数理解析研究所講究録
第814巻1992年13-26

戸田格子の非カオス的な差分化

東京都立大学理学部物理　　斎藤　暁　（Satoru Saito）

§1. 序

自然界の現象が本質的に非線形であるにもかかわらず、非線形現象を一般的に扱う理論を我々は未だに持たない。この様な状況にあって、ソリトン系と呼ばれる一連の完全可積分な方程式の系について最近その全貌が明らかにされつつある事は注目に値する。理論物理の立場からすれば、これらは単に特殊な微分方程式系というに留まらず、2次元共形場の理論、2次元重力理論、2次元可解統計模型 [1] 、更には重力を含む素粒子の統一モデルである超弦理論を記述している [2] と言う意味で自然界の基本的な法則に深く関連している。

しかるに、非線形系一般からみるとこれら完全可積分な系はその中の極く特殊な部分に過ぎない。非線形系に普通にみられる非決定論的乃至はカオス的な振舞いをすること無く、全ての解が解析的に求まる方程式の無限個の系列が存在すること自体、非常に興味あることである。従ってこの様な完全可積分系が一般の非線形系の中に如何に特徴ずけられるか、ということが物理現象を理解する上で重要な問題の一つとなってくる。

ソリトン系と呼ばれる可解な方程式系は、独立変数のある一定の規則に従った差分化の下で完全可積分性を保つという著しい性質を持つ事が知られている [3] 。このことに注目し、典型的なソリトン方程式として知られる戸田格子について、その時間変数も差分化して得られる方程式の持つ性質を議論したい。

周期的な一次元戸田格子 [4] は Hamilton 力学系として解析力学的な手法で解く事ができる [5] 。戸田格子の自由度を N としたとき、系の力学変数は位相空間の $N-1$ 次元トーラス上で準周期運動することが知られている。同時にこの準周期解は $N-1$ 次元複素トーラス上の解析的な一価関数として与えられる。これらの事情が系の時間変数を差分化した場合どの様に変形されるかを明らかにする事がこの論文の目的である。ここでは、時間、空間がそれぞれ 2 及び 1 次元の戸田格子について、3 つの変数全てを対称的に離散変数としたものを考える。これは広田双線形差分方程式 [6] としてしられ、KP-hierarchy と呼ばれるソリトン方程式の無限個の系列と同等である [7,8] 。この方程式の解は戸田格子の解、即ちτ—関数によって与えられ、その性質は色々な方向から研究されている。従って系の可解性、解の解析性は明かである。これを Hamilton 力学系として定式化するならば、離散的な時間発展をする多自由度の完全可解系を記述している事になる。その上、力学変数は $N-1$ 次元複素トーラス上の一価解析関数であり、滑らかに振る舞う複素解析力学系と考えることが出来る。この事からも、完全可積分性を、差分化の下での安定性によって特徴付けることが可能であるように思われる。

本論に入る前に、時間変数の差分化による可積分系の安定性について簡単な例を見ておこう [9] 。よく知られているように、可積分なロジスティック方程式

$$\frac{dx}{dt} = \mu x(1-x)$$

は、これを

$$y_{l+h} = \alpha y_l(1-y_l)$$

$$y_l = \frac{\alpha-1}{\alpha}x_l, \qquad \mu = \frac{\alpha-1}{h}$$

として差分化したとき、αの値が十分大きいときに、系はカオス的な振舞いをする。しかるにこれを

$$y_{l+h} = \alpha y_l(1-y_{l+h})$$

$$y_l = \frac{\alpha-1}{\alpha}x_l, \qquad \mu = \frac{2(\alpha-1)}{h(\alpha+1)}$$

の様に差分化すれば可解性は保たれ、Möbius 変換によって解は

$$y_{l+h} = \frac{\alpha^{l/h} y_h}{1 + \alpha \frac{1-\alpha^{l/h}}{1-\alpha} y_h}$$

と容易に求まり、しかも $h \to 0$ の極限でこの解は連続な方程式の解と一致する[1]。これは力学系と見たとき自由度が1の最も簡単な系ではあるが、一般の多自由度可積分系についても事情は余り変わらないことが以下で分かるであろう。

