数理解析研究所講究録
813巻 1992年 89-101

Some branched coverings of knots

関西学院大学理学部　張替 俊夫
(Toshio Harikae)

§1. はじめに

knot K 上 branch する S^3 の branched covering space を単に K の branched covering と呼ぶ。Hilden [8] と Montesinos [10] は任意の向きづけ可能3次元閉多様体がある knot の 3-fold irregular branched covering であることを示した。そこで、与えられた knot の 3-fold irregular branched covering はどんな空間になるかという問題を得る。その解答として Murasugi [11] は closed 3-braid の simple 3-fold irregular branched covering がもし存在すればレンズ空間 $L(n,1)$ と同相であることを示し、Hosokawa と Nakanishi [9] は pretzel knot の 3-fold irregular branched covering がもし存在すれば、$L(n,1)$ またはこれらの空間の連結和と同相であることを明らかにした。ここで "simple" とは branch index が2以下のことで、また $L(0,1)$、$L(1,1)$ はそれぞれ $S^2\times S^1$、S^3 を表す。

本稿では内田氏との共同研究[7]に基づき、特にMontesinos knotの5-fold irregular dihedral branched covering (3-fold irregularの場合の拡張)を考える。ChumillasとMontesinos[3]は$S^2\times S^1$が任意の奇素数pに対してknotのp-fold irregular dihedral branched coveringになり得ないことを示している。また§3で、knotのtetrahedral branched coveringについて考察する(詳細については[5]を参照されたい)。なお本稿は[6]の一部をなしていることを付記しておく。

§2. Irregular dihedral branched covering

D_pを正p角形の対称性を表す群(p次の二面体群)とする。D_pは$\langle a, b \mid a^2, b^p, abab\rangle$で表示され、$p$次の対称群$\Sigma_p$の部分群である。$K$で$S^3$内のknotを表し、$G=\pi_1(S^3-K)$を$K$のknot groupとする。このとき、$G$の$D_p$上への表現$\mu$を$K$の$D_p$表現と呼ぶ。以下$p$を奇素数とする。

<u>Def 2.1</u> μ, μ'をKのD_p表現とする。このとき$\mu'=\theta\mu$となるΣ_pの内部自己同型写像θが存在するとき、μとμ'は同値であるという。

$M_2(K)$でKの2-fold branched coveringを表す。KのD_p表現

の同値類の個数は、$H_1(\tilde{M}_2(K);\mathbb{Z}_p)$ の rank ν を使って次の定理で与えられる。証明は Fox [4] の第10節の議論を用いて容易に得られる。

<u>Th 2.2</u>　K の D_p 表現の同値類の個数は $(p^{\nu}-1)/(p-1)$ で与えられる。

$\Delta_K(t)$ を K のアレクサンダー多項式とすると、$\Delta_K(-1)$ は $H_1(\tilde{M}_2(K))$ の torsion 元の積と等しい。従って

<u>系 2.3</u>　K の D_p 表現が存在するための必要十分条件は $\Delta_K(-1)\equiv 0 \mod p$ が成り立つことである。

以下 D_p 表現 μ に付随した K の p-fold irregular dihedral branched covering (以下、D_p-branched covering と呼ぶ) $\tilde{M}_\mu(K)$ を考察する。K が 2-bridge knot $S(\alpha,\beta)$ であるとき、もし $\alpha\equiv 0 \mod p$ ならば K の D_p 表現 μ が1つ存在し(同値類の個数が1)、$\tilde{M}_\mu(K)$ は S^3 と同相になる。そこで bridge index が3以上の knot について考えたいが、そのために Montesinos knot に着目し、特に $p=5$ のとき考える。($p\geq 7$ でも以下の議論と同様のことが成り立つ。) Figure 1 で与えられる diagram

