数理解析研究所講究録
第 816 巻 1992 年 169-174

Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution for generalized Kac-Moody algebras

京大・理　内藤 聡 (Satoshi Naito)

1. Notation

$A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ を次の条件 (1)-(3) を満たす n 次正方行列 (GGCM) とする。

(C1) $a_{ii}=2$, or $a_{ii}\leq 0$;

(C2) $a_{ij}\leq 0\ (i\neq j)$, $a_{ij}\in \mathbb{Z}$ if $a_{ii}=2$;

(C3) $a_{ij}=0\Leftrightarrow a_{ji}=0$.

そして、$\mathfrak{g}(A)$ を、この GGCM A に付随する generalized Kac-Moody algebra (= GKM algebra)、$\mathfrak{h}$ をその Cartan subalgebra、$\Pi=\{\alpha_i\}_{i\in I}$ を simple root の全体、$\Pi^\vee=\{\alpha_i^\vee\}_{i\in I}$ を simple coroot の全体とする。このとき、$\mathfrak{g}(A)$ は、root space 分解 : $\mathfrak{g}(A)=\mathfrak{h}\oplus\sum_{\alpha\in\Delta^\pm}^{\oplus}\mathfrak{g}_\alpha$ を持つ。ここで、$\mathfrak{g}_\alpha$ はルート $\alpha\in\Delta^\pm\subset\mathfrak{h}^*$ に対応する root space である。

今、J を、添字集合 I の部分集合で有限型のもの、即ち対応する A の部分行列 $A_J:=(a_{ij})_{i,j\in J}$ が (古典的な) 有限型の Cartan 行列になる様なものとし、これに対して次の $\mathfrak{g}(A)$ の部分環と、Weyl 群 W の部分集合を定義する。

$$\mathfrak{u}^\pm:=\sum_{\alpha\in\Delta^+(J)}^{\oplus}\mathfrak{g}_{\pm\alpha},\ \mathfrak{m}:=\mathfrak{h}\bigoplus\sum_{\alpha\in\Delta_J^+}^{\oplus}(\mathfrak{g}_\alpha\bigoplus\mathfrak{g}_{-\alpha}),\ \mathfrak{p}=\mathfrak{m}\bigoplus\mathfrak{u}^+,$$

$$W(J):=\{w\in W\mid \Delta^+\cap w(\Delta^-)\subset\Delta^+(J)\},$$

where $\Delta_J^+:=\Delta^+\cap(\sum_{i\in J}\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i)$, $\Delta^+(J):=\Delta^+\setminus\Delta_J^+$.

2. The existence of the BGG resolution for GKM algebras

今、$P^+:=\{\mu\in\mathfrak{h}^*\mid <\mu,\alpha_i^\vee>\geq 0\ (i\in I),\ <\mu,\alpha_i^\vee>\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\text{ if }a_{ii}=2\}$, $P_J^+:=\{\mu\in\mathfrak{h}^*\mid <\mu,\alpha_j^\vee>\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\ (j\in J)\}$ とし、$L(\Lambda)\ (\Lambda\in P^+)$ を、Λ を最高ウエイトとする既約最高ウエイト $\mathfrak{g}(A)$-加群、又 $\lambda\in P_J^+$ に対して、$L_\mathfrak{m}(\lambda)$ を、λ を最高ウエイトとする既約 $\mathfrak{m}$-加群、$V_\mathfrak{m}(\lambda)=U(\mathfrak{g}(A))\otimes_{U(\mathfrak{p})}L_\mathfrak{m}(\lambda)$ を、λ を最高ウエイトとする generalized Verma module とする。特に、$J=\emptyset$ の場合には $V_\mathfrak{h}(\lambda)=V(\lambda)$ は、Verma module である。

$\mathfrak{g}(A)$ が有限次元半単純リー環の場合の、Bernstein-Gelfand-Gelfand の結果の拡張として次の Theorem が得られる。

Theorem 2.1. (存在定理)　$A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ を対称化可能な GGCM とする。このとき、$L(\Lambda)\,(\Lambda \in P^+)$ に対して、次の、$\mathfrak{g}(A)$-加群 $C_p(\Lambda)$ と $\mathfrak{g}(A)$-準同型 ∂_p から成る完全系列が、存在する。

$$0 \longleftarrow L(\Lambda) \xleftarrow{\partial_0} C_0(\Lambda) \xleftarrow{\partial_1} C_1(\Lambda) \xleftarrow{\partial_2} C_2(\Lambda) \xleftarrow{\partial_3} \cdots,$$

$$\text{where } C_p(\Lambda) = \sum_{\substack{w\in W(J),\beta\in\mathcal{S}(\Lambda)\\ \ell(w)+ht(\beta)=p}}^{\oplus} V_{\mathfrak{m}}(w(\Lambda+\rho-\beta)-\rho) \quad (p \geq 0).$$