§2. 広田差分方程式

広田差分方程式は $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbf{C}^3$ を変数とし $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$ をパラメーターとする関数 f に対する双線形（従って非線形）差分方程式

$$\alpha f(k_1+1, k_2, k_3) f(k_1, k_2+1, k_3+1) + \beta f(k_1, k_2+1, k_3) f(k_1+1, k_2, k_3+1)$$
$$+ \gamma f(k_1, k_2, k_3+1) f(k_1+1, k_2+1, k_3) = 0, \tag{1}$$

である。これは広田によって１９８１年に3ソリトン解を持つ方程式として考察され、変数 k_1, k_2, k_3 とパラメーター α, β, γ の色々な組み合わせの連続極限をとる事によって、既知の完全可積分方程式が導かれる事が示された [6]。その中には KdV 方程式、戸田格子、KP 方程式、Sine-Gordon 方程式…等が含まれる。例えば、時空間が (2,1) 次元の戸田格子は k_1, k_2, k_3 から連続時間変数 l, m 及び離散空間変数 n を

$$l = k_2 + k_3 + 1, \qquad m = k_3 + k_1 + 1, \qquad n = k_1 + k_2 + 1,$$

ととり、(1) から l, m の連続極限をとることによって得られる；

$$g(l,m,n+1)g(l,m,n-1) - g^2(l,m,n) = g\frac{\partial^2 g}{\partial l^2} - \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 + g\frac{\partial^2 g}{\partial m^2} - \left(\frac{\partial g}{\partial m}\right)^2.$$

[1] この他にも差分化の仕方によって可解性を保存する微分方程式のいくつかの例が、広田良吾氏によって調べられている事を教えて頂きました。氏に感謝いたします。

ここで、$g(l,m,n)=f(k_1,k_2,k_3)$ とし、右辺の g は $g(l,m,n)$ である。更に g の m 依存性がないとして、

$$e^{x_n}-1=\frac{\partial^2}{\partial l^2}\ln g(l,n)$$

を定義すれば、よく知られた一次元戸田格子の式

$$\frac{d^2}{dl^2}x_n=e^{x_{n+1}}-2e^{x_n}+e^{x_{n-1}}$$

を得る。

後に方程式 (1) は $\alpha+\beta+\gamma=0$ のとき、無限個の可解な方程式系（KP-hierarchy）に同等であり、従って完全可積分である事が示されている [8]。とくにパラメーターを

$$\alpha=\frac{z_1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)},\quad \beta=\frac{z_2}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)},\quad \gamma=\frac{z_3}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}$$

と置くと (1) は

$$f(k)=\prod_{i,j}\Big(\frac{E(z_i-z_j)}{z_i-z_j}\Big)^{k_ik_j/2}\theta(\zeta+\sum_j k_j\int^{z_j}\omega) \tag{2}$$

に於いて変数の組 $\{k_j\}$ の中から任意の 3 つを k_1,k_2,k_3 にとることによって満たされる [2]。ここに E,θ,ω はそれぞれ prime form, Riemann の theta 関数、第一種 Abel 微分であり、ζ は任意の定数ベクトルである。(2) を (1) に代入して得られる式は代数曲線に対する Fay の trisecant 公式 [10] として知られているものに他ならない。更に、k_j を基底状態にある j−番目の粒子の運動量、z_j を対応する Koba-Nielsen 変数と考えれば、(2) の f は素粒子の弦模型に於ける粒子の相関関数となっている事も示す事が出来る [2]。

§3. 広田差分方程式の逆問題

(2) 式で与えられるように、広田差分方程式はその解が解析的に知られており、従ってその振舞いも具体的に調べる事が出来る。我々にとって今興味あるのはこれらの解の性質ではなく、どの様にしてこの非線形方程式系の解が力学系として解析的に求められるかと言う点にある。そこで時間変数 t が連続な一次元戸田格子を解くときに用いられた手法

