数理解析研究所講究録
第 818 巻 1993 年 131-133

Verbal Topology of a Group

九州歯科大学　　田中　克己 (Katsumi Tanaka)

安定群の重要な例である代数群の理論では, ザリスキー位相が重要な役割を果たす. これはモデル理論の言葉で言えば, 基礎にある体の言語での formula による定義可能な集合を閉集合としている. しかし, 一般に群の構造について議論するときには, やはりその群の性質を記述する言語を使って考えるのが自然であろう.

I.Kaplansky は [2] で一般の群の上にザリスキー位相を一般化した次のような位相を定義した. 群 G に T_1-位相が入り, 閉集合について極小条件をみたし, かつ次の 3 種類の G から G への写像が連続となるとき, 群 G を Z-群という:$g \mapsto g^{-1}$, $g \mapsto ga$, $g \mapsto ag$, $\forall a \in G$.

また, 群 G に T_1-位相が入り, 上の 3 種類の写像に加え写像 $g \mapsto g^{-1}ag$, $\forall a \in G$ も連続のとき, 群 G を C-群という. さらに, 同じ位相のもとで, G が C-群かつ Z-群となるとき, G を CZ-群という. R.M.Bryant[1] は, 群 G の上に次のように閉集合を定めてやることにより, G に verbal topology と呼ばれる位相を定義した. atomic formula により G で定義可能な集合をこの位相の閉部分基とする, ここで定義可能集合とは, ある formula $\varphi(x, \bar{y})$ と G からのパラメーター $\bar{a}$ にたいして, つぎの形の集合とする:

$$\{g \in G \mid G \models \varphi(g, \bar{a})\}$$

すると, 任意の閉集合は atomic formula の finite disjunction による定義可能集合の無限個の intersection となる.

1 点の集合 $\{a\}$ は G の閉集合になる. これは $x = a$ なる atomic formula で定義可能. G の任意の部分集合 A にたいし, A の中心化群は閉集合, なぜなら,

$$\bigwedge_{a \in A} xa = ax$$

という atomic formula による定義可能集合の intersection として表される. この場合, 任意の閉集合が定義可能になるとは限らない. なぜならこの intersection の個数は無限になるかもしれない.

t を term, φ を atomic formula とするとき$\varphi(t(g))$ も atomic formula になるから, G から G への写像 $g \mapsto t(g)$ は連続となる. G の任意の元 a にたいして, 写像 $g \mapsto g^{-1}$, $g \mapsto ga$, $g \mapsto ag$, $g \mapsto g^{-1}ag$は連続となり, G は C-群となる.

例. 代数群はザリスキー位相について CZ-群になる.

定理 (Bryant). 群 G はその verbal topology において閉部分集合について極小条件をみたせば CZ-群になる.

例. 線形群, 局所有限な abelian-by-nilpotent-by-finite groups, abelian-by-finite-groups は verbal topology について極小条件をみたすので, みな CZ-群となる.

Fact. ω-安定群は定義可能な部分群についての極小条件をみたす.

安定群は uniform に定義可能な部分群の intersection についての極小条件をみたす.

定義. $\mathcal{F} = \{aHb \mid H = \langle 1 \rangle or C_G(c), a, b, c \in G\}$ を閉集合についての部分基として与えられる位相を M_C-位相という.

定理. 安定群は M_C-位相について Z-群になる.

この定理の証明には次の 2 つの補題から導かれる.

補題 1. $\mathcal{F}$の元 aHb は, 他の H^*の coset に等しい.
証明. $H = C_G(c)$ のとき,

$$aHb = abb^{-1}Hb = ab(b^{-1}Hb) = abH^b = abC_G(b^{-1}cb).$$

$H = \langle 1 \rangle$ のとき, $aHb = ab\langle 1 \rangle$ □

補題 2. $\mathcal{F}$は極小条件をみたす.
証明. $\mathcal{F}_0 = \{H \mid H = \langle 1 \rangle or C_G(c), c \in G\}$ とするとき, Fact より, $\mathcal{F}_0$は極小条件をみたすので, $\mathcal{F}$も極小条件をみたす.

ω-安定群については, もっと強い位相について Z-群になる.

定義. $\mathcal{S} = \{aHb \mid H$は定義可能な群$, a.b \in G\}$ を閉集合についての部分基として与えられる位相をω安定-位相という.

定理. ω-安定群はω安定-位相について Z-群になる.

このことから, ω-安定群における connected という概念が本来のトポロジーの意味の connected と一致する. 以上のことから, 次のことがわかる.

命題 1. 安定群 G の M_C-位相における任意の open dense subset Uについて, $G = UU$となる.

命題 2. G を安定群とすると, その M_C-位相について, 1 を含む G の component$C$は, G の正規部分群となり, G の中で指数有限となる. このとき Cを G° とあらわす.

命題 3. G を安定群とすると, その M_C-位相について G の既約分解は G°の coset への分解ただ 1 とおりとなる.
証明. いま G の既約分解を $G = S_1 \cup \cdots \cup S_n$ とするとき,
step 1. S's は disjoint.
step 2. 1 を含む成分 S_1は群になる.

最後にまだ open の問題を 1 つあげておく.

問題. 任意のω-安定群を CZ-群とするような位相の入れ方があるか.

参考文献

[1] R.M.Bryant. The verbal topology of a group, *Journal of Algebra* 48,340-346(1977).

[2] I.Kaplansky. *An Introduction to Differential Algebra.* Hermann, Paris, 1957.