ここで、$\mathcal{S}:= \{$sum of distinct pairwise perpendicular simple roots α_i with $a_{ii} \leq 0\}$, $\mathcal{S}(\Lambda):= \{\beta \in \mathcal{S} \mid \beta$ is perpendicular to $\Lambda\}$ であり、ρ は、$<\rho, \alpha_i^\vee> = (1/2)\cdot a_{ii}$ $(i \in I)$ なる $\mathfrak{h}^*$ の元である。

Theorem 2.1 の証明に於いては、次の Lemma が重要な役割を果たす。

Lemma 2.2.　$\Lambda \in P^+$, $w_i \in W(J), \beta_i \in \mathcal{S}(\Lambda) (i = 1, 2)$ とする。このとき、

$$\mathrm{Ext}^1_{(\mathfrak{g}(A),\mathfrak{m})}(V_{\mathfrak{m}}(w_1(\Lambda+\rho-\beta_1)-\rho), V_{\mathfrak{m}}(w_2(\Lambda+\rho-\beta_2)-\rho)) \neq 0,$$

であれば、$\ell(w_1) + ht(\beta_1) \lneqq \ell(w_2) + ht(\beta_2)$.

3.　Homology vanishing theorems

Theorem 2.1 から、以下のホモロジー消滅定理が得られる。

Proposition 3.1.　$\Lambda \in P^+, \mu \in P_J^+$ とする。このとき、$\mu \neq w(\Lambda+\rho-\beta)-\rho$ for any $w \in W(J)$, $\beta \in \mathcal{S}(\Lambda)$ であれば、

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathfrak{g}(A)}(L^*(\Lambda), V_{\mathfrak{m}}(\mu)) = 0 \quad (n \geq 0),$$

$$\mathrm{Tor}_n^{(\mathfrak{g}(A),\mathfrak{m})}(L^*(\Lambda), V_{\mathfrak{m}}(\mu)) = 0 \quad (n \geq 0).$$

ここで、$L^*(\Lambda)$ は、$-\Lambda$ を lowest weight とする既約 lowest weight $\mathfrak{g}(A)$-加群である。

Theorem 3.2.　$\Lambda_1, \Lambda_2 \in P^+$. 今、$\Lambda_1 - \Lambda_2 \neq \beta_1 - \beta_2$ for any $\beta_i \in \mathcal{S}(\Lambda_i)\,(i = 1, 2)$ とする。このとき、

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathfrak{g}(A)}(L^*(\Lambda_1), L(\Lambda_2)) = 0 \quad (n \geq 0),$$

$$\mathrm{Tor}_n^{(\mathfrak{g}(A),\mathfrak{m})}(L^*(\Lambda_1), L(\Lambda_2)) = 0 \quad (n \geq 0).$$

Corollary 3.3. $\Lambda \in P^+$. 今、$\Lambda \neq \beta_1 - \beta_2$ for any $\beta_1 \in \mathcal{S}(\Lambda), \beta_2 \in \mathcal{S}$ とする。このとき、

$$H_n(\mathfrak{g}(A), L(\Lambda)) = 0 \quad (n \geq 0),$$

$$H_n(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{m}, L(\Lambda)) = 0 \quad (n \geq 0).$$

又、$\Lambda = 0$ の場合の relative Lie algebra homology $H_n(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{m}, \mathbb{C})$ に関しては、次の Theorem が成り立つ。

Theorem 3.4.

$$H_{2s+1}(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{m}, \mathbb{C}) = 0 \quad (s \geq 0),$$

$$\begin{aligned}
&\dim_{\mathbb{C}} H_{2s}(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{m}, \mathbb{C}) \\
&= \text{the number of elements of the set } \{(w, \beta) \in W(J) \times \mathcal{S} \mid \ell(w) + ht(\beta) = s\} \\
&= \text{the number of } \mathfrak{m}\text{-irreducible components} \\
&\quad \text{in the Lie algebra homology } H_s(\mathfrak{u}^-, \mathbb{C}) \quad (s \geq 0).
\end{aligned}$$

4. Verma module embeddings and the strong BGG resolution for GKM algebras

Theorem 2.1 では、map $\partial_p \, (p \geq 0)$ の形については何も述べられていなかった。ここでは、resolution を、$J = \emptyset$ の場合に explicit に構成し、それが Theorem 2.1 に於けるものと equivalent な事を示す。