[11] に従い、差分化された方程式 (1) の Lax 形式を求め、それを更に Hamilton 方程式に書き換える事によって力学系としての性質を調べよう。

逆問題とは、非線形方程式 (1) に対し、未知関数 f からなるある演算子 L(Lax 演算子) を用いて

$$L\phi = \lambda\phi \tag{3}$$

という線形固有値方程式を考え、ϕ に対する境界条件に応じて、演算子 L の運動を決定し、それから未知関数 f を求めることである。そこで、$U_+(l,m,n), U_-(l,m,n)$ を $\mathbf{C}$ 上に値を持つ l,m,n の関数（ゲージポテンシャル）とし、c_+, c_- を任意の複素定数として次の演算子

$$\nabla_\pm \equiv U_\pm(l,m,n)(e^{\partial_\pm} - 1)U_\pm^{-1}(l,m,n), \tag{4a}$$

$$E_\pm \equiv c_\pm U_\mp(l,m,n)e^{\partial_\pm \pm \partial_n}U_\mp^{-1}(l,m,n), \tag{4b}$$

を定義する。但し $\partial_+, \partial_-, \partial_n$ はそれぞれ l,m,n による偏微分 $\frac{\partial}{\partial l}, \frac{\partial}{\partial m}, \frac{\partial}{\partial n}$ を表し、従って $e^{\partial_+}, e^{\partial_-}, e^{\partial_n}$ は各変数についての shift 演算子を意味する。また、これら演算子はその右にくる全ての関数に作用するものとする。

次に、Lax 演算子 L を

$$L = E_+ + E_- - \nabla_+ - \nabla_- \tag{5}$$

とする。(4) より自明な関係

$$[\nabla_+, E_-] = [\nabla_-, E_+] = 0 \tag{6}$$

を用いると Lax 方程式

$$[E_\pm, L] = [\nabla_\pm, L] \tag{7}$$

は

$$[E_+, E_-] = -[\nabla_+, \nabla_-] \tag{7'}$$

と等しくなる。ここで

$$U_+(l,m,n) = U_-(l,m,n+1) = f(k_1, k_2, k_3) \tag{8}$$

とおくと $(7')$ は広田の差分方程式 (1) と同等になる。即ちポテンシャル $U_\pm$が広田差分方程式の解であるときに限り (7) が成り立っている事が示せる。従って (5) の L と $E_\pm$が変数 l,m に対応した Lax pair の 2 つの組 $(L,E_+),(L,E_-)$ になっていることが分かる。L の固有値λは (7) を用いて

$$[\nabla_\pm,\lambda]=0$$

を満たし、従って時間変数 l,m に依存しない事を示せる。

線形問題 (3) を解くために先ず空間変数 n への依存性のみに注目し、(3) を具体的に表せば

$$a_+(n)\phi(n+1)+b(n)\phi(n)+a_-(n)\phi(n-1)=\lambda\phi(n) \tag{3'}$$

となる。ここに $a_\pm,b$ は l,m に関する shift 演算子でこれらを陽に書けば

$$a_\pm(n)=c_\pm U_\mp(l,m,n)e^{\partial_\pm}U_\mp^{-1}(l,m,n\pm 1) \tag{9a}$$

$$b(n)=2-U_+(l,m,n)e^{\partial_l}U_+^{-1}(l,m,n)-U_-(l,m,n)e^{\partial_m}U_-^{-1}(l,m,n). \tag{9b}$$

これらを用いて $(3')$ を逐次解いていくと結局

$$\begin{aligned}\phi(n+1) &= a_+^{-1}(n)(\lambda-b(n))\phi(n)-a_+^{-1}(n)a_-(n)\phi(n-1)\\ &= \cdots\\ &= P_{n,1}\phi(1)-P_{n,2}a_+^{-1}(1)a_-(1)\phi(0)\end{aligned} \tag{10}$$

を得る。ただし $P_{n,\nu}$は次に与えられる行列式の展開の各項に於いて suffix の大きい演算子を左に並べると言う規則に従って書かれたものである；

$$P_{n,\nu}=\det[A_{n,\nu}^{-1}B_{n,\nu}] \tag{11a}$$

$$A_{n,\nu}=\begin{pmatrix} a_+(n) & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_+(n-1) & 0 & \cdots & 0\\ & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_+(\nu+1) & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_+(\nu)\end{pmatrix} \tag{11b}$$

$$B_{n,\nu} = \begin{pmatrix} \lambda - b(n) & a_-(n) & 0 & \cdots & 0 \\ a_+(n-1) & \lambda - b(n-1) & a_-(n-1) & 0 & \cdots \\ 0 & a_+(n-2) & \lambda - b(n-2) & \cdots & \\ & & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & a_+(\nu+1) & \lambda - b(\nu+1) & a_-(\nu+1) \\ 0 & \cdots & 0 & a_+(\nu) & \lambda - b(\nu) \end{pmatrix} \tag{11c}$$

