数理解析研究所講究録
814巻 1992年 54-63

# endomorphismsの$\delta$-無限小安定性と$\Omega$-安定性について

早大 教育　池田 宏　(Hiroshi Ikeda)

## §1 序章

力学系理論において構造安定性は重要な概念である。そして、無限小安定性はこの構造安定性と密接な関係がある。例えば、微分同相写像の理論においては、次のような結果が知られている。

定理A [Mañé, Robinson]. $f$をclosedで滑らかな多様体$M$の$C^1$微分同相写像とする。このとき次の性質は同値である:

(a) $f$は$C^1$構造安定である;

(b) $f$は公理Aと強横断性条件を満足する;

(c) $f$は無限小安定である。

最初、無限小安定性は構造安定性を証明するための媒介であった。すなわち、(b)⇒(c)⇒(a)。Mañéがこの概念を一般化して(b)と(c)が同値であることを示した。さらにMañé の

結果から、$C^1$微分同相写像については無限小安定性と構造安定性が同値であることが知られている。それで、我々はendomorphismの場合を考えてみる。定理AとAnosov endomorphismについての結果[2]を比較してみると、無限小安定なendomorphismの集合の内部にあるということが微分同相写像の無限小安定性の一般化としてふさわしいように思える。便宜上、endomorphism $f$が無限小安定なendomorphismsの集合の内部に属することを、$f$は$S$-無限小安定であると呼ぶことにする。endomorphismの場合には、この$S$-無限小安定性が構造安定性と同値ではないかと予想される。この予想の解決の第一歩として次のような結果が導かれる。

定理I. $f$をclosedで滑らかな多様体の$C^r$ endomorphism, $r \geq 1$とする。もし$f$が$S$-無限小安定ならば、$f$は$\Omega$-安定である。

系. $f$をclosedで滑らかな多様体の$C^r$ endomorphism, $r \geq 1$とする。もし$f$が'含まれるすべての$g$が弱公理Aを満足するような近傍$\mathcal{U}$'を持てば、$f$は$\Omega$-安定である。

上の系は$\Omega$-安定性の十分条件を与えている。

Przytycki [7] は endomorphism $f$ が $\Omega$-安定であるための十分条件を与えた。彼の条件は $f$ の非遊走集合が特異点を含まないことを要求する。しかし、非遊走集合の中に特異点をもつ $\Omega$-安定な endomorphism の例が存在する [6]。我々の十分条件は非遊走集合の中の特異点の存在を許す。さらに、この系は Smale の微分同相写像の $\Omega$-安定性定理の自然な一般化になっている。

## §2 準備

この章で §1 で述べたことに必要な概念の定義を与える。

$M$ を compact, 連結かつ滑かで境界のない多様体とする。

$\mathrm{End}^r(M)$, $r \geq 1$, を $M$ の $C^r$ endomorphisms の $C^r$ 位相をもつ空間とする。$S(f) = \{x \in M \mid Tf|T_xM \text{ is not injective}\}$ とする。$\mathrm{Per}(f) = \{x \in M \mid f^n(x) = x \text{ for some } n \geq 1\}$ とする。

定義 1. $f \in \mathrm{End}^r(M)$ とし $\Lambda$ を $f(\Lambda) = \Lambda$ なる compact な $M$ の部分集合とする。

$\Lambda$ は prehyperbolic 集合である。

$$\Updownarrow$$

以下のような性質をもつ連続的分割 $TM|\Lambda = E^s \oplus E^u$,

$TM$ 上のリーマンノルム$\| \ \|$, 定数 $K>0$, $0<\lambda<1$ が存在する:

(a) $(Tf)E^s \subset E^s$, $(Tf)E^u = E^u$ ;

(b) $\|(Tf)^n v\| \leq K\lambda^n \|v\|$ for $v \in E^s$, $n>0$

$\|(Tf)^n v\| \geq K\lambda^{-n} \|v\|$ for $v \in E^u$, $n>0$ ;

(c) もし $x_1 \neq x_2 \in \Lambda$, $f(x_1) = f(x_2) = y$ ならば $E^s_y = \{0\}$。

定義2. $f \in End^r(M)$が公理Aを満足する。[4]

