数理解析研究所講究録
813巻 1992年 17-28

タングルのひもの平行性と擬平行性

(注→p12)

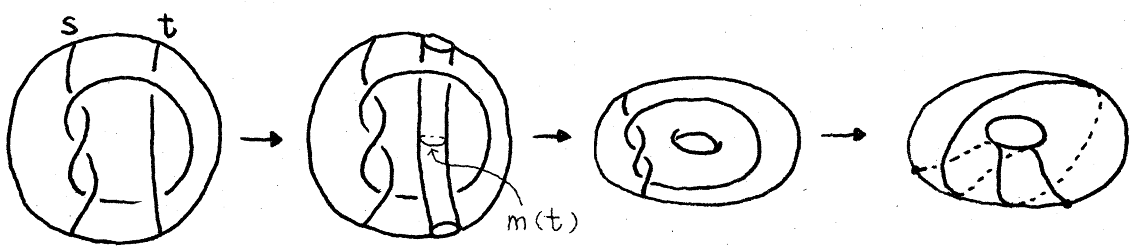
東京大学数理科学研究科　林忠一郎 (Chuichiro Hayashi)

§0. Introduction

多様体は全てコンパクトかつ向き付け可能とする。

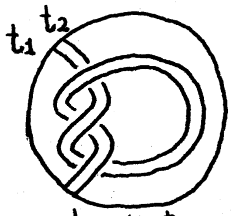
定義 (M,T) が **n-もつれ** であるとは、Mが連結3-manifoldで、TがM内のn本のdisjoint proper arcsであること。∂Mは連結でなくてもよい。特にMがballのとき、(M,T)を**n-タングル**とよぶ。

ひもたち $T'=\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T$ がn-もつれ(M,T)で **primitive** とは、$E(M,T)=cl(M-N(T))$ が disjoint proper discs $D_1,\cdots,D_k$ で $\partial D_i\cap m(t)=1$ point (if $t=t_i$) かつ ϕ (if $t\neq t_i$) なるものを含むこと。ここに $m(\cdot)$ はメリディアンループのことである。T'は∂Mに「へばりついている」という感覚。



ひも $s\in T$ がひも $t\in T$ に **ギ-parallel** とは、ひも s が、もつれ $(E(M,\{t\}), T-\{t\})$ においてprimitiveなこと。**$s\to t$** と書く。前頁の図を見て欲しい。

ひもたち $t_1, t_2 \in T$ が **parallel** とは、$E(M,T)$ がproper disc D で、$\partial D\cap m(t_1)=1$ pt , $\partial D\cap m(t_2)=1$ pt かつ、他のひものメリディアンループと ∂D が交わらないものを含むこと。



$t_1 /\!/ t_2$

$t_1 /\!/ t_2$ と書く。$t_1 /\!/ t_2 \Rightarrow t_1 \leftrightarrow t_2$ となることに注意せよ。ここに **$t_1\leftrightarrow t_2$** は、t_1 と t_2 が互いにギ-parallelなことを表わす。

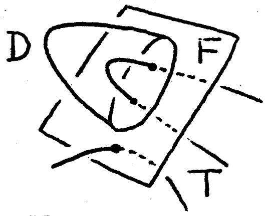
〔問〕 $t_1\leftrightarrow t_2 \Rightarrow t_1 /\!/ t_2$ は成り立つか?

上の問は、ある条件下で成り立つことが示せた。例えば2-タングルでは成立する。それについては§2を見て欲しい。ところが、上の問は一般には成立しないこともわかった。それを§1で見てゆく。

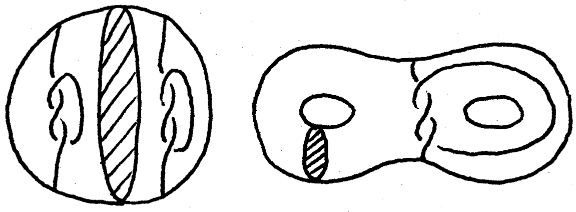
§1. 反例

3-タングルにおける§0の問の反例を与える。

定義 (M,T) を n-もつれとする。F を ∂M のsubsurfaceか又は M 内にproperに埋めこまれたsurfaceとする。F が **T-incompressible** とは、$F ⋔ (\cup T)$ かつ、D を M 内に埋めこまれたdiscで、$D\cap(\cup T)=\phi$ かつ $D\cap F=\partial D$ とすると、∂D は F 上で $\cup T$ と交わらないdiscをはること。$\cup T$ は T の和集合。