これは固有値λについての $n-\nu+1$ 次の多項式である。

§4. 準周期解

非線形差分方程式 (1) の解は線形固有値問題 (3) の (10) で与えられる色々な解に対応して求まる。以下では、特にポテンシャル $U_\pm(l,m,n)$ が周期条件

$$U_\pm(l,m,n+N) = U_\pm(l,m,n)$$

をみたす場合について考えよう。この時、点 $n+N$ での解 $\phi(n+N)$ は (3) の点 n での 2 つの独立な解 $\phi_1(n), \phi_2(n)$ の線形結合でなければならない。$\varphi(n)$ を $\phi_1(n)$ と $\phi_2(n)$ を二つの成分とするベクトルを表すものとして、この条件を書けば

$$\varphi(n+N) = M\varphi(n) \tag{12}$$

$$\varphi(n) = \begin{pmatrix} \phi_1(n) \\ \phi_2(n) \end{pmatrix}.$$

モノドロミー行列 M は l, m の関数であるが、$n = 0, 1$ 及び $n = N, N+1$ での ϕ の値によって具体的に書き下すことが出来て

$$M = \begin{pmatrix} \phi_1(N) & \phi_1(N+1) \\ \phi_2(N) & \phi_2(N+1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1(0) & \phi_1(1) \\ \phi_2(0) & \phi_2(1) \end{pmatrix}^{-1} \tag{13}$$

と表せる。行列 M の要素が決まればそれに応じて演算子 L が定まり、その情報を下にポテンシャル $U_\pm(l,m,n)$ を求めることができる。

Mの時間依存性を見るために、まず(3)の2つの解から作られるφを用いて$\nabla_\pm\varphi - E_\pm\varphi$と言うベクトルを考えると、これらはLax方程式(7)によって

$$\begin{aligned} L(\nabla_\pm\varphi - E_\pm\varphi) &= [L,\nabla_\pm]\varphi + \nabla_\pm L\varphi - [L,E_\pm]\varphi - E_\pm L\varphi \\ &= \lambda(\nabla_\pm\varphi - E_\pm\varphi) \end{aligned}$$

を満たす。従って、このベクトルは同じ固有値λを持つLの固有関数であり、これら自身ϕ_1とϕ_2の線形結合でなければならない。即ち$\Lambda_\pm$をある2×2行列として

$$\nabla_\pm\varphi - E_\pm\varphi = \Lambda_\pm\varphi \tag{14$_\pm$}$$

と書ける。この$+,(-)$に対応した2つの式は$m,(l)$を固定して考えた式である。まずl依存性に注目し、$(14)_+$を$M(l,m)\varphi(l,m,n)$に適用して代入すると

$$\begin{aligned} &\nabla_+M(l,m)\varphi(l,m,n) - E_+M(l,m)\varphi(l,m,n) - \Lambda_+(l,m)M(l,m)\varphi(l,m,n) \\ = \; & M(l+1,m)\nabla_+\varphi(l,m,n) + (M(l+1,m) - M(l,m))\varphi(l,m,n) \\ & \qquad -M(l+1,m)E_+\varphi(l,m,n) - \Lambda_+(l,m)M(l,m)\varphi(l,m,n) \\ = \; & (M(l+1,m) - M(l,m))\varphi(l,m,n) - M(l+1,m)\Lambda_+(l,m)\varphi(l,m,n) \\ & \qquad -\Lambda_+(l,m)M(l,m)\varphi(l,m,n) \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

即ち

$$M(l+1,m) = (1+\Lambda_+)M(l,m)(1+\Lambda_+)^{-1} \tag{15$_+$}$$

を得る。同様にmに注目すれば

$$M(l,m+1) = (1+\Lambda_-)M(l,m)(1+\Lambda_-)^{-1} \tag{15$_-$}$$

となる。(15)から分かることは行列$1+\Lambda_\pm$を$e^{H_\pm}$と書けばH_+及びH_-はそれぞれ時間l,m方向の発展を生成するHamiltonianに他ならないということである。それのみならず、$\Lambda_\pm$

