数理解析研究所講究録
813巻 1992年 63-70

PRIMENESS OF TWISTED KNOTS

日本大学　文理学部
茂手木　公彦　(Kimihiko Motegi)

V を 3-sphere S^3 内に標準的に埋め込まれた solid torus とし. $f_n : V \longrightarrow V$ を V 上の自己同相写像で

$$[\text{meridian}] \longrightarrow [\text{meridian}]$$
$$[\text{longitude}] \longrightarrow [\text{longitude}] + n[\text{meridian}]$$

となるものとする。

この f_n を用いて S^3 の<u>自明な knot K</u>$(\subset V)$ を次のように変形することを考える。

$$\begin{array}{ccc} S^3 \supset V & \xrightarrow{\quad f_n \quad} & V \subset S^3 \\ \cup & & \cup \\ K & & f_n(K) \end{array}$$

こうして新しく得られた knot $f_n(K)$ を K_n と表わし, twisted knot と呼ぶ。

ここでは twisted knot の素性(primeness) について考えてみよう。

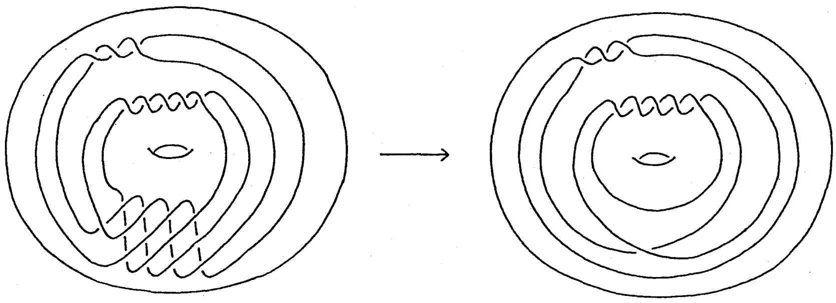
$\mathrm{wrap}_V(K)$ で K の V における wrapping 数(＝ K と V の meridian disk の幾何的交点数の最小数)を表わす。

$\mathrm{wrap}_V(K)=2$ のときは "unknotting 数が 1 の knot は prime" (Scharlemann [S])の一般化として次が示されている。

<u>定理 1</u> (Scharlemann-Thompson [S-T], Gordon, Zhang [Z])
$\mathrm{wrap}_V(K)=2$ のとき. twisted knot K_n は prime.

では. $\mathrm{wrap}_V(K)\geq 3$ のときも同様な事が成り立つのだろうか？　実は $\mathrm{wrap}_V(K)\geq 3$ で成り立たない。

例 (M-Shibuya [M-S])



K　　　　　K_1

この例では. K は trivial knot であり. K_1 は torus knot $T(2,3)$ と torus knot $T(2,5)$ の connected sum $T(2,3)\#T(2,5)$ になっている。上の例は $\mathrm{wrap}_V(K)=4$ であるが. 大山氏(早大)

は. $wrap_V(K)=3$ で. $K_1 \cong T(2,3) \# (8$の字knot$)$ となる例を構成している。　また. 安原氏(早大), 寺垣内氏(神戸大) により様々な例が構成されている。　それらの例については. 本講究録の寺垣内氏の講義録に詳しい解説がある. ([T])

しかし. 次の定理は twisted knot は composite knot にはなりにくい事を物語っている。

定理 2

$|n| > 5 \Rightarrow K_n$ は prime

更に. $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は高々 5 ヶ の composite knot しか含み得ない。

1. Kの自明性と $V - \mathrm{int}\, N(K)$

以下 $wrap_V(K) \geq 2$ (i.e. K は V 内の 3-ball に含まれず core にもなっていない) と仮定する.

K が S^3 内では trivial knot になっているということから K の V への入り方にどのような条件がつくのだろうか?

$V - \mathrm{int}\, N(K)$ の Jaco-Shalen [J-S], Johannson [Jo] による torus 分解を考える.

∂V を含む piece を P_0, $\partial N(K)$ を含む piece を P_1 と表わす. ($P_0 = P_1$ のときもある.)

P_i $(i=0,1)$ は, Seifert fibred 多様体 であるか, hyperbolic 多様体 であり([M-B]), 更に, Seifert fibred のときは, cable space か composing space になる([J-S]).

K の S^3 での自明性から次がわかる.

補題 1.1

(1) P_0 は composing space ではない.

(2) P_1 は composing space ではない.

