数理解析研究所講究録
813巻 1992年 10-16

Kauffman polynomialのある特殊化について

大阪市立大・理・宮澤康行 (Yasuyuki Miyazawa)

Kauffmanによって導入された, oriented linkに対する2変数の多項式不変量 Kauffman polynomialの特殊化について考える。

Kauffman polynomialの特殊化として, unoriented linkの不変量であるQ-polynomialや, skein polynomialの特殊化としても得られるJones polynomialなどがよく知られているが, ここでは, ある意味でknotの対称性とKauffman polynomialの関係について調べることを目標とした1つの特殊化について考える。

まず最初にKauffman polynomialの定義を述べる。

Λを次の4つの性質によって決まるunoriented link diagramから $\mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ へのfunctionとする

(i) $\Lambda(\bigcirc) = 1$.

(ii) Λ は regular isotopy invariant

（すなわち，Reidemeister move II, III で不変）

(iii) $\Lambda(\boxed{D}\circlearrowright) = a\Lambda(D)$，$\Lambda(\boxed{D}\circlearrowright) = a^{-1}\Lambda(D)$

(iv) $\Lambda(D_+) + \Lambda(D_-) = z(\Lambda(D_0) + \Lambda(D_\infty))$，

ここで，D_+，D_-，D_0，D_∞ は次の図の様に１ヶ所を除いては同じ link diagram を表わす。

D_+　　D_-　　D_0　　D_∞

Oriented link L と L を表わす diagram D に対して $F_L(a, z) = a^{-w(D)}\Lambda(D)$ とおく。ここで，$w(D)$ は D の writhe である。このとき $F_L(a, z)$ は，oriented link の不変量となり，これを Kauffman polynomial と定義する。

ここで考える特殊化は２つの変数 a と z のうち z に１を代入したものである。すなわち $F_L(a, 1)$ という a に関する polynomial である。

<u>Theorem.</u>　K を amphicheiral knot で，determinant が３の倍数でない（i.e $\Delta_K(-1) \not\equiv 0 \pmod 3$）とする。このとき

(1) $\deg_a F_K(a,z) \leqq 6 \Rightarrow F_K(a,1) = 1$,

(2) $\deg_a F_K(a,z) = 8$

$\Rightarrow {}^{\exists}p \in \mathbb{Z}\ ;\ F_K(a,1) = 1 + p(a^4 + a^3 - a - 2 - a^{-1} + a^{-3} + a^{-4})$,

ここで $\deg_a F_K(a,z)$ は $F_K(a,z)$ の a の最高次数から a の最低次数を引いた値である。

証明の前にいくつかの Lemma を用意する。

<u>Lemma 1</u>. L を link, $M_2(L)$ を L を branch set とする S^3 の double branched cover とする。このとき,

$$\operatorname{rank} H_1(M_2(L) ; \mathbb{Z}_3) \neq 0 \Rightarrow F_L(a,1) \neq 1.$$

proof. $F_L(a,1) = 1$

$\Rightarrow F_L(-1,1) = 1 \Rightarrow F_L(1,-1) = 1$

$\Rightarrow (-3)^{\operatorname{rank} H_1(M_2(L) : \mathbb{Z}_3)} = 1$

$\Rightarrow \operatorname{rank} H_1(M_2(L) : \mathbb{Z}_3) = 0$ □

Lemma 1 において, L = knot のとき,

$\operatorname{rank} H_1(M_2(L) : \mathbb{Z}_3) = 0$

$\Leftrightarrow \Delta_L(-1) \not\equiv 0 \pmod 3$

であるので,

<u>Lemma 1'.</u> K を knot とするとき

$$\Delta_K(-1) \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow F_K(a,1) \neq 1.$$

が成り立つ。このことから, K が amphicheiral knot で $F_K(a,z)$ の degree が 6 以下であっても $F_K(a,1)=1$ になることはないことがわかる。

<u>Lemma 2.</u> K を knot. $F_K(a,z)$ を K の kauffman polynomial とする。

$$G_K(a) \overset{\text{def}}{=} F_K(a,1)-1$$

とおくと,

$$G_K(a) = (a^3-1)(a^2+1)\,g_K(a), \quad g_K(a) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}]$$

が成り立つ。

proof. K が knot ならば, $F_K(a,-(a+a^{-1}))=1$ であるので, ω を 1 の原始 3 乗根として, a に 1, ω, ω^2 を代入すれば. $F_K(a,1)-1=(a^3-1)f_1(a)$, $f_1(a)\in\mathbb{Z}[a^{\pm 1}]$ を得る. また, K が knot ならば, $F_K(\sqrt{-1},z)=1$ であるので, $F_K(-\sqrt{-1},z)=1$ も成り立ち. 従って

$F_K(a,1)-1=(a^2+1)f_2(a)$, $f_2(a)\in\mathbb{Z}[a^{\pm 1}]$, が成り立つ。 a^3-1 と a^2+1 は共通因数をもたないので.