の定義式 $(14)_\pm$ に戻れば、ポテンシャル $U_\pm$ が広田差分方程式の解であるときに互いに交換することが分かる；

$$[\Lambda_+, \Lambda_-] = 0.$$

更に (15) から明らかなように、$\mathrm{Tr}M(l,m)$ と $\det M(l,m)$ は共に変数 l,m に依存しない。

§5. 時間発展

系の時間発展の様子を見るには (15) 式をもう少し詳しくみなければならない。

$$\frac{1+\Lambda_+}{\sqrt{\det(1+\Lambda_+)}} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{16}$$

と書いて $(15)_+$ を具体的に表せば

$$M(l+1) = \begin{pmatrix} adM_{11} - bcM_{22} - acM_{12} + bdM_{21}, & ab(M_{22} - M_{11}) + a^2M_{12} - b^2M_{21} \\ cd(M_{11} - M_{22}) - c^2M_{12} + d^2M_{21} & adM_{22} - bcM_{11} + acM_{12} - bdM_{21} \end{pmatrix}$$

但し、右辺の M の成分は時刻 l での値をとり、もう一つの時間変数 m 依存性は省略して書いてある。$\mathrm{Tr}M$ や $\det M$ が l,m に依存せず、従って M の成分の全てが独立な力学変数ではない。そこで $M_{11}(l)$ と $M_{22}(l)$ を他の成分で表すと

$$M_{11}(l) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Tr}M + \sqrt{R(\lambda) - 4M_{12}(l)M_{21}(l)}\Big)$$

$$M_{22}(l) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Tr}M - \sqrt{R(\lambda) - 4M_{12}(l)M_{21}(l)}\Big)$$

ただし

$$R(\lambda) = (\mathrm{Tr}M)^2 - 4\det M$$

である。これらを $(15)_+$ の $M_{12}(l), M_{21}(l)$ に対する方程式に代入して

$$M_{12}(l+1) = -ab\sqrt{R(\lambda) - 4M_{12}(l)M_{21}(l)} + a^2M_{12}(l) - b^2M_{21}(l) \tag*{$(17)_+$}$$

$$M_{21}(l+1) = cd\sqrt{R(\lambda) - 4M_{12}(l)M_{21}(l)} - c^2M_{12}(l) + d^2M_{21}(l) \tag*{$(17)_-$}$$

である。いま、φ の解として$\phi_1(1)=\phi_2(0)=0$ となるようなものをとれば、$M_{12}(l), M_{21}(l)$ が (13),(10),(11) によってλの $N-1$ 次の多項式になることが分かる。従って $M_{12}(l)=0$ 、$M_{21}(l)=0$ となるλの値をそれぞれ$\mu_j(l), \nu_j(l) \quad j=1,2,\cdots,N-1$ とすると

$$M_{12}(l)=K_{12}(l)\prod_{k=1}^{N-1}(\lambda-\mu_k(l)) \tag{18$_+$}$$

$$M_{21}(l)=K_{21}(l)\prod_{k=1}^{N-1}(\lambda-\nu_k(l)) \tag{18$_-$}$$

ただし

$$\begin{aligned}K_{12}(l) &= -(\det A_{N,1}^{-1})a_-(1)\phi_1(0)/\phi_2(1)\\ K_{21}(l) &= (\det A_{N-1,1}^{-1})\phi_2(1)/\phi_1(0).\end{aligned}$$

この表式を $(17)_+$に入れて、それを$\lambda=\mu_j(l)$ と言う点でみるならば

$$\begin{aligned}&K_{12}(l+1)\prod_{k=1}^{N-1}(\mu_j(l)-\mu_k(l+1))\\ &= -ab\sqrt{R(\mu_j(l))}-b^2K_{21}(l)\prod_{k=1}^{N-1}(\mu_j(l)-\nu_k(l))\end{aligned} \tag{19}$$

を得る。行列Λ_+の各要素および $K_{12}(l)$ の値は、線形方程式 (3) の残りの積分定数$\phi_1(0),\phi_2(1)$ により定まるものであるからそれらを $K_{12}(l+1)=ab$ となるように定める。すると (19) 式は書き直して

$$\mu_j(l+1)-\mu_j(l)=\frac{\sqrt{R(\mu_j(l))}+S(\mu_j(l))}{\prod_{\substack{k=1\\ \neq j}}^{N-1}(\mu_j(l)-\mu_k(l+1))} \tag{20}$$