FはT-compressible



splittable

n－もつれ(M,T)が**splittable**とは∂MがT-compressibleなこと。

補題1.1 (B,T), $T=\{t_1,t_2\}$は2－タングル. $i=1,2$について. $E(B,\{t_1\})$はS^3内のgenus$=g_1$の結び目K_1の外部に同相で、$E(B,T)$がproperに埋めこまれたsurface Fで、genus$F$ $=(H_1(F)$上のintersection formのrank$)/2<g_1$, $\partial F\cap m(t_1)=1$ ptなるものを含むとする。

このとき、タングル(B,T)はnon-splittableである。

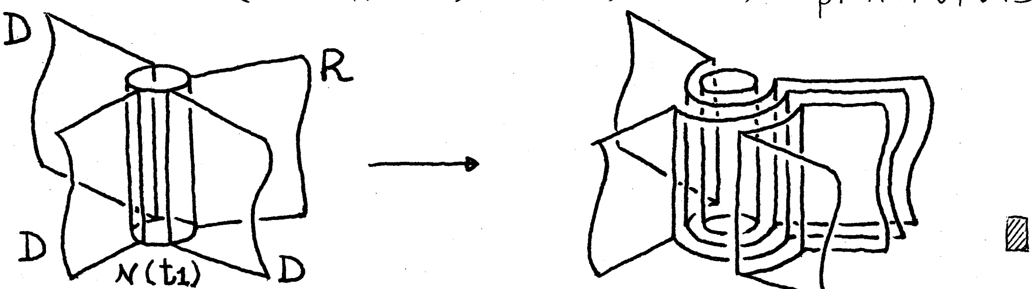
<pf> Dをタングル(B,T)をsplitするdiscとして、矛盾を導く。DはBを2つのball B_1とB_2に分ける。$B_1\supset t_1$とする。$F\cap E(B_1,\{t_1\})$のcomponent Hで、$\partial H\cap m(t_1)=1$ ptなるものをとる。Hをもとに結び目K_1のgenus$<g_1$のSeifert surfaceを構成できる。これは矛盾。 ▨

次の補題は∂-parallelityは推移律を満たすことを含む。

補題1.2 (M,T)をn－もつれとする。ひもたち$T_1,T_2\subset T$, $T_1\cap T_2=\phi$とひも$t\in T$について、tはもつれ$(E(M,T_1\cup T_2)$, $T-T_1\cup T_2)$においてprimitive, T_1はもつれ$(E(M,T_2)$, $T-T_2)$においてprimitiveとする。このときtはもつれ

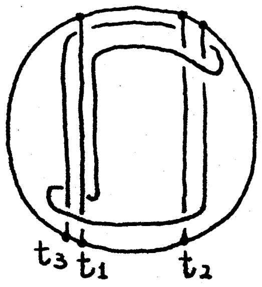
$(E(M, T_2), T - T_2)$ においてprimitiveである。

<pf> t の $(E(M, T_1 \cup T_2), T - T_1 \cup T_2)$ におけるprimitivismを D とし、T_1 の $(E(M, T_2), T - T_2)$ におけるprimitivismを R とする。D は R に交わらないようにとり直すことができる。∂D と T_1 のひもたちのメリディアンループたちの交点付近において、D に R のdiscsたちのコピーを次々につぎ足していくことにより、t の $(E(M, T_2), T - T_2)$ におけるprimitivismを得る。