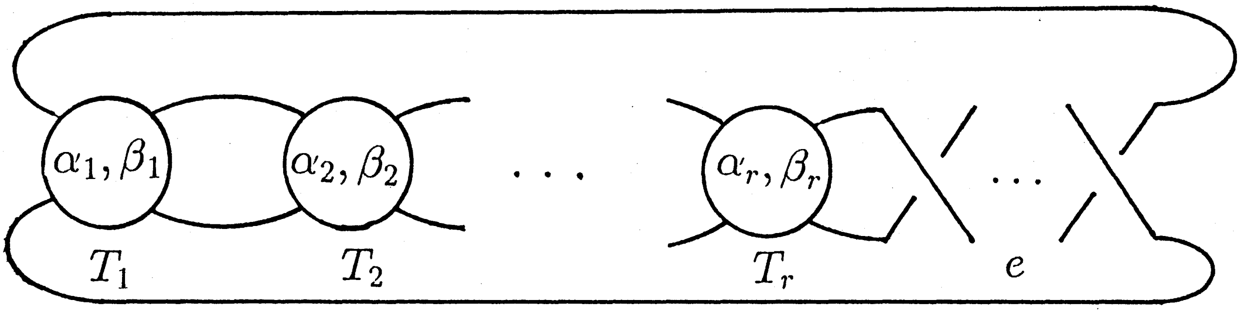

Figure 1

を持つknotをMontesinos knotと呼び、

$$M(e;(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),\cdots,(\alpha_r,\beta_r))$$

で表す。ここで(α_i,β_i)はrational tangle T_iに対するSchubert notationであり、eはhalf twistの数である。ν'を$\alpha_i\equiv 0 \bmod 5$を満すiの個数とする。すると次の主定理を得る。

<u>Th 2.4</u> KをMontesinos knotとする。

(1) $\nu'=0$でKのD_5表現が存在するなら、D_p表現の同値類は1通りで、付随するD_5-branched coveringはS^3と同相。

(2) $\nu'=1$なら、KのD_5表現は存在しない。

(3) $\nu'\geqq 2$なら、KのD_5表現は存在し、同値類の個数は$\frac{1}{4}(5^{\nu'-1}-1)$で与えられる。付随する$D_5$-branched coveringは$L(p_i,q_i)\# L(p_i,q_i)$ またはこれらの空間の連結和である。ただし(p_i,q_i)は(α_j,β_j), $1\leqq j\leqq r$, $(0,1)$または

(1, 1) と等しい。

この定理を示すため、まず ν' と ν (この場合は $H_1(\tilde{M}_2(K);\mathbb{Z}_5)$ の rank) の関係を示す。K が Figure 1 の diagram を持つなら

$$H_1(\tilde{M}_2(K)) = \left\langle \begin{matrix} s_1, \cdots, s_r \\ h \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} s_i^{\alpha_i} h^{\beta}, \; 1 \leqq i \leqq r \\ s_1 s_2 \cdots s_r h^{e} \end{matrix} \right\rangle$$

を得る ([1] または [2] を参照せよ)。従って次を得る。

<u>Lemma 2.5</u> (1) $\nu' = 0$ なら、$\nu = 0$ または 1。
(2) $\nu' \geqq 1$ なら、$\nu = \nu' - 1$。

Th 2.4 を証明するため、付随する D_5-branched covering を変えない knot の diagram に対する操作を導入する。knot K が D_5 表現 μ を持つとき、G が K の Wirtinger 表示によって $\langle x_i \mid r_j \rangle$ で表されるなら、$\mu(x_i)$ は (25)(34), (12)(35), (13)(45), (14)(23), (15)(24) のうちの1つと等しい。そこで便宜上記号 $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$ を上の5つの元に対して導入する。trivial tangle (B, t) に対して、t の2本の arc に対する D_5 表現がそれぞれ $\bar{u}, \bar{v}$ ($\bar{u} \neq \bar{v}$) ならば、t 上 branch する B の付随する D_5-branched covering は 3-ball である。従って次を得る。

<u>Lemma 2.6</u> knot K が D_5 表現 μ を持つとする。このとき K の diagram に対する以下の操作 I, II によって、knot または link K′ と K′ に対する D_5 表現 μ' を得たとすると、$\widetilde{M}_{\mu'}(K')$ は $\widetilde{M}_{\mu}(K)$ と同相になる。ただし Figure 2, 3 において $\bar{u}$, $\bar{v}$ は $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ の異なる元。

I.

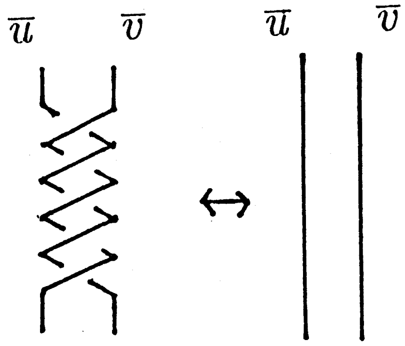

Figure 2

II.

