

## 回転球面上の 2 次元乱流

京大・理・地球物理 余田 成男 (YODEN Shigeo)

東大・院・数理科学 山田 道夫 (YAMADA Michio)

### 1. はじめに

大気・海洋中における不規則な大規模運動は、その極端な形状比および回転系での流体運動の特質より、2次元流体の乱流運動として記述・理解される側面を持っている。また、強い磁場中の電気伝導性流体の運動もやはり 2次元乱流によって近似される側面を持っており、このような多方面の要請から、2次元流体の乱流運動は近年非常に盛んに研究されるようになってきた。60年代から70年代にかけての研究は、コルモゴロフ流の次元解析などの現象論的なアプローチや、完結仮説を用いた乱流統計理論を中心とするもので、主として、エネルギースペクトルの形態を論じるものであった。エネルギーの逆カスケード現象やエネルギースペクトルの $-3$ 乗則は、この時代の研究の所産である。一方、70年代から急速に発達した計算機によって、このような理論的予想を数値実験によって確認しようとする努力が行なわれてきたが、この過程の中で発見された2次元乱流中での秩序渦 (coherent vortices) の形成現象は、孤立渦 (modon) の力学と深く関わり、現在も広範な研究がすすめられている。

一方、このような研究の流れと平行して、2次元乱流に対する回転の効果は多くの研究者の興味の対象となってきた。一様回転は回転ベクトルに直交する面内の2次元非圧縮性流体の運動に影響を与えないため、回転の効果は地球自転効果の緯度変化を線形近似したベータ平面の上で論じられることが多い。Rhines(1975)はベータ平面上での乱流数値実験を行ない、逆カスケードされたエネルギーが回転効果によりロスビー波に転化され、帯状の流れ場が形成されることを初めて報告した。一方、Williams(1978)は木星の大気運動を念頭において回転球面上での2次元乱流の数値実験を行ない、帯状構造の出現を報告している。しかし、当時の計算機事情から、彼の数値実験では流れの場に強い周期性と対称性が仮定さ

れていたため、得られた帯状構造が数値計算上の制約に起因している可能性を否定できない。また、Tang and Orszag(1978) は対称性を仮定せずに球面上の2次元乱流の数値実験を行ない、エンストロフィーの減衰が平面上の場合よりも穏やかであることなどを見出したが、最大波数32の三角切断を用いた計算であり、流れ場の詳細を調べるには至らなかった。球面上の2次元乱流の数値実験は Basdevant, Legras, Sadourny and Beland (1981) によっても行なわれ、さらに、Boer(1983) は統計的な諸量について運動学的解析を行ない、Boer and Shepherd(1983) は地球規模の観測データから波数10以上において慣性小領域の特徴を見出した。

本研究(Yoden and Yamada, 1992) では、回転球面上で自由減衰する2次元ナビエーストークス乱流の数値実験を行ない、球という幾何学的条件とその回転が2次元乱流に及ぼす効果を議論する。さらに、回転によって引き起こされる流れ場の大域的性質の変化を報告する。

## 2. 数値計算

回転球面上の非圧縮性2次元乱流は次の渦度方程式に支配される。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{a^2} J(\psi, \omega) + \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\nu \Delta^2 \omega. \quad (1)$$

ここで $\psi(\lambda, \mu, t)$  は流れ関数、 $\omega(\lambda, \mu, t)$  は渦度(=  $\Delta\psi$ )、 $\lambda$  は経度、 $\mu$  はサイン緯度、 $t$  は時刻、 $J$  はヤコビアン、 $\Delta$  はラプラシアン、 $a$  は球の半径、 $\Omega$  は回転角速度、 $\nu$  は超粘性係数である。非粘性の場合には、次の量が保存量となる。

- 運動エネルギー： $\frac{1}{2} \int |\nabla\psi|^2 dS$
- エンストロフィー： $\frac{1}{2} \int \omega^2 dS$
- 回転ベクトル方向の角運動量： $a \int u \cos \phi dS$
- カシミール保存量： $\int f(\omega + 2\Omega \sin \phi) dS$

ここで  $u$  は経度方向の流体速度,  $dS$  は球上の面積要素,  $\phi$  は緯度,  $\nabla$  は勾配演算子,  $f(\cdot)$  は任意関数である.