▨

例1 左下図の3-タングルは、$t_1 \leftrightarrow t_2$ だが、$t_1 /\!/ t_2$ でない。



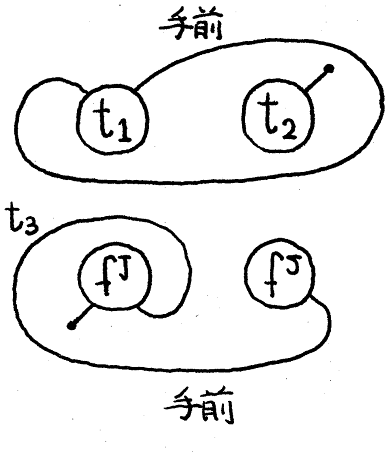
(B, T)

$t_1 \leftrightarrow t_2$ を見るために、次の観察をする。

t_3 は $\partial E(B, \{t_1, t_2\})$ にへばりついている。

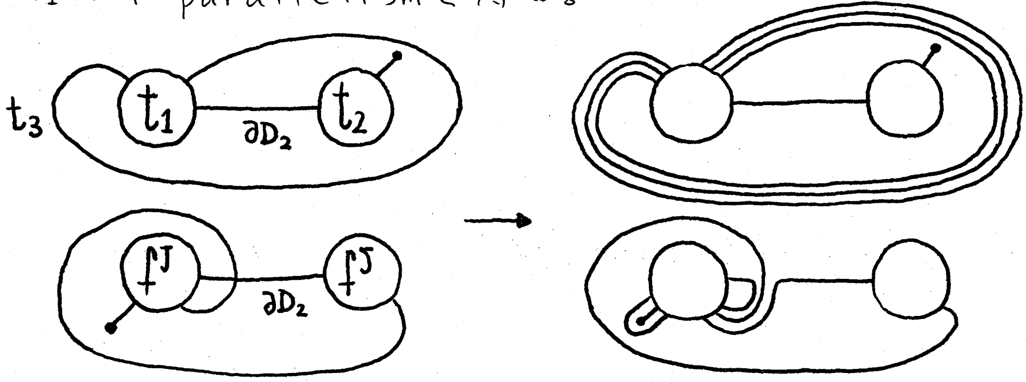
実際 $\exists D_1 \subset E(B, T)$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \partial D_1 \cap (m(t_1) \cup m(t_2)) = 3 \text{ pts} \\ \partial D_1 \cap m(t_3) = 1 \text{ pt} \end{cases}$$



そこで t_3 を $\partial E(B, \{t_1, t_2\})$ 上の模様と思うことにする。その絵を画くために、$m(t_1)$ と $m(t_2)$ に沿って $\partial E(B, \{t_1, t_2\})$ を切る。模様としての t_3 の絵も切断される。左図がそれ。

さて、$t_2 \to t_1$のギ-parallelismを作る。まずt_3を無視したときのt_1とt_2の間のparallelism D_2を考える。∂D_2は左下図のようになる。さらに∂D_2をt_3に沿ってisotopyで動かしてt_3と交わらないようにできる。このisotopyをt_3に沿ったある方向に行うと$\partial D_2 \cap m(t_2) = 1$ pt が保たれる。右下図のようになる。この∂D_2のisotopyはD_2全体に拡張できるから、$t_2 \to t_1$のギ-parallelismを得る。