$\Updownarrow$

(a) $\Omega(f) = Cl\, Per(f)$ ;

(b) $\Omega(f)$ は prehyperbolic 集合である ;

(c) $\Omega(f) \cap S(f) = \phi$。

ここで、$\Omega(f) = \{x \in M \mid \forall$ n.b.d $U$ of $x$, $\exists n>0$ s.t. $f^n(U) \cap U \neq \phi\}$ である。

無限小安定性の定義のために、さらにいくつかの定義を必要とする。もし $\Lambda$ を $f(\Lambda) \subset \Lambda$ なる compact な $M$ の部分集合とすると $\Gamma^0(\Lambda)$ を sup norm をもつ $TM|\Lambda$ の continuous section の空間とする。$T_f M|\Lambda$ を $TM|\Lambda$ の $f$ による pull-back バンドルとする。$\Gamma^0_f(\Lambda)$を $T_f M|\Lambda$ の continuous section の空間とする。線型作用素 $L_f : \Gamma^0(\Lambda) \to \Gamma^0_f(\Lambda)$ を

$$L_f(\eta)=(Tf)\circ\eta-\eta\circ f \quad \text{for} \quad \eta\in\Gamma^0(\Lambda)$$

で定義する。

定義3. $f\in End^r(M)$が無限小安定である。

$$\Updownarrow$$

線型作用素$L_f:\Gamma^0(M)\to\Gamma_f^0(M)$は上への写像である。

微分同相写像の無限小安定性の定義は[3]を見よ。endomorphismの無限小安定性は微分同相写像の無限小安定性の一般化である。実際、無限小安定な微分同相写像はendomorphismの無限小安定の定義を満足している。

微分同相写像の無限小安定性はopen propertyである。しかし、endomorphismの無限小安定性はopen propertyではない。小谷は次のような結果を得た。

命題B. $f\in End^1(S)$は次のような同相写像とする。$\Omega(f)=\{$an attracting fixed point and a repelling fixed point$\}$, $S(f)=\{$an attracting fixed point$\}$。このとき、$f$は無限小安定である。

上記の命題Bの$f$のattracting fixed pointのまわり

で任意の小ささの$C^1$摂動によって無限小安定でないendomorphism $g$を得る。そこで我々は無限小安定なendomorphismの集合の内部を考えることにする。$IF^r(M)$を$C^r$無限小安定な$M$のendomorphismの集合の内部とする。便宜上、我々は$f$が$IF^r(M)$に属するとき、$f$はS-無限小安定であると言うことにする。

## §3 定理Iの証明の準備

定理Iの証明の中で我々は次のような諸結果を使う。

定理C. $\Lambda$を$f\in End^r(M)$, $r\geq 1$, のprehyperbolic集合とする。このとき、$\alpha>0$, $K>0$, $k>0$と$M$における$\Lambda$の近傍$U$と$End^r(M)$における$f$の近傍$V$で次の性質をもつものが存在する； 任意の位相空間$X$, 任意の$X$の同相写像$h$と任意の連続写像$i: X\to U$について、もし$g\in V$かつ$d(ih, gi)<\alpha$ならば、$jh=gj$かつ$d(i,j)\leq k$となる連続写像$j: X\to M$が一意に存在する。さらに、固定した$i$と$h$について、$j$は$g$に$C^0$連続的に依存する。ここで$d(i,j)=\sup\{\rho(i(x),j(x))\,|\,x\in X\}$, $\rho$は$M$上のmetricである。

定理D[1]．Mの$C^r$無限小安定な*endomorphism*は弱公理Aと*no cycles*条件を満足する。

ここで、我々は$f\in \mathrm{End}^r(M)$が公理Aの定義の(a)，(b)だけを満足するとき、$f$は弱公理Aを満足すると言う。命題Bにおける$f$は公理Aは満たさないが弱公理Aを満足する無限小安定な*endomorphism*の例である。

$\mathcal{F}^r(M)=\mathrm{Int}\{f\in \mathrm{End}^r(M) \mid$ *every periodic point of* $f$ *is hyperbolic*$\}$
とする。