と変形される。ここで

$$S(\lambda)=ba^{-1}K_{21}(l)\prod_{k=1}^{N-1}(\lambda-\nu_k(l))$$

である。この式は $\{\mu_j(l)\}$ を $N-1$ 個の力学変数とするとき、その運動方程式と考えるこ

とができる。m 依存性と全く独立にこれらが定まることに注意しよう。

§6. 連続時間極限

以上の議論を、時間 l が連続の極限 $(l \to t)$ で考えるならば、(20) 式は簡単になって

$$\frac{d\mu_j(t)}{dt} = \frac{\sqrt{R(\mu_j(t))}}{\prod_{\substack{k=1\\ \neq j}}^{N-1}(\mu_j(t) - \mu_k(t))}. \tag{21}$$

を得る。この極限では $\det M = 1$ が成り立っている。一方、M の固有値 ρ は

$$\rho = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Tr}M \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}M)^2 - 4\det M}\Big)$$

と与えられ、やはり l, m には依存しない。特に (3) の安定な定常解は

$$\varphi(n+N) = \pm\varphi(n)$$

即ち $\rho = \pm 1$ であるから、この時

$$\det M = \frac{1}{4}(\mathrm{Tr}M)^2 = 1$$

でなければならない。$(\mathrm{Tr}M)^2$ が固有値 λ の $2N$ 次の多項式であることから $\rho = \pm 1$（故に $\mathrm{Tr}M = \pm 2$ ）の定常解に対応した (3) の N 個ずつの固有値をそれぞれ $\{\lambda_j\}, \{\lambda'_j\}$ とすると、A を定数として

$$R(\lambda) = (\mathrm{Tr}M)^2 - 4 = A^2 \prod_{k=1}^{N}(\lambda - \lambda_k)(\lambda - \lambda'_k) \tag{22}$$

と書ける。$R(\lambda)$ は時間変数 l, m にも n にもよらないので、いつでもこの $R(\lambda)$ に対する表示は成り立つ。方程式 (21) の右辺の $R(\mu_j)$ として (22) を代入すれば各 μ_j が λ の二つの固有値の間を周期運動する $N-1$ 個の力学変数であることが分かる。従ってこの系は位相空間の $N-1$ 次元トーラス上を運動する力学系と考えることができる。実際、方程式の組 (21) は、正準共役な変数 ω_j を

$$\mathrm{Tr}M(\mu_j) = (-1)^{N-j} 2\cosh\frac{\omega_j}{2}$$

で導入するとHamiltonian

$$H = 4\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu_j^N - 2A(-1)^{N-j}\cosh\frac{\omega_j}{2}}{\prod_{k=1 \atop \neq j}^{N-1}(\mu_j - \mu_k)} \tag{23}$$

から、Hamilton 力学系に対する方程式として導ける [5]

一方、$\{\mu_j\}$ はもともと $N-1$ 次元複素トーラス上に定義されており、$\{\lambda_j\},\{\lambda'_j\}$ はその moduli と考えることもできる。実際 Lagrange の補完公式

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu_j^s}{\prod_{k=1 \atop \neq j}^{N-1}(\mu_j - \mu_k)} = \delta_{s,N-2}$$

を用いて (21) を書き直せば

$$At + const. = \sum_{j=1}^{N-1} \int^{\mu_j} \frac{\mu_j^{N-2} d\mu_j}{\sqrt{\prod_{k=1}^{N}(\mu_j - \lambda_k)(\mu_j - \lambda'_k)}}$$

となり、At は Jacobi 多様体上の変数となる。Jacobi の逆変換を用いてμ_jを t の関数として求めることできる。

$$\sum_{j=1}^{N-1} \mu_j = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\frac{\theta(At+\delta)}{\theta(At+c+\delta)}. \tag{24}$$

更に連続時間極限に於いて $(18)_+$ の右辺のλ^{N-2}の係数を (10) の$\phi_1(N+1)$ の表示に於ける係数と比べて

$$\sum_{\nu=2}^{N} b(\nu) = \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j$$