$\Pi^{re} := \{\alpha_i \in \Pi \mid a_{ii} = 2\}$, $\Pi^{im} := \{\alpha_i \in \Pi \mid a_{ii} \leq 0\}$ と置き、$\Delta^{re} := W(\Pi^{re})$ を real root の全体、$\Delta^{im} := \Delta \setminus \Delta^{re}$ を imaginary root の全体とする。

Definition 4.1. $w_1, w_2 \in W$, $\gamma \in \Delta^{re} \cap \Delta^+$ に対して、$w_1 = r_\gamma w_2$ (r_γ は γ の定める simple reflection) かつ $\ell(w_1) = \ell(w_2) + 1$ であるとき $w_1 \xleftarrow{\gamma} w_2$ と書き、又このような $\gamma \in \Delta^{re} \cap \Delta^+$ が存在するとき単に $w_1 \leftarrow w_2$ と書く。さらに、$w, w' \in W$ に対し、$w = w'$ 又は

$$w = w_0 \leftarrow w_1 \leftarrow \cdots \leftarrow w_r \leftarrow w_{r+1} = w'$$

なる $w_1, \cdots, w_r \in W$ が存在するとき、$w \leqslant w'$ と書く。

Definition 4.2. $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{S}$, $\alpha_j \in \Pi^{im}$ に対して、$\beta_1 = \beta_2 + \alpha_j$ なるとき $\beta_1 \overset{\alpha_j}{\leftarrow} \beta_2$ と書き、又このような $\alpha_j \in \Pi^{im}$ が存在するとき単に $\beta_1 \leftarrow \beta_2$ と書く。さらに、$\beta = \sum_{k \in K} \alpha_k$, $\beta' = \sum_{\ell \in L} \alpha_\ell \in \mathcal{S}$ に対して、$K \supset L$ であるとき $\beta \geqslant \beta'$ と書く。

Definition 4.3. $(w_1, \beta_1), (w_2, \beta_2) \in W \times \mathcal{S}$ に対して、

$$w_1 \leftarrow w_2 \text{ and } \beta_1 = \beta_2 \quad \text{又は} \quad w_1 = w_2 \text{ and } \beta_1 \leftarrow \beta_2$$

なるとき $(w_1, \beta_1) \curvearrowleft (w_2, \beta_2)$ と書く。

Remark 4.4. 各 $(w_1, \beta_1), (w_2, \beta_2) \in W \times \mathcal{S}$ に対して、

$$(w_1, \beta_1) \curvearrowleft (w, \beta) \curvearrowleft (w_2, \beta_2)$$

なる $(w, \beta) \in W \times \mathcal{S}$ の数は 0 か 2 である。

Proposition 4.5. $\Lambda \in P^+$, $w_1, w_2 \in W$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{S}(\Lambda)$ とする。このとき、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(A)}(V(w_1(\Lambda + \rho - \beta_1) - \rho), V(w_2(\Lambda + \rho - \beta_2) - \rho)) \leq 1.$$

Remark 4.6. 勝手な $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ について、$f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(A)}(V(\lambda), V(\mu))$ が non-zero であれば、f は injective である。そこで、このとき $V(\lambda) \subset V(\mu)$ と書く。

Proposition 4.7. $\Lambda \in P^+$, $w_1, w_2 \in W$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{S}(\Lambda)$ とする。このとき、

$$V(w_1(\Lambda + \rho - \beta_1) - \rho) \subset V(w_2(\Lambda + \rho - \beta_2) - \rho)$$

$$\Updownarrow$$

$$w_1 \leqslant w_2, \quad \beta_1 \geqslant \beta_2$$

$$\Updownarrow$$

$$[V(w_2(\Lambda + \rho - \beta_2) - \rho) : L(w_1(\Lambda + \rho - \beta_1) - \rho)] \neq 0.$$

ここで、$\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して、$[V(\lambda) : L(\mu)]$ は、$L(\mu)$ の $V(\lambda)$ における重複度を表す。

Definition 4.8. $\{(w_1, \beta_1), (w_2, \beta_2), (w_3, \beta_3), (w_4, \beta_4)\}$ なる $W \times \mathcal{S}$ の元から成る四つ組が "square" であるとは、

$$(w_1, \beta_1) \curvearrowleft (w_i, \beta_i) \curvearrowleft (w_4, \beta_4) \;\; (i = 2, 3), \quad (w_2, \beta_2) \neq (w_3, \beta_3)$$