数値計算は  $a = 1$  とする無次元形で行なった. 計算に用いた値は  $\nu = 10^{-6}$ ,  $\Omega = 0, 25, 50, 100, 200, 400$  である. 初期条件は, エネルギースペクトルが  $E(n, t = 0) = Cn^5 \exp(-n/2)$  ( $C$  は定数で運動エネルギーが 1 となるように決める) となるものを用いた. 乱数を用いて初期の流れ場が一様等方になるようにしている. 数値積分は, 倍精度計算で, 球面調和関数を基底とする擬スペクトル法を用い, エイリアジング誤差を避けるために 256(経度方向)  $\times$  128(緯度方向) のスペクトル変換に対して打ち切り波数が 85 の三角切断を行なった.

この研究では, 結果の一般性を重視して, 多くの初期条件に対する数値結果を平均して得られる回転球面上の 2 次元乱流場の性質を調べる. そのため, できるだけ多くの初期条件を用いることが必要であるが, 数値計算上の制約から, 能率の良い初期条件の組を選ぶことが望ましい. そこでここでは, まず 6 つの初期条件  $\psi(\lambda, \mu, t = 0)$  を乱数で生成した後, その各々について更に,

$$\begin{aligned} & -\psi(\lambda, \mu, t = 0), \\ \psi(-\lambda, \mu, t = 0), & \quad -\psi(-\lambda, \mu, t = 0), \\ \psi(\lambda, -\mu, t = 0), & \quad -\psi(\lambda, -\mu, t = 0), \\ \psi(-\lambda, -\mu, t = 0), & \quad -\psi(-\lambda, -\mu, t = 0) \end{aligned}$$

の 7 つの場を別の初期条件として採用した. 従って初期条件の数は計 48 個である. 但し,  $\psi(\lambda, \mu, t)$  が渦度方程式 (1) の解ならば  $-\psi(\lambda, -\mu, t)$  もやはり解であるから, 実際に数値実験が必要なのは 24 個であり, 残りの 24 個の解は変数変換によって得ることができる.

### 3. 数値結果

まず, 回転がない場合 ( $\Omega = 0$ ) について, 渦度場の時間発展の一例を第 1 図に示す. 時間

発展するにつれて、渦領域の伸長が生じ、その後次第に整った形の渦が形成されて融合を繰り返し、やがて場は小数の渦に支配された状態に至る。これは、平面上の場合と定性的に全く同じである。第2図は、流れ場のエネルギー (a) およびエンストロフィー (b) の時間変化を示す。エネルギーは回転角速度によらず時間的にはほぼ一定値を保つのにに対し、エンストロフィーは回転角速度の小さいほど減衰が早い。これは、エンストロフィーの高波数へのカスケードが回転の効果によって抑えられていることを示唆している。第3図は、回転がない場合のエネルギースペクトルの時間変化 (a) と、さまざまな回転角速度での  $t = 5$  におけるエネルギースペクトル (b) を示したものである。回転がない場合、エネルギースペクトルのべきが  $-4(t = 1)$  から  $-6(t = 5)$  に変化しているのが観察される。一方、回転効果が加わった場合には、エネルギーの逆カスケードによるスペクトルピークの低波数への移動が抑えられており、その結果、回転角速度が大きい場合ほど、高波数側のスペクトルの傾きが急になっている。

第4図は、 $\Omega = 100$  の場合について、 $t = 0, 2.5, 5$  の各々の時刻において経度平均された角運動量の緯度分布を全48ケースについて示したものである。個々の結果の緯度分布は南北対称になっていないが、初期条件の組が持つ対称性から、全体として南北対称のアンサンブルとなっている。これらの分布を平均したものが第5図 (a) である。すべての緯度で初期の角運動量はゼロであるにもかかわらず、時間発展とともに、高緯度域に強い西向きジェットが、また中低緯度域に比較的弱い東向きの流れが発生することが分かる。第5図 (b) は、このように発生した帯状平均流の回転角速度依存性を示している。このような流れの発生は、回転角速度が小さい場合には見られないが、回転角速度が大きくなるにつれて顕著となる。特に西向きジェットの位置に関しては、回転角速度の増加と共に、高緯度側に移る傾向が見られる。このような回転効果を流れ場のパターンとして観察するため、同一の初期条件から出発した場の  $t = 5$  における流れ関数を第6図に示す。大きな回転角速度の場合には極

域に西向き周極流が現れていること、また、回転角速度の増加につれて周極流が極域に集中することが分かるが、このような傾向は他の初期条件の場合においても同様に観察される。第5図で見られる西向きジェットはこの周極流に対応している。