$$G_K(a) = F_K(a,1)-1 = (a^3-1)(a^2+1)\,g_K(a), \quad g_K(a)\in\mathbb{Z}[a^{\pm 1}]$$

が成り立つ。 □

<u>Lemma 3.</u> K を amphicheiral knot とし, $g_K(a)$ を Lemma 2 で得られた polynomial

(i.e $g_K(a) = \dfrac{F_K(a, 1) - 1}{(a^3-1)(a^2+1)}$) とする。このとき

$$g_K(a) = \sum_{\substack{i>j \\ i+j=-5}} p_i (a^i - a^j)$$ が成り立つ。さらに,

$$\Delta_K(-1) \not\equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow \sum p_i (-1)^i = 0.$$

proof. K が amphicheiral knot なので,

$F_K(a, z) = F_K(a^{-1}, z)$。ゆえに $F_K(a, 1) = F_K(a^{-1}, 1)$。

従って $G_K(a) = G_K(a^{-1})$ が成り立つ。ここで, Lemma 2より

$G_K(a) = (a^3-1)(a^2+1)\, g_K(a)$,

$G_K(a^{-1}) = -a^{-5}(a^3-1)(a^2+1)\, g_K(a^{-1})$ なので.

$g_K(a) = -a^{-5} g_K(a^{-1})$。

$g_K(a) = \sum_{l=1}^{m} p_{k_l} a^{k_l}$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_{m-1} < k_m$, とおくと

$$\begin{cases} k_l + k_{m+1-l} = -5 \\ p_{k_l} + p_{k_{m+1-l}} = 0 \end{cases}$$

を得る。従って

$$g_K(a) = \sum_{\substack{i>j \\ i+j=-5}} P_i(a^i - a^j)$$ となる。

さて，$G_K(-1) = -4g_K(-1)$。一方，$G_K(a)$の定義から

$$G_K(-1) = F_K(-1,1) - 1 = F_K(1,-1) - 1$$
$$= (-3)^{\operatorname{rank} H_1(M_2(K):\mathbb{Z}_3)} - 1$$

ゆえに，$g_K(-1) = -\frac{1}{4}\left((-3)^{\operatorname{rank} H_1(M_2(K):\mathbb{Z}_3)} - 1\right)$

$\Delta_K(-1) \not\equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow \operatorname{rank} H_1(M_2(K):\mathbb{Z}_3) = 0$ より

$\Delta_K(-1) \not\equiv 0 \pmod 3$ ならば $g_K(-1) = 0$。ところで

$$g_K(-1) = \sum_{\substack{i>j \\ i+j=-5}} P_i((-1)^i - (-1)^j) = 2\sum P_i(-1)^i$$ だから，

$$\sum P_i(-1)^i = \frac{1}{2}g_K(-1) = 0. \quad \square$$

Proof of Theorem. (1) 対偶を示す。

$F_K(a,1) \neq 1 \Rightarrow G_K(a) \neq 0 \Rightarrow g_K(a) \neq 0$.

Lemma 3 より $\deg_a g_K(a) \geq 1$.

$\deg_a g_K(a) = 1$ とすると，Lemma 3 より $\exists p \neq 0$:

$g_K(a) = p(a^{-2} - a^{-3})$。$\Delta_K(-1) \not\equiv 0 \pmod 3$ だから

Lemma 3 の後半部分の結果より $p = 0$. これは矛盾。よって $\deg_a g_K(a) \geq 2$。

$\deg_a g_K(a) \geq 2 \Rightarrow \deg_a G_K(a) \geq 7$

$\Rightarrow \deg_a H_K(a,1) \geq 8 \quad \because)\ H_K(a,1) = H_K(a^{-1},1)$

$\Rightarrow \deg_a H_K(a,z) \geq 8$

以上より $\deg_a H_K(a,z) \leq 6 \Rightarrow H_K(a,1) = 1$

(2) $\deg_a H_K(a,z) = 8$ であるから，$\deg_a H_K(a,1) \leq 8$。

Lemma 3 によって，$^{\exists} p, q \in \mathbb{Z}$；

$$g_K(a) = p(a^{-2} - a^{-3}) + q(a^{-1} - a^{-4})$$

が成り立つ。また $\Delta_K(-1) \not\equiv 0 \pmod 3$ より Lemma 3 から $p - q = 0 \quad \therefore p = q$ を得る。ゆえに，

$g_K(a) = p(a^{-1} + a^{-2} - a^{-3} - a^{-4})$。従って．

$$\begin{aligned} H_K(a,1) &= 1 + (a^3-1)(a^2+1) \times p(a^{-1}+a^{-2}-a^{-3}-a^{-4}) \\ &= 1 + p(a^4+a^3-a-2-a^{-1}+a^{-3}+a^{-4}) \end{aligned}$$ □

$H_K(a,z)$ の a に関する degree が 10 以上の場合も，Lemma 3 によって，その形が決定されるが，煩雑になるのでここでは述べないことにする。