なる事である。

Lemma 4.9. 各 curvearrow $(w_1,\beta_1) \curvearrowleft (w_2,\beta_2)$ に対して、$c((w_1,\beta_1),(w_2,\beta_2)) \in \{1,-1\}$ なる数を対応させて、如何なる "square" $\{(w_1,\beta_1),(w_2,\beta_2),(w_3,\beta_3),(w_4,\beta_4)\}$ についても、その4つの curvearrow に対応する数の積が -1 となる様にできる。

さて、Theorem 2.1 の resolution で $J=\emptyset$ の場合には、

$$C_p(\Lambda) = \sum_{\substack{w\in W,\beta\in\mathcal{S}(\Lambda)\\ \ell(w)+ht(\beta)=p}}^{\oplus} V(w(\Lambda+\rho-\beta)-\rho) \quad (p\geq 0)$$

であった。今、各 $(w_1,\beta_1),(w_2,\beta_2)\in W\times\mathcal{S}$ such that $w_1 \leqslant w_2$ and $\beta_1 \geqslant \beta_2$ に対して、

$$0 \neq \imath_{(w_1,\beta_1),(w_2,\beta_2)} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(A)}(V(w_1(\Lambda+\rho-\beta_1)-\rho), V(w_2(\Lambda+\rho-\beta_2)-\rho))$$

を "compatible" になる様に取り、固定する。このとき、次の Theorem が成り立つ。

Theorem 4.10. $\Lambda\in P^+$ とする。各 $p\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $d_p\colon C_p(\Lambda) \longrightarrow C_{p-1}(\Lambda)$ を次の様に定める。($d_0\colon V(\Lambda)\longrightarrow L(\Lambda)$ は 標準的商写像である。)

$$d_p := \sum_{\substack{\ell(w_1)+ht(\beta_1)=p\\ \ell(w_2)+ht(\beta_2)=p-1}} d^p_{(w_1,\beta_1),(w_2,\beta_2)}\ \imath_{(w_1,\beta_1),(w_2,\beta_2)},$$

$$\begin{aligned} \text{where}\quad & d^p_{(w_1,\beta_1),(w_2,\beta_2)} := c((w_1,\beta_1),(w_2,\beta_2)) \text{ if } (w_1,\beta_1) \curvearrowleft (w_2,\beta_2),\\ \text{and}\quad & d^p_{(w_1,\beta_1),(w_2,\beta_2)} := 0 \text{ otherwise.}\end{aligned}$$

このとき、次の sequence は exact であり、Theorem 2.1 に於ける exact sequence と equivalent である。

$$0 \longleftarrow L(\Lambda) \xleftarrow{d_0} C_0(\Lambda) \xleftarrow{d_1} C_1(\Lambda) \xleftarrow{d_2} C_2(\Lambda) \xleftarrow{d_3} \cdots,$$

$$\text{where } C_p(\Lambda) = \sum_{\substack{w\in W,\beta\in\mathcal{S}(\Lambda)\\ \ell(w)+ht(\beta)=p}}^{\oplus} V(w(\Lambda+\rho-\beta)-\rho) \quad (p\geq 0).$$

References

1. I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, and S. I. Gelfand, *Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$-modules*, in "Lie groups and their representations," Hilger, London, 1975, pp. 21–64.
2. R. Borcherds, *Generalized Kac-Moody algebras*, J. Algebra, **115** (1988), 501–512.
3. H. Garland and J. Lepowsky, *Lie algebra homology and the Macdonald-Kac formulas*, Invent. Math., **34** (1976), 37–76.
4. G. Hochschild and J.-P. Serre, *Cohomology of Lie algebras*, Ann. of Math., **57** (1953), 591–603.
5. V. G. Kac, "Infinite dimensional Lie algebras (3rd edition)," Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
6. S. Kumar, *A homology vanishing theorem for Kac-Moody algebras with coefficients in the category O*, J. Algebra, **102** (1986), 444–462.
7. S. Kumar, *Extension of the category O^g and a vanishing theorem for the Ext functor for Kac-Moody algebras*, J. Algebra, **108** (1987), 472–491.
8. A. Rocha-Caridi, *Splitting criteria for $\mathfrak{g}$-modules induced from a parabolic and the Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution of a finite dimensional, irreducible $\mathfrak{g}$-module*, Trans. Amer. Math. Soc., **262** (1980), 335–366.
9. A. Rocha-Caridi and N. R. Wallach, *Projective modules over graded Lie algebras. I*, Math. Z., **180** (1982), 151–177.