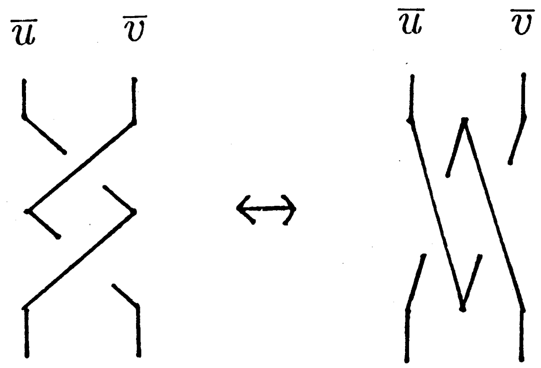

Figure 3

<u>Remark</u> (1) 操作 I は II より得られる。

(2) Lemma 2.6 において $\bar{u} = \bar{v}$ を許したとしても、K と K′ の 2-fold branched covering の $\mathbb{Z}_5$-rank は等しい。

<u>Th 2.4 の証明</u>　Tを(α,β)型のrational tangleとする。$\alpha\equiv 0 \bmod 5$のときTの4つの端点の表現は2通りある(Figure 4)。また$\alpha\not\equiv 0 \bmod 5$のとき端点の表現は2通りある(Figure 5)。もしKに対して$\nu'=0$でD_5表現μを持てばKの各tangleに対する表現はFigure 5(ii)で与えられる。この

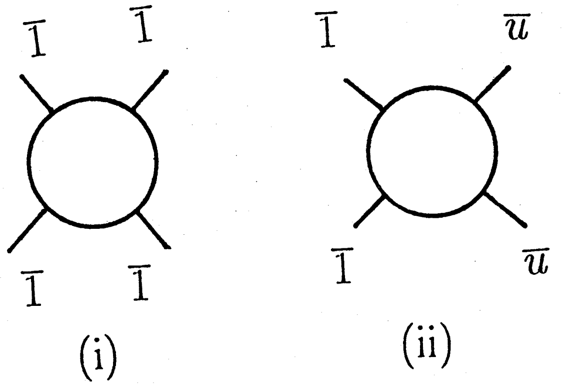

Figure 4

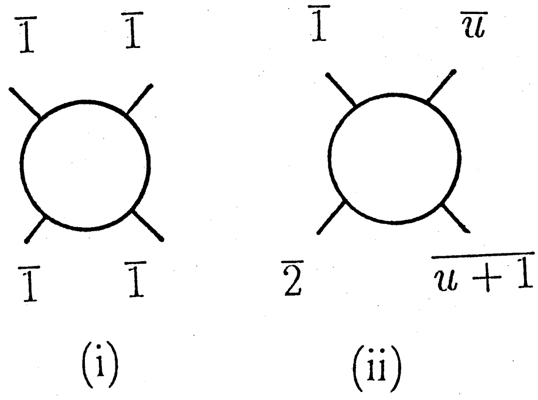

Figure 5

ときisotopyでKの各tangleにhalf twistを加えることで$\overline{u}=\overline{1}$に変えることができる。このようなtangleはLemma 2.6の操作でhorizontal trivial tangleに変えられる。従って得られる空間はS^3と同相。

$\nu'=1$のとき$\nu=0$よりKはD_5表現を持たない。

$\nu'\geq 2$のとき$\nu=\nu'-1$よりKのD_5表現の同値類の個数は$(5^{\nu'-1}-1)/4$と等しい。Kのtangle Tに対して$\alpha\not\equiv 0 \bmod 5$なら表現はFigure 5(i)で与えられる(なぜなら$\alpha\equiv 0 \bmod 5$となる他のtangleが存在する)。もしTに対して$\alpha\equiv 0 \bmod 5$