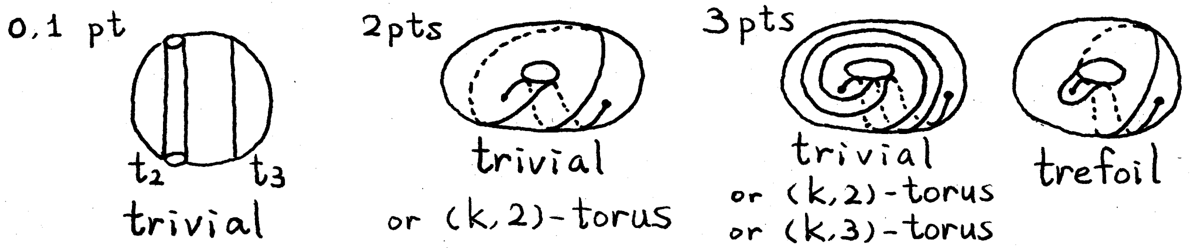


途中、∂D_2のisotopyをt_3に沿って逆方向に行うと、$t_1 \to t_2$のギ-parallelismを得る。

次に$t_1 /\!/ t_2$でないことを示す。まず(B,T)がnon-splittableなことを見る。それには$(B, \{t_1, t_3\})$と$(B, \{t_2, t_3\})$がnon-splittableなことを見てゆけばよいが、両方とも同様に示せるので、$(B, \{t_2, t_3\})$の方を考える。t_3は$\partial E(B, \{t_1, t_2\})$にへばりついていて、$t_1 \to t_2$なので、Lemma 1.2によって$t_3 \to t_2$である。そこでLemma 1.1を用いると、$(B, \{t_2, t_3\})$がnon-splittableであることがわかる。

ここで$t_1 /\!/ t_2$であると仮定して、$E(B, \{t_3\})$がtrivial結

び目の外部か、torus 結び目の外部に同相になることを見る。しかしこれは $E(B,\{t_3\})$ が実際には8の字結び目の外部となっていることに矛盾する。t_1 と t_2 の parallelism を P とし、t_3 の $(E(B,\{t_1,t_2\}),\{t_3\})$ における primitivism D_1 で $\partial D_1 \cap (m(t_1) \cup m(t_2)) = 3$ pts なるものをとっておいたことを思い出す。この交点数3を増やさずに D_1 を P と交わらないものにとり直す。つまり、D_1 と P の交わりを弧たちのみに isotop しておいて、α を $D_1 \cap P$ のうち P 上 outermost な arc とし、それの切りとる outermost disc を P_1 とする。α として、$\partial P_1 \cap m(t_1) = \phi$ なものがとれる。α は D_1 を2つの disc に分解するが、$m(t_3)$ と交わらない方を Q とする。D_1 において Q を P_1 におきかえて $D_1 \cap P$ の交わりを減らせる。ここで気を付けたいのは、$\partial P_1 \cap m(t_2) = 1$ pt のときには、$\partial Q \cap (m(t_2) \cup m(t_1)) \neq \phi$ なることである。もしも ϕ とすると、$P_1 \cup Q$ により t_2 は primitive であることになり、(B,T) が non-splittable であることに反するからである。このようにして $D_1 \cap P = \phi$ になったら、交点 $\partial D_1 \cap m(t_1)$ ごとに P をつぎ足すことにより、$t_3 \to t_2$ のギ-parallelism で $m(t_2)$ との交点が3以下のものがとれる。



しかし、そのようなt_3の外部はtrivial knotかtorus knotのものに同相になってしまう。前頁の図を見て欲しい。 ▨

例2　左図の3-タングルにおいても$t_1 \leftrightarrow t_2$だが、$t_1 /\!/ t_2$ではない。証明は例1と全く同様にできる。

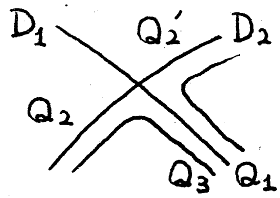
§2. parallelityの証明

定理2.1 (M, T)をn-もつれとする。$t_1, t_2 \in T$について、もつれ$(E(M, \{t_1\}), T-\{t_1, t_2\})$がnon-splittableのとき、$t_1 \leftrightarrow t_2$ならば、$t_1 /\!/ t_2$である。

<pf> $t_1 \to t_2$、$t_2 \to t_1$のギ-parallelismをそれぞれD_1, D_2とする。特にD_1は$\partial D_1 \cap m(t_2)$が最小のものをとっておく。以下この交点数を評価するのが目標である。