2. Twisting, Dehn filling と torus 分解

V の meridian-longitude を (μ, λ) で表わす. このとき, ∂V 上の simple loop γ は $p\lambda + q\mu$ $((p,q)=1)$ と表わされる.

twisted knot K_n の exterior $S^3 - \mathrm{int}\,N(K)$ は, $V - \mathrm{int}\,N(K)$ を ∂V 上の loop $\lambda + (-n)\mu$ に沿って Dehn filling することによって得られる.

i.e. $S^3 - \mathrm{int}\,N(K) \cong (V - \mathrm{int}\,N(K)) \cup_{\lambda + (-n)\mu = \{*\}\times D^2} S^1 \times D^2$

また、S^3内の knot k が prime かどうかを判定する際に次が有効.

補題 2.1. （[G1][J-S]）

$S^3 \supset k$ が composite knot

$\Leftrightarrow$ $S^3 - \mathrm{int}N(k)$ を torus 分解した際に $\partial N(k)$ を含む piece が composing space

この補題により、$S^3 - \mathrm{int}\,N(K_n)$ を torus 分解した際、$\partial N(K_n)$ を含む piece が composing space でないことを示せば K_n が prime となる.

$S^3 - \mathrm{int}\,N(K_n)$ の torus 分解は P_0 の ∂V に沿った Dehn filling によって決まる. $P_0(p/q)$ で P_0 を ∂V 上の loop $p\lambda + q\mu$ に沿って Dehn filling して得られた多様体を表わす.

補題 1.1. により P_0 は cable space か hyperbolic 多様体なので、それぞれの場合について調べる.

命題 2.3.

P_0 を cable space とする.

このとき、$n \neq 1$ (or $n \neq -1$) なる任意の n に対して

K_n は prime knot.

この証明は，P_0 の Seifert fibration の filling solid torus への拡張を調べることによってなされる．

補題 2.4.

P_0 を hyperbolic 多様体とする．

このとき，$P_0(\frac{1}{0})$ は hyperbolic ではない。

補題 2.5.

P_0 が hyperbolic であり，$P_0(-\frac{1}{m})$ 及び $P_0(-\frac{1}{n})$ はともに hyperbolic ではないとする．

このとき，$|m-n| \leq 5$.

この補題は Gordon による強力な定理([G2] [G3]) の帰結である．

以上の補題により次を得る．

命題 2.6.

P_0 が hyperbolic のとき，$|n| > 5$ なる任意の n に対し K_n は prime knot.

更に．$\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は高々5ケの composite knot しか含み得ない．

命題2.3及び命題2.6.より定理2が得られる．

Mathieu により全ての knot は twisted knot か？[M] という問題が提出されていたが．最近になって宮崎氏，安原氏によって否定的に解決された。([Mi]，[Y])．

最後に twisted knot に関しての予想をあげておく．

予想

(1) twisted knot K_n が composite になるのは $n=1$ か $n=-1$ の一方のみ．

(2) twisted knot K_n の prime factors は高々2つ．

(1)に関しては．Mathieu の結果[M]と定理2を合わせると次の事まではわかる．

$\mathrm{wind}_V(K)$ で K の V における winding 数（$= K$ と V の meridian disk の代数的交点数）を表わす．

系 3

$wind_V(K)$ が 2, 3, 5 を因数にもたないとする.
このとき $n \neq \pm 1$ なる任意の n に対して. K_n は
prime knot.

REFERENCES

[G1] Gordon, C.McA., *Dehn surgery and satellite knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **275** (1983), 687–708.

[G2] ———, *When are tori created by Dehn surgery ?*, Conference Report for the International Conference on Knot Theory and Related Topics (1990), 18–19.

[G3] ———, *Boundary slopes of punctured tori in 3-manifolds*, (to appear.).

[J-S] Jaco, W. and Shalen, P., *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. 220, 1979.

[Jo] Johannson, K., *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Math., Vol. 761. Springer-Verlag, 1979.

[M] Mathieu, Y., *Sur des noeuds qui ne sont pas déterminés par leur complément et problémes de cirurgie dans les variétés de dimension 3*, These, L'Université de Provence (1990).

[Mi] Miyazaki, K., Conference Report for "Knot theory and its applications " (in Japanese), 1991.

[M-B] Morgan, J. and Bass, H., *The Smith conjecture*, Pure and Applied Math. Academic Press, 1984.

[M-S] Motegi, K. and Shibuya, T., *Are knots obtained from a plain pattern always prime ?*, Kobe J. Math. (to appear).

[T] Teragaito, M., *Composite knots trivialized by twists*, preprint.

[S] Scharlemann, M., *Unknotting number one knots are prime*, Invent. Math. **82** (1985), 37–55.

[S-T] Scharlemann, M. and Thompson, A., *Unknotting number, genus, and companion tori*, Math. Ann. **280** (1988), 191–205.

[Y] Yasuhara, A., *On slice knots in the complex projective plane*, Revista Math. (to appear).

[Z] Zhang, X., *Unknotting number one knots are prime : a new proof*, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (1991), 611–612.