D^2.$$

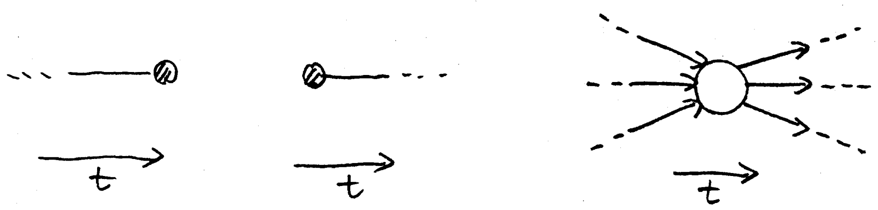
$\hat{F}$にFから誘導される向きを入れる。

<u>補題1</u>　$B^2 \times D^2$をR^4内へ埋め込んだとき、$\hat{F}$はFのclosureにR^4内でアンビエントアイソトピックである。

証明は省略する。

我々は上の$\hat{F}$が張る3次元多様体を$B^2 \times D^2$の中に構成する。

Fを表わすチャートをΓとする。ΓをD^2内のアンビエントアイソトピーによりt座標に関してΓは"モース的"であるとする。すなわち、$p_2 : R^2 \to R$を$p_2(w, t) = t$とし、p_2のΓへの制限を考えるとき、これがΓの頂点以外（1次元多様体）では普通の意味でのモース関数であり、頂点の近傍では次の様であるとする。



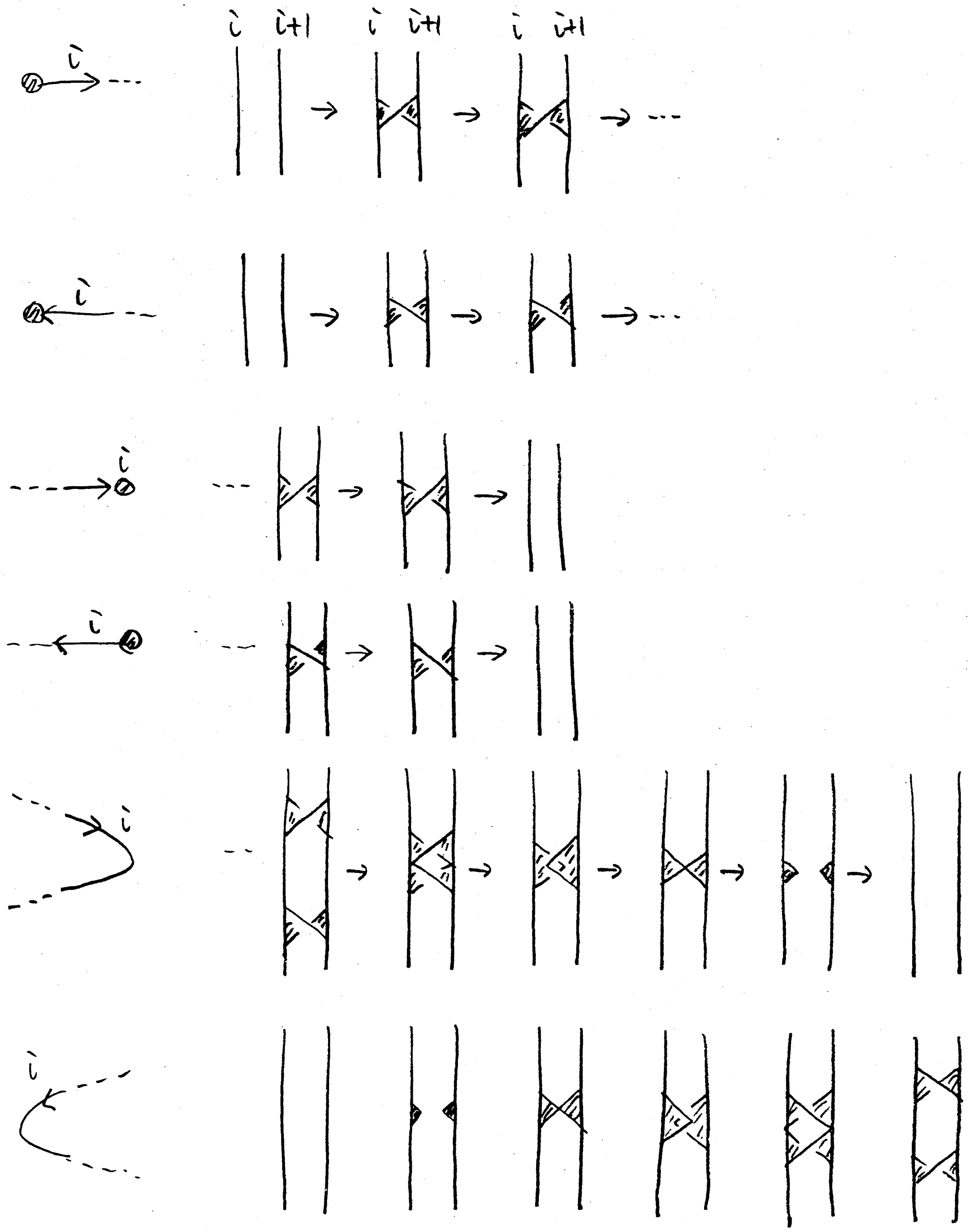
<u>Case 1</u>　Γが空のとき。この時Fは自明な2次元ブレイド $X_m \times D^2$ である。