∂D_1, ∂D_2を変えない切り貼りによって、$D_1 \cap D_2$をarcsのみにすることができる。

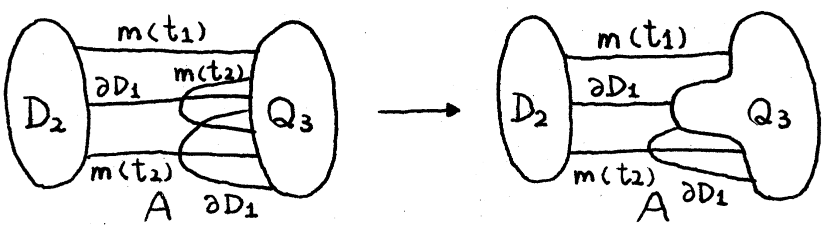
αを$D_1 \cap D_2$のD_1上outermostなarcのひとつとする。Q_1をαの切りとるoutermost discとし、αはD_2をQ_2とQ_2'の2つのdiscsに分けるとする。$Q_1 \cup Q_2$か$Q_1 \cup Q_2'$の少なくともいずれか一方が$E(B, \{t_1, t_2\})$内のnon-separatingなdiscになっている。例えば$Q_3 = Q_1 \cup Q_2$の方がnon-separatingだとする。Q_3を少しisotopyで動かして、D_2とdisjointにしておく。



$\#(\partial Q_3 \cap \partial D_1) < \#(\partial D_2 \cap \partial D_1)$ …… ☆となっていることに注意せよ。以下Q_3を☆の条件を保ったまま$\partial Q_3 \cap m(t_2) = 1$ pt となるように変形する。

まずQ_3とD_2の位置関係を調べる。Q_3に交点$\partial Q_3 \cap m(t_2)$ごとにD_2のコピーをつぎ足してdisc Q_4を得る。$Q_4 \cap D_2 = \phi$となるようにしておく。Q_4がもつれ$(E(M,\{t_1\}), T-\{t_1,t_2\}))$のsplitting discになってはいけないので、∂Q_4は$\partial E(M,\{t_1\})$からdisc Q_5を切りとり、$Q_5 \cap \partial(U(T-\{t_2\})) \subset \partial t_1$である。さらに$D_2$の存在により、$Q_5 \cap \partial(U(T-\{t_2\})) = \partial t_1$ or ϕである。したがって、∂Q_3と∂D_2は$\partial E(M,\{t_1,t_2\})$上平行であり、それらのはさむアニュラス$A$について$A \cap \partial(U(T-\{t_1,t_2\})) = \phi$となっていることがわかる。

arcs $A \cap m(t_2)$のうち、両端を∂Q_3に持つものがあるとし、そのうちA上outermostなもののひとつをβとする。βと$A \cap \partial D_1$の各arcとの交わりを考えるのだが、交わっても「高々1点」ずつである。そうでないと$\partial D_1 \cap m(t_2)$の最小性に反する。



したがってQ_3をisotopyで動かすことにより、交点$\partial Q_3 \cap m(t_2)$を減らすことができる。上図を見て欲しい。このよう

なことを繰り返して、$m(t_2) \cap A$ を ∂D_2 と ∂Q_3 をつなぐただ1本にすることができる。こうして※を保ったまま $\partial Q_3 \cap m(t_2) = 1$ pt を得る。

これを繰り返して、$t_2 \to t_1$ の ∂-parallelism として、D_1 と交わらないもの R をとれる。R と D_1 について D_2 と Q_3 に対してしたのと同様の議論をすることにより、$\partial D_1 \cap m(t_2) = 1$ pt を得る。これは D_1 が t_1 と t_2 の間の parallelism になっていることを意味する。 ▨

<u>系 2.2</u> (M,T), $T=\{t_1, t_2\}$ を 2 - もつれ、M は handlebody とする。このとき、$t_1 \leftrightarrow t_2$ ならば、$t_1 /\!/ t_2$ である。

<pf> ∂M の T-compression discs を disjoint かつ non-parallel に入るだけ入れる。$t_1 \to t_2$ や $t_2 \to t_1$ の ∂-parallelism D_1, D_2 は、上記の discs Q と disjoint にとれる。M を Q で切る。t_1 と t_2 が別々の component に入っているとき、補題 1.1 の証明と同様にして、T が (M,T) において primitive なことがわかり、$t_1 /\!/ t_2$ である。以下、t_1 と t_2 が同じ component N に入っているときを考える。N 内で $t_1 /\!/ t_2$ を示せばよい。