なら表現はFigure 4 (i) または (ii) で与えられる。Figure 4 (ii) のtangleはLemma 2.6の操作I, IIでvertical trivial tangleに変えられる。この結果得られるlinkを $L=L_1\cup L_2\cup\cdots\cup L_n$ とすると、L_i は2-bridge knot $S(\alpha_j,\beta_j)$ の連結和で $2\le n\le\mu'$. しかも L_i は $\bar{1},\bar{2},\cdots,\bar{5}$ のうちの1つの元がわりふられている。もし $n=2$ なら、L_1 と L_2 には異なる元 $\bar{u},\bar{v}$ がそれぞれわりふられ、$\tilde{M}_\mu(L)$ は $\overset{2}{\underset{i=1}{\#}}(\tilde{M}_2(L_i)\#\tilde{M}_2(L_i))$ と同相であり、この空間は $L(\alpha_j,\beta_j)\# L(\alpha_j,\beta_j)$ あるいはこれらの連結和となる。次に $n=3$ のとき、L_1,L_2,L_3 に $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ がわりふられているとする。ただし $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ はすべて同じ元にはなり得ないので $\bar{u}\ne\bar{v}$ を仮定する。μ_1,μ_2 をそれぞれ $\bar{u}$ と $\bar{v},\bar{w}$ がinduceする $L_1\cup L_2$, L_3 の表現とする。そこで $L_1\cup L_2\subset B_1$, $L_3\subset B_2$, $B_1\cup B_2=S^3$, $\partial B_1=\partial B_2$ となる3-ball B_1,B_2 をとる。$\tilde{M}_{\mu_1}(L_1\cup L_2)$ における B_2 のliftは3-ball $\tilde{B}_{21},\tilde{B}_{22},\cdots,\tilde{B}_{25}$ からなり、同様に $\tilde{M}_{\mu_2}(L_3)$ における B_1 のliftは3-ball $\tilde{B}_{11},\tilde{B}_{12},\cdots,\tilde{B}_{15}$ からなる。このとき $\tilde{M}_\mu(L)$ は $(\tilde{M}_{\mu_1}(L_1\cup L_2)-\bigcup_{i=1}^{5}\tilde{B}_{2i})\cup(\tilde{M}_{\mu_2}(L_3)-\bigcup_{i=1}^{5}\tilde{B}_{1i})$ で与えられる（ただし $\partial\tilde{B}_{1i}$ と $\partial\tilde{B}_{2i}$ は同一視）。$\tilde{M}_{\mu_2}(L_3)$ は3つの空間 $\tilde{M}_2(L_3)$, $\tilde{M}_2(L_3)$, S^3 からなるので、$\tilde{M}_\mu(L)$ は

$$\#(L(\alpha_j,\beta_j)\# L(\alpha_j,\beta_j))\#(S^2\times S^1)\#(S^2\times S^1)$$

と同相。$n\ge 4$ のときも同様に考えて、$\tilde{M}_\mu(L)$ は

$\#(L(\alpha_j,\beta_j)\# L(\alpha_j,\beta_j))$ と $S^2\times S^1$ の連結和であり、$S^2\times S^1$ の個

数は $2(n-2)$ である。■

ρ_μ を D_5 表現を持つ knot K に対する $H_1(\tilde{M}_\mu(K);\mathbb{Z}_5)$ の rank とする。Th 2.4 の証明より

<u>Cor 2.7</u>　Montesinos knot K が D_5 表現 μ を持てば

$$\rho_\mu = 2(\nu-1)。$$

かつて作間氏は次の Th が成り立つことを教示された。

<u>Th 2.8</u>　knot K が D_3 表現 μ を持てば

$$H_1(\tilde{M}_\mu(K);\mathbb{Z}_3)\oplus\mathbb{Z}_3 \cong H_1(\tilde{M}_2(K);\mathbb{Z}_3)。$$

この Th は $H_1(\tilde{M}_\mu(K);\mathbb{Z}_3)$ と $H_1(\tilde{M}_2(K);\mathbb{Z}_3)$ の表現行列を比較することで容易に得られる。そこで筆者はこの Th の "D_5 版" を考えた。すなわち

<u>Conj</u>　knot K が D_5 表現 μ を持てば

$$H_1(\tilde{M}_\mu(K);\mathbb{Z}_5)\oplus\mathbb{Z}_5 \cong H_1(\tilde{M}_2(K);\mathbb{Z}_5)。$$

ところが Cor 2.7 において $\nu \geq 2$ (すなわち $\nu \geq 3$) とすれ

ばこのConjの反例を与えることになる。一方Cor 2.7がMontesinos knot以外で成り立つかといえばそれはうそであり、実際9_{40}, 9_{49}, 10_{103}, 10_{155}に対して$\nu = 2$で$\rho_\mu = 1$となる。作間氏によると次のConjが成り立つのではないかということだが、今のところ不明である。任意の奇素数pに対して$\nu(K)$を$H_1(\tilde{M}_2(K) ; \mathbb{Z}_p)$のrank, $\rho_\mu(K)$をD_p表現μに対する$H_1(\tilde{M}_\mu(K) ; \mathbb{Z}_p)$のrankとする。

<u>Conj</u> knot KがD_p表現μを持てば

$$\nu(K) - 1 \leq \rho_\mu(K) \leq \frac{1}{2}(p-1)(\nu(K)-1).$$

§3. Tetrahedral branched covering

ここではknot K のknot group Gの4次の交代群A_4(正四面体群)上への表現μ(KのA_4表現と呼ぶ)とそれに付随したKのA_4-branched covering $\tilde{M}_\mu(K)$を考察する。詳しい証明等については[5]を参照されたい。