を確かめることができる。一方、Lax 演算子 L の trace をとって

$$\mathrm{Tr}L = \sum_{\nu=1}^{N} b(\nu) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(\lambda_j + \lambda'_j)$$

であるから、結局

$$b(1) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(\lambda_j + \lambda'_j) - \sum_{j=1}^{N-1}\mu_j$$

となり、これに (24) を代入して、戸田方程式の解の時間変化を求めることが出来た [11]。

§7. 結論

(2+1) 次元戸田格子の二つの時間変数を離散化して得られる系について、その力学変数に対する運動方程式を導いた。その結果は、時間変数 lにたいしては (20) 式で与えられる。

同様の式が m についても成り立つ。この式の右辺に対する表示から明かなように、変数 $\mu_j(l)$ の変化は、他の力学変数の時刻 l での値だけでなく、$l+1$ での値にも依存する。この時にのみ系は可解となり、解は $N-1$ 次元複素トーラス上の一価解析関数で与えられる。ロジスティック方程式の差分化の場合と同様、可積分系の一定の規則に従う差分化は、その可解性を保持し、同じ形の解を持つ。即ち、解は連続な場合の解に於ける変数を、単に離散変数と見なしたものに他ならない。これは全ての解が解析的な関数で与えられているときにのみ可能であることからも明かであろう。

参考文献

[1] see, for example, "Two Dimensional Quantum Gravity and Random Surfaces" *eds.* D.J.Gross, T.Piran and S.Weinberg (World Scientific, Singapore, 1992); "Yang-Baxter Equation in Integrable Systems", *ed.* M.Jimbo (World Scientific, Singapore, 1990); Wakimoto, M. and Yamada, H., Hiroshima Math. Journal 16 427 (1986).

[2] Saito,S., Tokyo Metropolitan Univ. preprint TMUP-HEL-8613, 8615 (1986); Phys. Rev. Lett. 59, 1798 (1987); Phys. Rev. *D36*, 1819 (1987); Phys. Rev. *D37*, 990 (1988) ; in "Nonlinear Fields; Classical, Random, Semiclassical" *ed.* Z.Popowicz and Garbaczewski,P. (World Scientific, 1991) p.286; Kato, H. and Saito, S., Lett. Math. Phys. 18, 117 (1989).

[3] Date, E., Jimbo, M. and Miwa, T., J. Phys. Soc. Jpn. 51, 4116, 4125 (1982).

[4] Toda, M., J. Phys. Soc. Jpn. 22, 431 (1967); "Theory of Nonlinear Lattices" (Springer-Verlag, 1981).

[5] Flaschka, H. and McLaughin, D.W., Prog. Theor. Phys. 55 438 (1976); Flaschka, H., "dynamical Systems", Lec. Note in Phys. 38 (Springer, 1975) 441; McKean, H. and van Moerbeke, P., Inv. Math. 30 217 (1974).

[6] Hirota, R., J. Phys. Soc. Jpn. 50, 3787 (1981); "Nonlinear Integrable Systems" *ed.* M.Jimbo and T.Miwa (World Scientific, 1983) p.17.

[7] Sato,M. and Sato,Y., Publ. Res. Inst. Math. Sci. (Kyoto Univ.) 388, 183 (1980); *ibid.* 414, 181 (1981); Sato, M., *ibid.* 433, 30 (1981), Date,E., Jimbo,M., Kashiwara,M. and Miwa,T., J. Phys. Soc. Jpn 50, 3806, 3813 (1981).

[8] Miwa, T., Proc. Jpn. Acad. $\underline{58A}$, 9 (1982).

[9] Morishita, M., Research on Population Ecology $\underline{VII-1}$, (1965).

[10] Fay, J.D., "Theta Functions on Riemann Surfaces", Lect. Notes in Math. 352, (Springer-Verlag, 1973).

[11] Kac, M. and van Moerbeke, P., J. Math. Phys. 72 2879 (1974); Date, E. and Tanaka, S., Prog. Theor. Phys. 55 457 (1976); Prog. theor. Phys. Suppl. 59 107 (1976).

[12] Saito, S. and Saitoh, N., J. Math. Phys. 28 1052 (1987); Saitoh, N. and Saito, S., J. Phys. Soc. Japan 56 1664 (1987); J. Phys. A:Math. Gen. 23 3017 (1990).