#### 4. おわりに

数値実験で得られた統計量やスペクトルの時間変化は、系の回転がエネルギーの逆カスケードを抑止する効果を持つことを示している。このような効果の原因は、回転効果のため各波数モードが振動(すなわちロスビー波動)するためであろう。このような振動により非線形項の符号が時間的に変化し、その結果、非線形項の長時間効果が弱められることになる。このためモード間のエネルギーのやりとりが弱まり、エネルギーのカスケード現象が抑止されると考えられる。エンストロフィーの高波数方向へのカスケードは、保存則を通してエネルギーの逆カスケードと密接に結びついているため、回転によってやはり抑止されることになる。エンストロフィーの減衰率が回転により減少するのはこの現れであると考えられる。

エネルギースペクトルの形状、特にべき指数に関して、ここで行なった数値実験の結果は、回転がない場合のエネルギースペクトルのべき $-4$ に近いことを示唆している。これは、平面2次元乱流に関する従来の多くの数値結果が $-3$ と $-4$ の間の値を与えていることと矛盾しない。但し、ここでの数値実験は大きなアンサンブルをとることを目指したため、モード数はあまり大きくない。そのためスペクトルのべき則について明確な結論を得るにはより大きなモード数の数値実験が必要である。

回転角速度の増加と共に、極域に強い周極流が現れ、中低緯度域には弱い一様な東向きの平均流が生じる。これは回転球面上の2次元乱流における帯状角運動量再配分過程であり、回転球面であることの空間的非一様性がもたらす効果である。従ってこの効果はベータ面では実現されない。この数値実験の範囲では、この再配分の機構を同定することは困難であ

る。しかし、乱れ(波動)の中からの平均流の出現という現象は、“ロスビー波による低緯度域から高緯度域への角運動量輸送”というシナリオを示唆しており、現在、このような観点からのデータ解析・追加実験が進行中である。

### 参考文献

- Basdevant, C., B. Legras, R. Sadourny and M. Beland, 1981: A study of barotropic model flows: Intermittency, waves and predictability. *J. Atmos. Sci.*, **38**, 2305–2326.
- Boer, G.J., 1983: Homogeneous and isotropic turbulence on the sphere. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 154–163.
- and T.G. Shepherd, 1983: Large-scale two-dimensional turbulence in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 164–184.
- Rhines, P.B., 1975: Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.*, **69**, 417–443.
- Tang, C-M. and S.A. Orszag, 1978: Two-dimensional turbulence on the surface of a sphere. *J. Fluid Mech.*, **87**, 305–319.
- Williams, G.P., 1978: Planetary circulations: 1. Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1399–1426.
- Yoden, S. and M. Yamada, 1992: A numerical experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere. *J. Atmos. Sci.*, **49**, in press.