N が genus $\geqq 1$ の handlebody の場合を考える。このとき、$\partial E(N, \{t_2\})$ が incompressible であることを示す。そうすれば定理 2.1 により $t_1 /\!/ t_2$ となる。

(N,T) は non-splittable である。つまり、$cl(\partial E(N,T) -$

$\mathcal{N}(m(t_1) \cup m(t_2))$ は $E(N,T)$ 内でincompressibleである。さらに $t_2 \to t_1$ であるから、$cl(\partial E(N,T) - \mathcal{N}(m(t_2)))$ はcompressibleである。よって、Handle Addition Theoremによって、$(N, \{t_2\})$ はnon-splittableである。

Handle Addition Theorem [Jaco] [Wu]

Mを3次元多様体、∂M はM内でcompressibleとする。Jを ∂M 上のループとし、$cl(\partial M - \mathcal{N}(J))$ がincompressibleであるとする。このとき、MにJに沿って2-handleを接着した多様体はincompressibleな境界をもつ。
尚、これは ∂M の代りに ∂M のsubsurfaceを考えても成り立つ。

$cl(\partial E(N,\{t_2\}) - m(t_2))$ は $E(N,\{t_2\})$ 内でincompressibleであるので、$\partial E(N,\{t_2\})$ がcompressibleであると仮定すると、Handle Addition Theoremによって ∂N がincompressibleとなり、矛盾する。したがって $\partial E(N,\{t_2\})$ が $E(N,\{t_2\})$ 内でincompressibleであることが示された。これで定理2.1を使うことができる。

次にNがballの場合を考える。$\partial E(N,\{t_2\})$ がincompressibleであるときには、定理2.1により $t_1 /\!/ t_2$ なので、compressibleな場合を考える。このときタングル $(N,\{t_2\})$ はtrivial

であり、$E(N,\{t_2\})$はソリッドトーラスである。$t_1 \to t_2$だから$E(N,\{t_1,t_2\})$はgenus$=2$のhandlebodyであり、さらに$t_2 \to t_1$だから$E(N,\{t_1\})$はソリッドトーラスである。ゆえにGordonの定理によって、(N,T)においてTはprimitiveとなり、$t_1 /\!/ t_2$であることが示された。

定理［Gordon］

(M,T)をn-もつれ、Mをhandlebodyとする。

${}^\forall T' \subset T$に対して、$E(M,T')$がhandlebodyならば

(M,T)において、Tはprimitiveである。 ▨

私は次の問題を何か月か考えているが、未だに解けないでいる。

問題 (M,T)をn-もつれとする。${}^\exists T' \subset T$に対して、もつれ$(E(M,T'), T-T')$はnon-splittableとする。このとき、全てのpair $s,t \in T'$に対して$s \leftrightarrow t$であれば、全てのpair $x,y \in T'$について、$x /\!/ y$であるか？

参考文献

[CGLS]: Culler, M.; Gordon, C.; Luecke, J.; Shalen, P. (1987) Dehn surgery on knots. Ann. of Math. 125: 237-300; Correction, ibid., 127 (1988): 663

[Gordon]: Gordon, C. (1987) On primitive sets of locps in the boundary of a handlebody. Topology and its Appl. 27: 285-299

[Jaco]: Jaco, W. (1984) Adding a 2-handle to 3-manifold: an application to Property R. Proc. Amer. Math. Soc. 92: 288-292

[Wu]: Wu, Ying-Qing (?) A generalization of the Handle Addition Theorem. accepted in Proc. Amer. Math. Soc.

(注) 京都大学で発表した「超単純結び目のタングル分解について」の内容は既に[CGLS]においてなされていることがわかりました。「タングルのひもの平行性と擬平行性」は'92.7月に行なわれた第39回トポロジーシンポジウムで発表したものです。尚、「超単純結び目の……」の要約は、トポロジーシンポジウムの予稿集に掲載されていることを、一応お知らせします。