$$\partial(A \times D^2) = \partial A \times D^2 \cup A \times \partial D^2$$
$$= X_m \times D^2 \cup \overline{X_m} \times D^2 \cup A \times \partial D^2$$
$$= \hat{F}$$

であるから、$M_1 = A \times D^2$ が求める3次元多様体である。(M1 は m 個の3次元球に同相。)

<u>Case 2</u>　Γが ribbon (Γは free edge と loop のみから成る) のとき。

Fは自明な2次元ブレイド $F_1 = X_m \times D^2$ に1-ハンドルとラウンドハンドルをいくつか接着し，それに沿って F_1 を手術することにより得られる。ここで用いる各1-ハンドルは free edge に，各ラウンドハンドルは loop に対応して次の様に構成される。

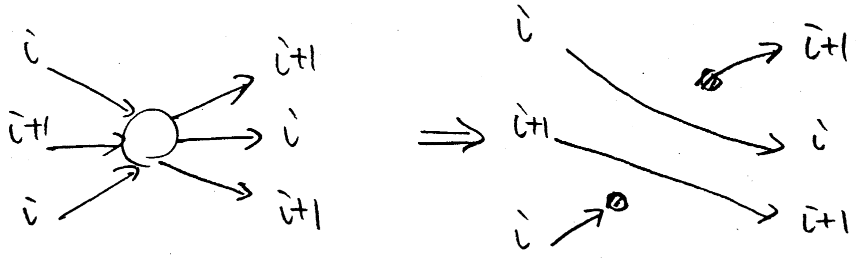


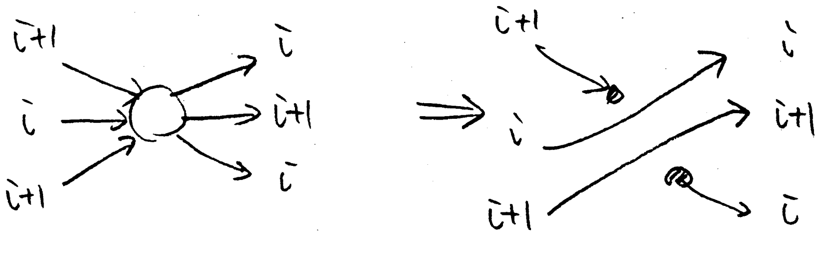
 と  については省略する。

M_1をCase 1の3次元多様体$A\times D^2$とし、$h_1^1,\cdots,h_s^1$を上の様に構成されたfree edgeに対応する1-ハンドルとし、$r_1,\cdots,r_t$をloopに対応するラウンド1-ハンドルとする。ここでsはΓのfree edgeの数、tはloopの数である。

$M_2=M_1\cup\bigcup_{i=1}^{s}h_i^1\cup\bigcup_{j=1}^{t}r_j$が求める3次元多様体である。

<u>Case 3</u>　一般の場合。Γは白の頂点をいくつか持つ。各白の頂点を次の様に置き直して得られたチャートをΓ'とする。(Γ'は白の頂点を持たない、すなわちribbonである。)