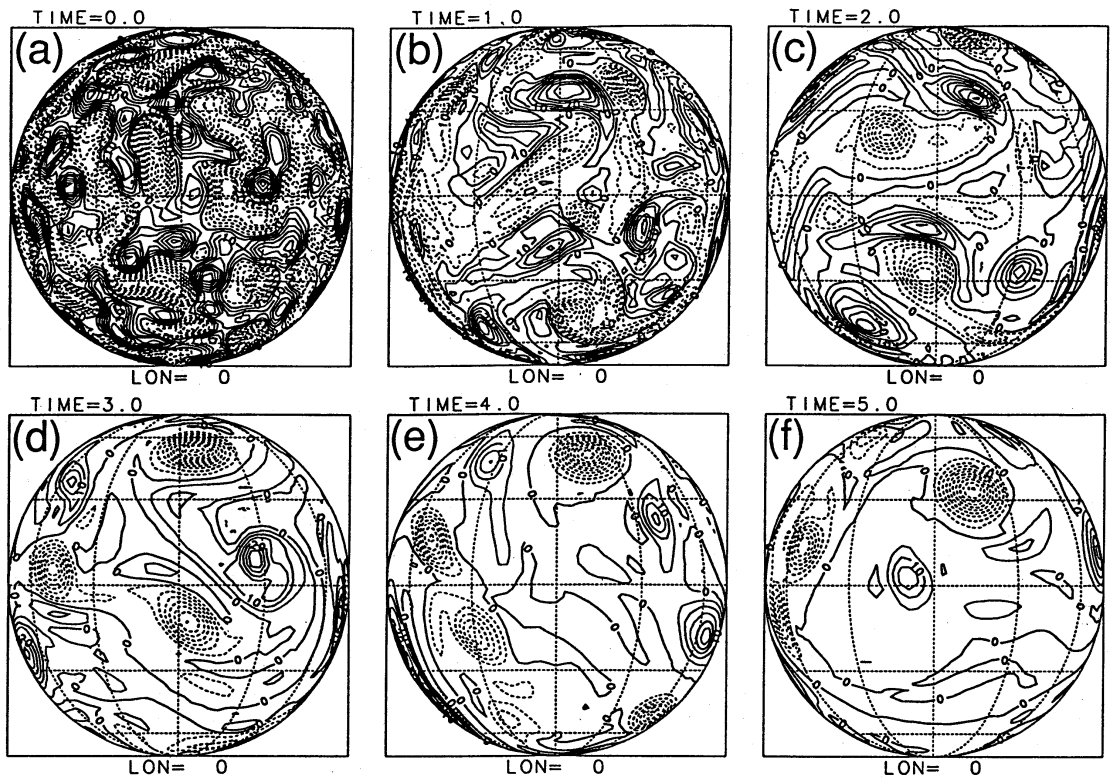


図 1: 回転がない場合の渦度場の時間発展. 緯経線は  $30^\circ$  毎.

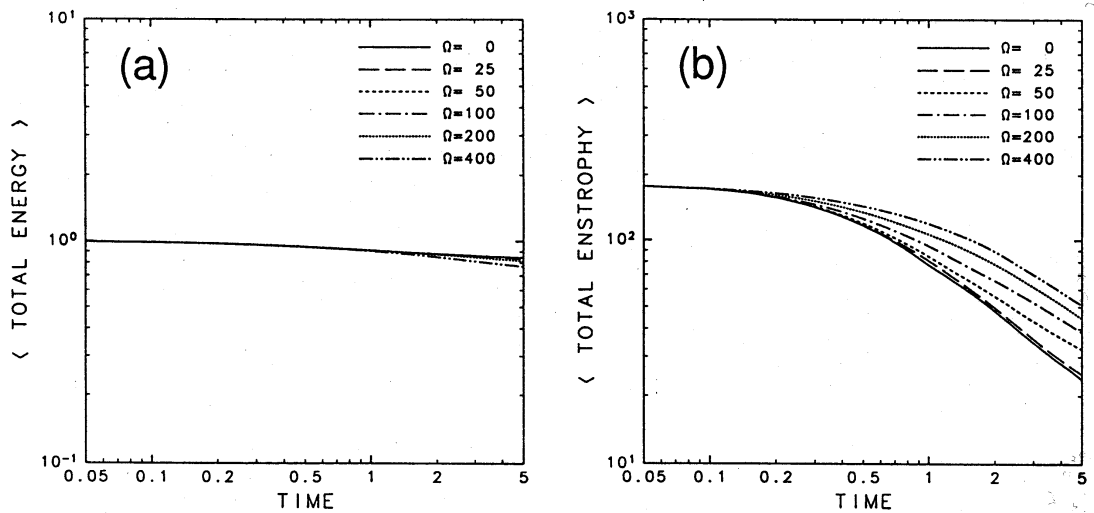


図 2: (a) エネルギーの時間変化. (b) エンストロフィーの時間変化. 48 ケースのアンサンブル平均.