A_4は12の元を持ち、$A = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$を正規部分群として持つ。Aを法とする$A_4$のfactor groupは$\mathbb{Z}_3$と同型で、$A_4 = A \cup A(123) \cup A(132)$と表される。$B = A(123)$, $C = A(132)$とおく。$G = \langle x_i \mid r_j \rangle$を$G$のWirtinger表示とすると、$\mu : G \to A_4$がontoなら$\mu(x_i) \in B$または$\mu(x_i) \in C$が成

り立つ。§2と同様にμの同値数を定義する。$A_K(t)$をKのアレクサンダー行列（[2], [4]などを見よ）、ωを1の原始3乗根，νを$A_K(\omega)$の$\mathbb{Z}_2[\omega]$におけるnullityとする時、Th2.2の証明と同様の手法で次を得る。

Th 3.1　KのA$_4$表現の同値類は$\frac{1}{3}(4^{\nu-1}-1)$で与えられる。

よく知られているように（?）$A_K(\omega)$はKの3-fold cyclic branched covering $\tilde{M}_3(K)$と関係づけられる。すなわちβを$H_1(\tilde{M}_3(K);\mathbb{Z}_2)$のrankとする時，$\beta=2(\nu-1)$が成り立つことがわかる。従って

Th 3.2　KのA$_4$表現の同値類は$\frac{1}{3}(2^{\beta}-1)$で与えられる。

また、KのA$_4$表現が存在するための必要十分条件は、$\Delta_K(\omega)$が$\mathbb{Z}_2[\omega]$において0になることである。もし$\Delta_K(\omega)=a\omega+b$とおくなら、$a\equiv b\equiv 0 \mod 2 \Leftrightarrow \Delta_K(\omega)\Delta_K(\omega^2)=a^2+b^2-ab\equiv 0 \mod 4$，従って

Cor 3.3　KのA$_4$表現が存在するための必要十分条件は、$\Delta_K(\omega)\Delta_K(\omega^2)\equiv 0 \mod 4$が成り立つことである。

$\tilde{M}_\mu(K)$についてはKが2-bridge knotのとき、特徴づけが可能である。すなわち、

Th 3.4 2-bridge knotのA_4-branched coveringはもし存在すれば、あるレンズ空間と同相である。

証明 2-bridge knot Kを2つの2-string trivial tangle (B_1, t_1), (B_2, t_2)に分解する。ここで$B_1 \cup B_2 = S^3$, $\partial B_1 = \partial B_2$ $t_1 \cup t_2 = K$。$(B_i, t_i) \sim (D_i, \{x, y\}) \times I$, D_iは2点x, yを含むdiscで$I = [0, 1]$。$\{x, y\}$上branchするD_iのA_4-branched coveringはgenus 1のdisc。従ってt_i上branchするB_iのA_4-branched coveringはsolid torus。■

最後に1つの予想を掲げておく。

Conj. knot KがA_4表現μを持てば

$$H_1(\tilde{M}_\mu(K); \mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_2 \cong H_1(\tilde{M}_3(K); \mathbb{Z}_2)$$

参考文献

[1] M. Boileau and B. Zimmermann, *Symmetries of nonelliptic Montesinos links*, Math. Ann., **277** (1987), 563–584.

[2] G. Burde and H. Zieschang, "Knots," Walter de Gruyter & Co., Berlin–New York, 1985.

[3] V. Chumillas and J. M. Montesinos, *The homology of cyclic and irregular dihedral coverings branched over homology spheres*, Math. Ann., **280** (1988), 483–500.

[4] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, in "Topology of 3-manifolds and related topics (ed. by M. K. Fort Jr.)," Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962, 120–167.

[5] T. Harikae, *Tetrahedral branched coverings of spatial theta-curves*, preprint.

[6] 張替俊夫, 空間内のグラフの分岐被覆, 第 39 回トポロジー・シンポジウム講演集, 岩手大学, 1992 年 7 月, 113–125.

[7] T. Harikae and Y. Uchida, *Irregular dihedral branched coverings of knots*, preprint.

[8] H. M. Hilden, *Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3*, Bull. Amer. Math. Soc., **80** (1974), 1243–1244.

[9] F. Hosokawa and Y. Nakanishi, *On 3-fold irregular branched covering spaces of pretzel knots*, Osaka J. Math., **23** (1986), 249–254.

[10] J. M. Montesinos, *A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of S^3*, Bull. Amer. Math. Soc., **80** (1974), 845–846.

[11] K. Murasugi, *On dihedral coverings of S^3*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **2** (1980), 99–102.