数理解析研究所講究録
813巻 1992年 117-128



# ON SATELLITE KNOTS

日本大学 文理学部
茂手木 公彦 (KIMIHIKO MOTEGI)

河野正晴氏(神戸大学)との共同研究です.

## 1. 問題と結果

以下. knot は oriented であるとし. 2つの knots $K_1, K_2$ は $S^3$ と knots の向きを保つ同相写像が存在するとき $K_1 \cong K_2$ と表わす.

まず. satellite knot の構成([S2])について復習しよう.

$V$ : $S^3$ 内に標準的に埋め込まれた solid torus
$\cup$
$K$ : $V$ 内の knot 但し. $V$ 内の 3-ball には含まれず 更に $V$ の core にもなっていないものとする.

($V$ と $K$ の組 $(V, K)$ を pattern と呼ぶ.)

$f : V \hookrightarrow S^3$ ; $V$ から $S^3$ への向きを保つ埋め込み

pattern $(V, K)$ と $f : V \hookrightarrow S^3$ により. $f(K) \subset S^3$ という新しい knot を得ることができる. 特に, $f(V)$ が knotted solid torus になるとき $f(K)$ を satellite knot と呼ぶ．ここで，$f(K)$，$f(V)$ などは $f$ によって $K$，$V$ から誘導された向きを持っているとする．

本稿の目的は次の問題に対する解答を与えることである．

<u>問題</u>

$(V, K)$：pattern

$f: V \hookrightarrow S^3$：$f(V)$ が knotted である向きを保つ埋め込みが与えられたとき

$g: V \hookrightarrow S^3$：向きを保つ埋め込みで $g(K) \cong f(K)$ となるものの isotopy 類を決定せよ．

埋め込み $V \hookrightarrow S^3$ を記述するために，次を用意しておく．

$C_V$ を $V$ の oriented core とする．

meridian－longitude pair $(m_V, l_V)$ を $[l_V] = [C_V] \in H_1(V)$，$m_V$ と $C_V$ の linking 数が 1 となるように定める．

$f(V)\,(\subset S^3)$ に対しても $f(C_V)$ を $f(V)$ の oriented core として採用することにより，$f(V)$ の meridian－longitude pair $(m_{f(V)}, l_{f(V)})$ が一意に決まる．このとき，

$$[f(l_V)] = [l_{f(V)}] + n[m_{f(V)}] \in H_1(\partial f(V))$$

と表わされる．そこで，埋め込み $f$ の twist 数を $n$

で定義し、twist$(f) = n$ と表わす.

次の事実は"solid torus 上の同相写像は境界上で一致していれば境界上 constant な isotopy で結べる"ということから直ちにわかる.

<u>命題 1.1.</u>

$f, g : V \hookrightarrow S^3$ : 向きを保つ埋め込み に対して次が成り立つ.

$$f \underset{\text{isotopic}}{\cong} g \iff f(C_V) \cong g(C_V) \text{ かつ } \mathrm{twist}(f) = \mathrm{twist}(g)$$

$\mathrm{wrap}_V(K)$ = K と V の meridian disk の幾何的交点数の最小数 = 1 のときは、Schubert の unique factorization theorem から次が従う.

<u>定理 1.2.</u> (Schubert [S1])

$(V, K)$ : pattern $\mathrm{wrap}_V(K) = 1$

$f, g : V \hookrightarrow S^3$ : 向きを保つ埋め込み

このとき、$f(K) \cong g(K) \iff f(C_V) \cong g(C_V)$ が成り立つ.

一方、$\mathrm{wrap}_V(K) \geq 2$ のときは次が成り立つ.

定理1.3.