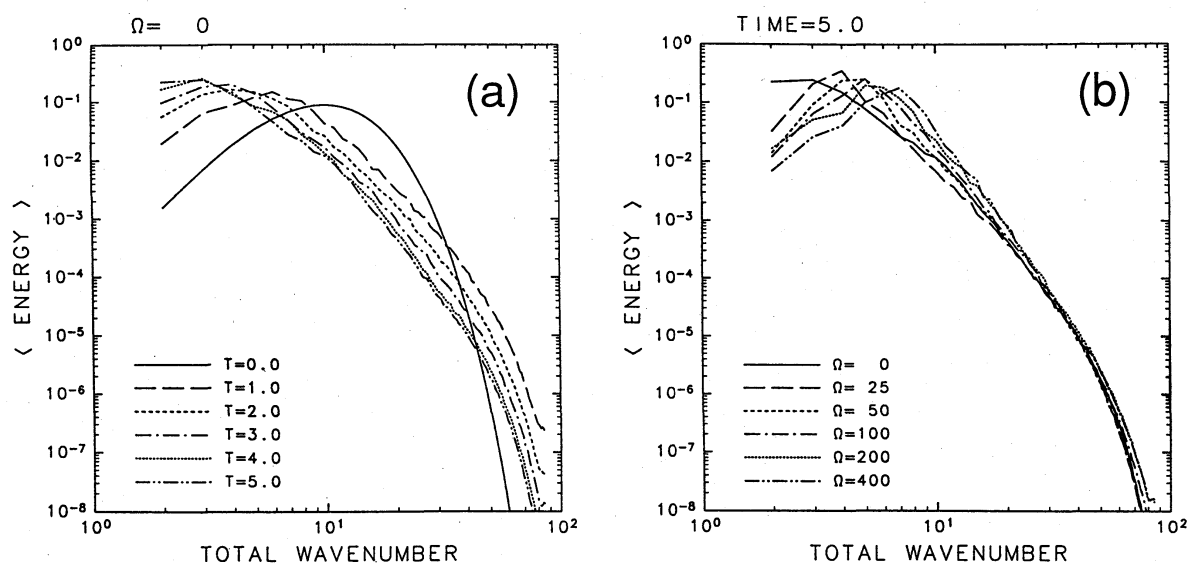


図 3: (a) 回転がない場合のエネルギースペクトルの時間発展. (b)  $t = 5$  におけるエネルギースペクトルの回転角速度依存性. 48 ケースのアンサンブル平均.

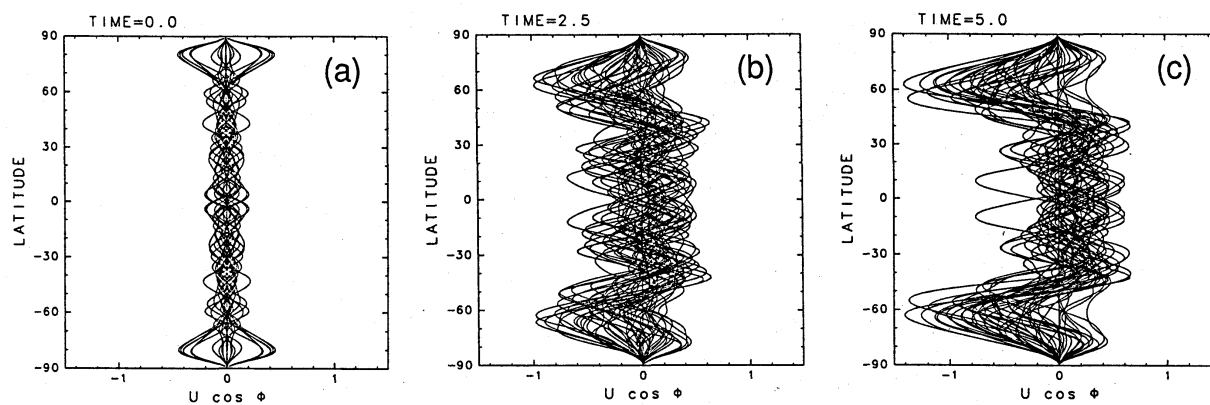


図 4:  $\Omega = 100$  の場合の帯状平均角運動量の緯度分布.  $t = 0$ (a), 2.5(b), 5(c). 48 ケースすべてをプロット.