定義4．$f\in \mathrm{End}^r(M)$の周期$p$の周期点$x$が*prehyperbolic*である。

$\Updownarrow$

$Tf^p: T_xM \circlearrowleft$が絶対値1の固有値をもたない。

$p\mathcal{F}^r(M)=\mathrm{Int}\{f\in \mathrm{End}^r(M) \mid$ *every periodic point of* $f$ *is prehyperbolic*$\}$
とする。このとき、$\mathcal{F}^r(M)\subset p\mathcal{F}^r(M)$は明らかである。定理Dより、$IF^r(M)\subset p\mathcal{F}^r(M)$である。もし$x$が$f$の周期$n$の*prehyperbolic*な周期点のとき、$E^s(x)$ $(E^u(x))$を$T_xM$の安定(不安定)部分空間として次のように定義する。$E^s(x)$ $(E^u(x))$は$Tf^n: T_xM \circlearrowleft$の絶対値が1より小さい(大きい)固有値に

対応する部分空間である。$f \in \mathcal{P}\mathcal{J}^r(M)$について、$P_i(f) = \{x \in Per(f) \mid \dim E^s(x) = i\}$, $N(i, n, f) = \#\{x \in P_i(f) \mid f^n(x) = x\}$ と定義する。$f \in \mathcal{P}\mathcal{J}^r(M)$の周期点$x$についての$i = \dim E^s(x)$を、$f$についての周期点$x$の安定指数と呼ぶことにする。定理Iの証明の中で、安定指数は重要な役割を演じる。

次の lemma は Lemma I.8 [5] の一般化であり、定理Iの証明で用いられる。

*Lemma E.* もし$f \in \mathcal{P}\mathcal{J}^r(M)$ならば、$End^r(M)$における$f$の$C^r$近傍$\mathcal{U}$で次のような性質を満足するものが存在する；

(a) $N(i, n, g_1) = N(i, n, g_2)$ for all $g_1 \in \mathcal{U}$, $g_2 \in \mathcal{U}$, $n > 0$ and $0 \leq i \leq \dim M$.

(b) もし$g \in \mathcal{U}$かつある$0 \leq i \leq \dim M$について$\overline{P_i(f)}$の近傍の内で$f$と一致するならば、このとき$\overline{P_i(f)} = \overline{P_i(g)}$である。

以上の定理や lemma を用いて定理Iは証明されるのであるが、長くなるのでここでの証明は省略する。

最後に系が微分同相写像のΩ安定性定理の自然な一般化になっていることについて述べる。定理Iの証明と同様な議論を用いて、次のような結果を得る。

*Lemma*. $\mathrm{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$, を$C^r$位相をもつ$M$の微分同相写像の空間とする。$f \in \mathrm{Diff}^r(M)$とする。このとき、次のことは同値である：

(a) $f$が公理Aとno cycles条件を満足する；

(b) $f$が'含まれるすべての$g$が公理Aを満足する近傍'を持つ。

よって、系の条件は*Lemma*の(b)に対応したものとみなせる。ゆえに、系は*Smale*のΩ安定性定理の自然な一般化とみなせる。

## 参考文献

[1] H. Ikeda, On infinitesimal stability of endomorphisms, The Study of Dynamical Systems, vol 7, World Scientific, Singapore, 1989, p59 ~ 84.

[2] H. Ikeda, Infinitesimal stability of Anosov endomorphisms, preprint.

[3] R. Mañé, On infinitesimal and absolute stability of diffeomorphisms, Lecture Notes in Math., vol 468, Springer-Verlag, 1975, p 151 ~ 161.

[4] R. Mañé, Axiom A for endomorphisms, Lecture Notes in Math., vol 597, Springer-Verlag, p 379 ~ 388.

[5] R. Mañé, A proof of the $C^1$ stability conjecture; Publ. Math. I.H.E.S. 66 (1987), 161 - 210.

[6] R. Mañé and C. Pugh, Stability of endomorphisms, Lecture Notes in Math., vol 468, Springer-Verlag, (1975) p 175 - 184.

[7] F. Przytycki, On Ω-stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A, Studia Math. 60 (1977), p 61 - 77.