$(V, K)$ : pattern $\mathrm{wrap}_V(K) \geq 2$

$f : V \hookrightarrow S^3$ : 向きを保つ埋め込み ($f(V)$ は knotted)

$g : V \hookrightarrow S^3$ を $g(K) \cong f(K)$ となる向きを保つ埋め込みとする. このとき, $g(C_V) \cong f(C_V)$ か, あるいは $f(C_V) \cong K_0 \# K_1$ ($K_0, K_1$ は $(V, K)$ と $f$ により一意に決まる) と表わしたとき, $g(C_V) \cong (-K_0) \# K_1$ となる. 更に, いずれの場合も $\mathrm{twist}(g) = \mathrm{twist}(f)$ となる.

この定理の系として次を得る.

系 1.4.

$(V, K)$ 及び $f : V \hookrightarrow S^3$ は定理1.3と同様.

$f$ と isotopic ではない向きを保つ埋め込み $g : V \hookrightarrow S^3$ で $g(K) \cong f(K)$ となるものは up to isotopy で一意.

特に $[K] \neq 0 \in H_1(V)$ となるような pattern $(V, K)$ に対しては次が成り立つ.

定理1.5.

$(V, K)$ : pattern　$\mathrm{wrap}_V(K) \geq 2$, $[K] \neq 0 \in H_1(V)$

このとき．$f(K) \cong g(K) \Leftrightarrow f \cong g$ が成立する．

## 2. 定理1.3の証明の概略

定理1.3を示すのに次の定理を証明すればよい．

定理2.1.

$V$を$S^3$内のknotted solid torusとし．$K$を$V$内のknotで$\mathrm{wrap}_V(K) \geq 2$をみたすものとする．

$h : V \hookrightarrow S^3$を$h(K) = K$である向きを保つ埋め込みとする．このとき．次が成り立つ．

$h(C_V) \cong C_V$か$C_V \cong K_0 \# K_1$（$K_0$, $K_1$は$(V, K)$により一意に決まる）と表わしたとき．$h(C_V) \cong (-K_0) \# K_1$となる．更に．いずれの場合も$\mathrm{twist}(h) = 0$となる．

定理2.1の証明は次の性質(*)をみたすsolid torus

$W \subset V$が存在するかどうかで２つのステップにわかれる．

定義(性質(*))

Vの中のsolid torus Wが性質(*)をみたす.

$\Leftrightarrow$ (1) $\mathrm{int}\, W \supset K$

(2) $\mathrm{wrap}_V(C_W) = 1$ かつ $C_W$ はVのcoreではない

命題2.2

[定理2.1の仮定] + [性質(*)をみたすsolid torus Wが存在しない]

このとき. $h(C_V) \cong \varepsilon C_V$ $(\varepsilon = \pm 1)$ かつ $\mathrm{twist}(h) = 0$ となる.

この命題はJaco-Shalen [J-S], Johannson [Jo] による torus分解, Seifert fibred多様体の性質 [J] 及び simple多様体のmapping class groupの有限性 [Jo] などを用いて示される.

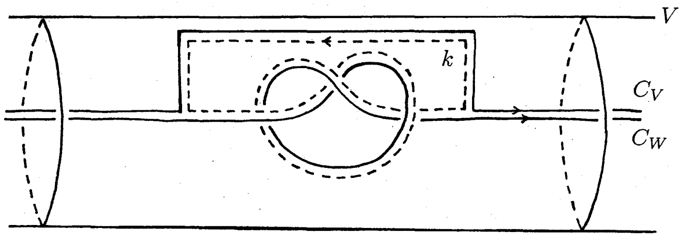
次に性質(*)をみたすsolid torus Wが存在する場合について考える.

性質(*)をみたすsolid torus Wに対し. W内にはもはや性質(*)をみたすsolid torusが存在しないとき. Wを(*)-minimalなsolid torusと呼ぶ.

補題 2.3.

$V$ 内に性質(*)をみたす solid torus があるとき、(*)-minimal な solid torus $W$ が up to isotopy で一意に存在する.

(*)-minimal な solid torus を $W$ とする. $W$ の core $C_W$ に $[C_W]=[C_V]\in H_1(V)$ となるように向きを与える. このとき. $C_W\cong C_V\# k$ と表わされる.