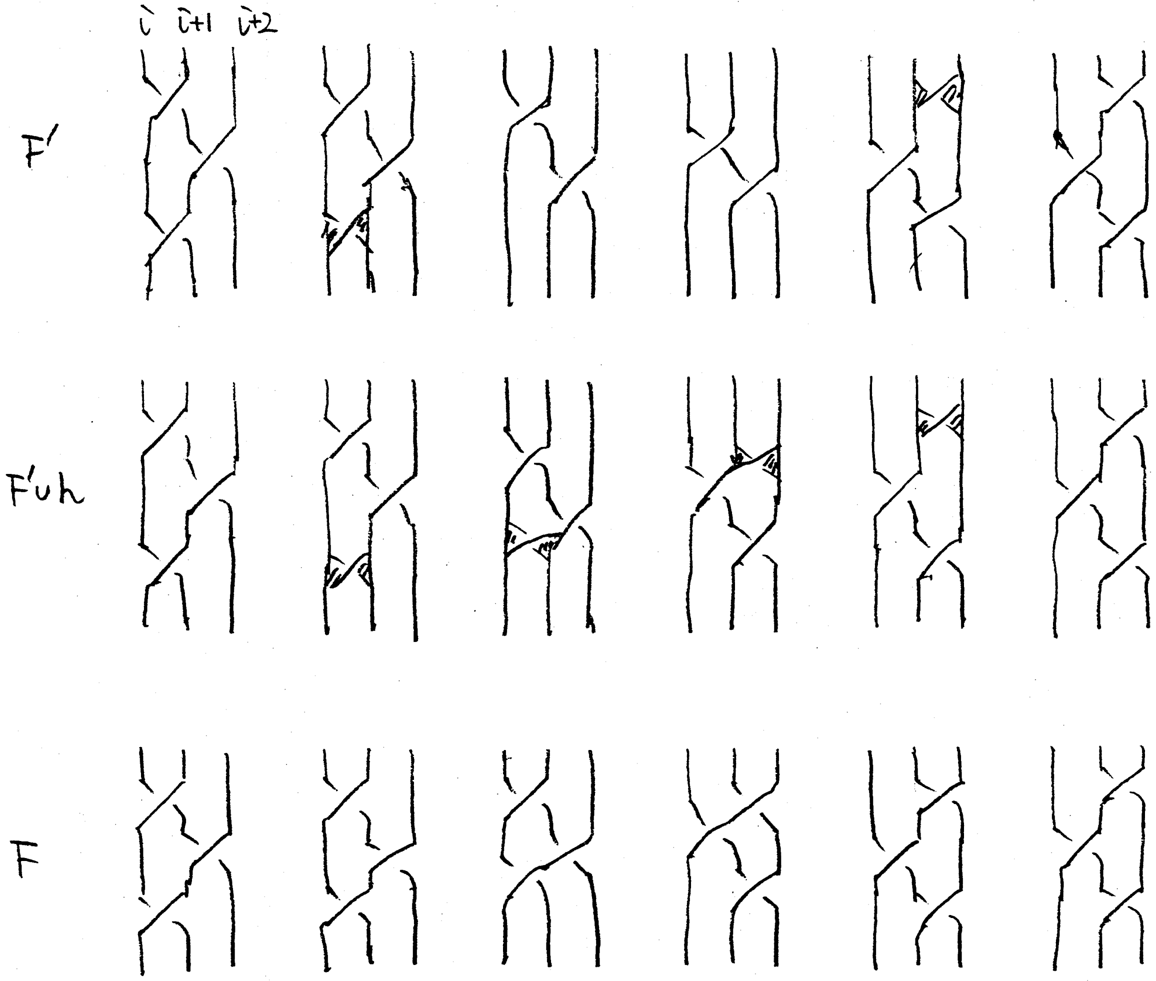
(ア) 

(イ) 