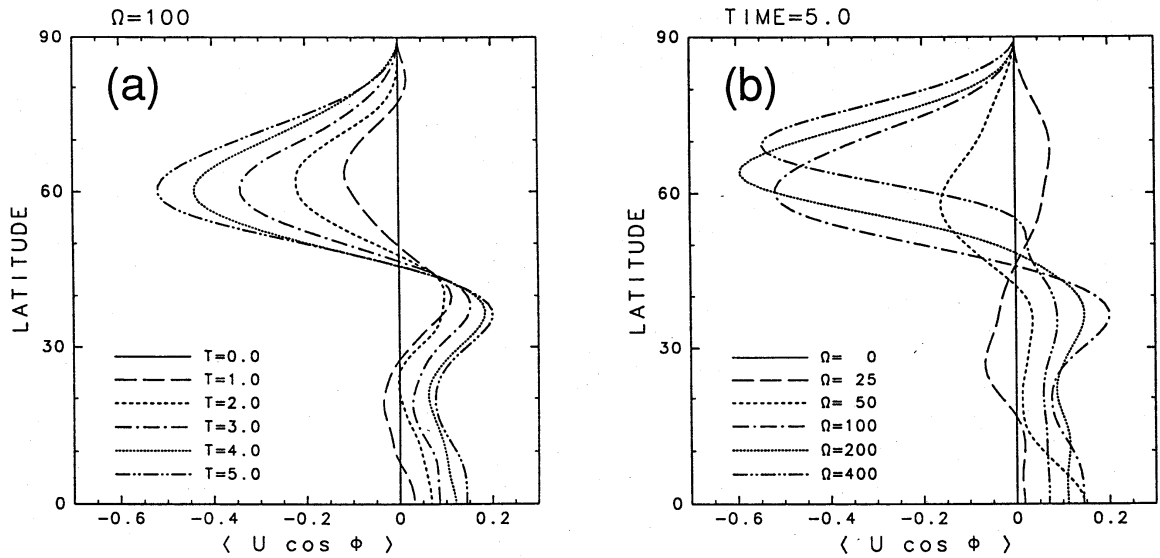


図 5: (a)  $\Omega = 100$  の場合の帯状平均角運動量の時間発展. (b)  $t = 5$  における帯状平均角運動量の回転角速度依存性. 48 ケースのアンサンブル平均.

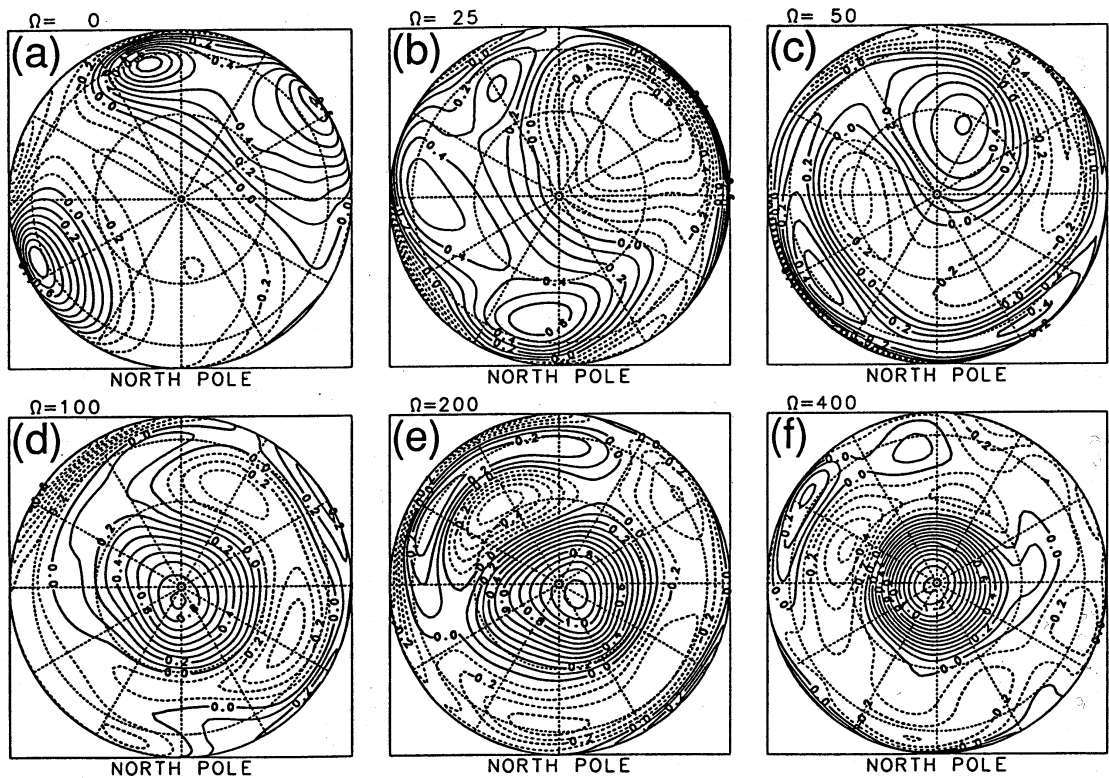


図 6: 同一の初期値から発展した流れ関数場 ( $t = 5$ ).  $\Omega = 0$ (a), 25(b), 50(c), 100(d), 200(e), 400(f). 極を中心にプロット.