補題 2.3 により. 上の分解は $(V, K)$ により一意に決まる.

ここで. $C_V$ の標準的分解を次のように定義する.

定義 ( $C_V$ の標準的分解 )

$V$ 内に(*)-minimal な solid torus $W$ が存在しないときは. $K_0\cong C_V$ とおき. $C_V$ の標準的分解を $C_V\cong K_0$ と定める.

$V$ 内に(*)-minimal な solid torus $W$ が存在すると

きは以下のように定める.
まず先のように $C_W \cong C_V \# k$ と分解し．更に $k$ を $k \cong k_1 \# \cdots \# k_n$ と素分解する．ここで．$k_1, \cdots, k_n$ の中の invertible factors 及び $k_i \cong -k_j$ となる組 $(k_i, k_j)$ を全て取り除き(必要なら番号をつけかえて) $k_1 \# \cdots\cdots \# k_m$ を得る．($k_1 \# \cdots \# k_m \cong$ trivial knot のときもありうる.) 残った $k_1 \# \cdots \# k_m$ に対し．$K_1 \cong -(k_1 \# \cdots\cdots \# k_m)$ とおく． もし $C_V$ がある knot $K_0$ に対し $C_V \cong K_0 \# K_1$ となるならば $C_V$ の標準的分解を $C_V \cong K_0 \# K_1$ で定め．このような分解をもたないときは．$K_0 \cong C_V$ とおき．$C_V \cong K_0$ をその標準的分解と定める.

$C_V$ の標準的分解は定義より $(V, K)$ にのみ依存していることに注意.

W は $(*)$-minimal な solid torus であったので、この W に対して命題 2.2 を適用し.

$$\begin{cases} h(C_W) \cong \varepsilon C_W \quad (\varepsilon = \pm 1) \\ h|_W : W \hookrightarrow S^3 \text{ に対し } \operatorname{twist}(h|_W) = 0 \end{cases}$$

を得る.

補題 2.4.

(1) もし $\mathcal{R}(C_v) \neq C_v$ ならば，$C_v$ の標準的分解 $C_v \cong K_0 \# K_1$ に対し $\mathcal{R}(C_v) \cong (-K_0) \# K_1$ となる.

(2) $\mathrm{twist}(\mathcal{R}) = 0$

証明

$C_w \cong C_v \# k$，$\mathcal{R}(C_w) \cong \varepsilon C_w$ であるから，$\mathcal{R}(C_v \# k) \cong \varepsilon (C_v \# k)$ となる． また，$\mathcal{R}(C_v \# k) \cong \mathcal{R}(C_v) \# k$ に注意して，結局 $\mathcal{R}(C_v) \# k \cong \varepsilon (C_v \# k)$ となる． 今，$\varepsilon = 1$ とすると $\mathcal{R}(C_v) \cong C_v$ となるので，$\varepsilon = -1$ とする.
このとき，$\mathcal{R}(C_v) \# k \cong (-C_v) \# (-k)$ となる． $k \cong k_1 \# \cdots \# k_n$ を $k$ の素分解とする． $\mathcal{R}(C_v) \# k_1 \# \cdots \# k_n \cong (-C_v) \# (-k_1) \# \cdots \# (-k_n)$ において，$k_\ell$ が invertible であれば，$k_\ell \cong -k_\ell$ を両辺から取り除き（全ての invertible factors について行なう)、次に $(k_i, k_j)$ が $k_i \cong -k_j$ をみたせば，両辺から $k_i \cong -k_j$，$k_j \cong -k_i$ を取り除く（この操作も全ての組に対して行なう)． その結果（必要なら番号をつけかえて)