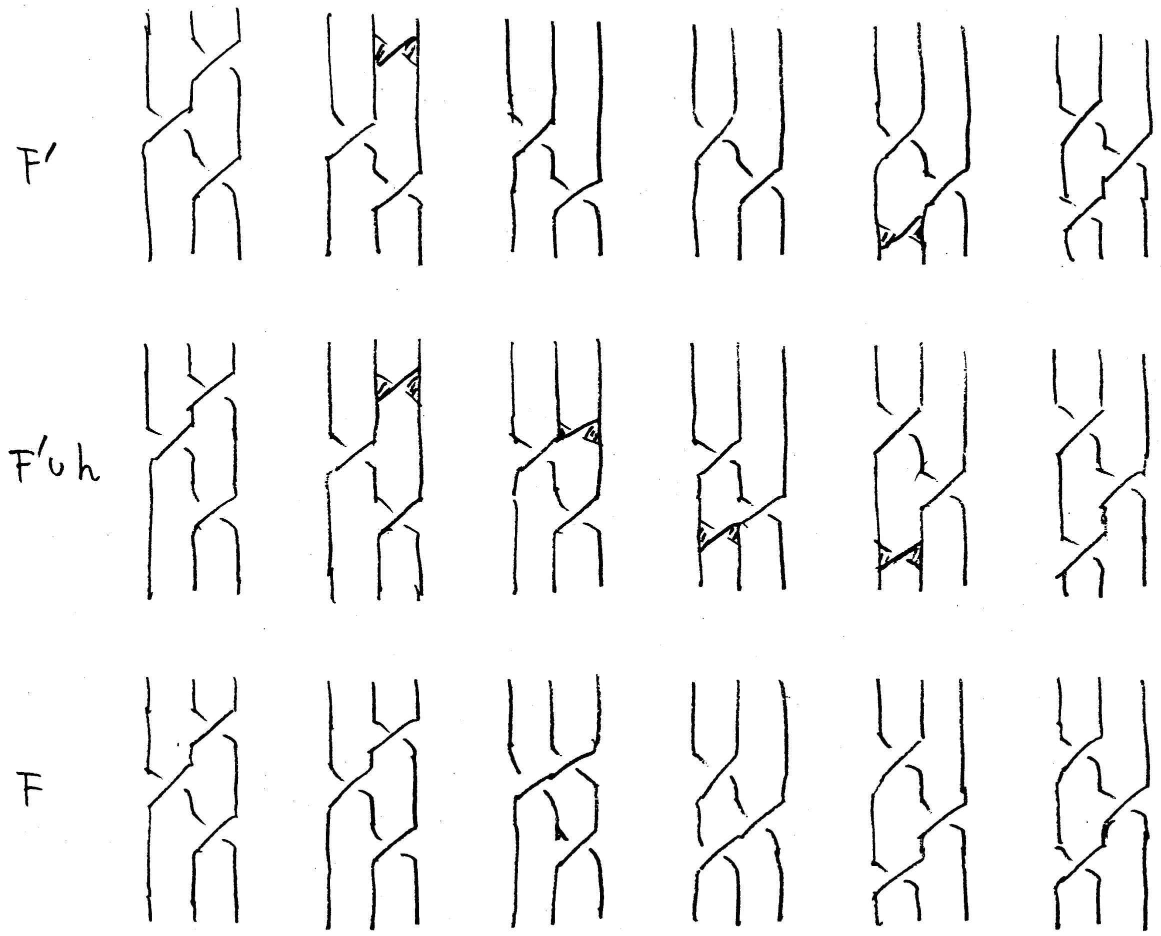
Γ'が表わす2次元ブレイドをF'とする。Γ'に対してCase 2の様に$\hat{F}'$が張る3次元多様体M_2を構成せよ。

さて、FはF'に白の頂点に対応する位置に次の様に2ーハンドルhを接着して手術することにより得られる。

(ア)の場合。



(イ)の場合。



この2-ハンドル h は M_2 に対し 2-ハンドルとして接着していることに注意せよ。

$h_1^2, \cdots, h_u^2$ をこれらの 2-ハンドルとする。ここで u は Γ の白の頂点の数である。

$M_3 = M_2 \cup \bigcup_{i=1}^{u} h_i^2$ が求める3次元多様体である。

この構成法により次が示された。

<u>定理</u>　Γを2次元ブレイドFを表わすチャートとする。Case 3の様にΓから白の頂点をとり除いて得られるチャートをΓ'とせよ。sをΓ'のfree edgeの数，tをΓ'のloopの数，uをΓの白の頂点の数とするとき，Fは次の分解を持つ3次元多様体Mを$B^2 \times D^2$内に張ることができる。

$$M \cong (m\text{個の}0\text{-ハンドル}) \cup (s\text{個の}1\text{-ハンドル}) \cup (t\text{個のラウンドハンドル}) \cup (u\text{個の}2\text{-ハンドル})。$$

参考文献

[1] J. S. Carter and M. Saito, A Seifert algorithm for knotted surfaces, preprint.

[2] S. Kamada, Surfaces in R^4 of braid index three are ribbon, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 1 (1992) 137–160.

[3] S. Kamada, A characterization of groups of closed orientable surfaces in 4-space, preprint.

[4] S. Kamada, 2-dimensional braids and chart descriptions, preprint.

[5] A. Kawauchi, T. Shibuya and S. Suzuki, Descriptions on surfaces in four-space, II, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 11 (1983) 31–69.