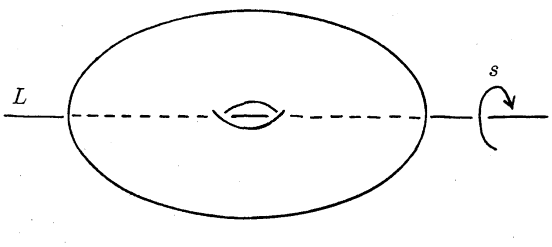
$$\mathcal{R}(C_v) \# k_1 \# \cdots \# k_m \cong (-C_v) \# (-k_1) \# \cdots \# (-k_m)$$

となる． $K_1 = (-k_1) \# \cdots \# (-k_m)$ とおくと，$\mathcal{R}(C_v) \# (-K_1) \cong (-C_v) \# K_1$ となる． $\mathcal{R}(C_v) \# (-K_1)$ の素分解は

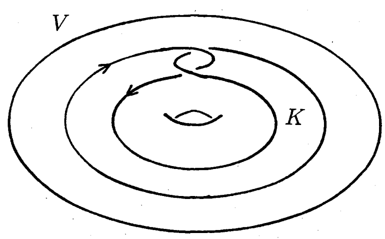
一意的なので $-C_v \cong (-K_1) \# K'$, $\mathfrak{r}(C_v) \cong K_1 \# K''$ となり、更に $K' \cong K''$ となる。そこで、$K_0 = -K' \cong -K''$ とおけば、$C_v \cong K_0 \# K_1$, $\mathfrak{r}(C_v) \cong (-K_0) \# K_1$ となる. これで (1) が示された。((2) は略.)

## 3. Examples

pattern $(V, K)$ に対し、$V$ 上の向きを保つ同相写像 $\psi : V \longrightarrow V$ で $[\psi(C_v)] = -[C_v] \in H_1(V)$ かつ $\psi(K) = K$ (向きも込めて) となるものが存在するとき、$(V, K)$ を symmetric な pattern と呼ぶ. また、$s : V \longrightarrow V$ を下図の $L$ に関しての $\pi$-rotation とする.




例 下の pattern は symmetric.



例 $(V, K)$ を symmetric な pattern.
$f: V \hookrightarrow S^3$ を $f(C_V)$ が non-invertible (例えば pretzel knot $K(3,5,7)$ [T]) となる埋め込みとする.
このとき、2つの埋め込み $f$, $g = f \circ s$ に対して
$f(K) \cong g(K)$ かつ $f(C_V) \ncong g(C_V)$ となる.

この例は定理1.3において $K_1$ が trivial knot のときに対応している.

例 $(V, k)$ を $\mathrm{wrap}_V(k) = 1$ で $k \cong K(3,5,7)$ である pattern とする. ($k$ の向きは $[k] = [C_V] \in H_1(V)$ となるように与えておく.) $(V, k)$ において $k$ の代りに $k$ の untwisted double をとることによって得られる pattern を $(V, K)$ とする.
$f: V \hookrightarrow S^3$ を $f(C_V) \cong (-k) \# (-k)$ となる埋め込み,
$g: V \hookrightarrow S^3$ を $g(C_V) \cong k \# (-k)$ となる埋め込みとする。 このとき, 2つの埋め込み $f$, $g$ に対して
$f(K) \cong g(K)$, $f(C_V)$ と $g(C_V)$ は最も弱い意味でも同値ではない ($S^3 - f(C_V)$ と $S^3 - g(C_V)$ は同相ではない).

## References


[J] W. Jaco, *Lectures on three manifold topology*, Conference board of Math. Science, Regional Conference Series in Math. 43. Amer. Math. Soc., 1980.

[J-S] W. Jaco and P.Shalen, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **220** (1979).

[Jo] K. Johannson, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Math., Vol.761. Springer-Verlag, 1979.

[S1] H. Schubert, *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knoten in Primknoten*, Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math. nat. KI. 1949, 3. Abh., 57–104.

[S2] H. Schubert, *Knoten und Vollringe*, Acta Math. **90** (1953), 131–286.

[T] H. F. Trotter, *Non-invertible knots exist*, Topology **2** (1964), 275–280.