数理解析研究所講究録
第 820 巻 1993 年 102-111

Cyclic Orthogonal and Balanced Arrays

筑波大・社工　藤原 良 (Ryoh Fuji-Hara)

大阪女大・学芸　栗木 進二 (Shinji Kuriki)

1．序

要素が $S=\{0,1,\cdots,s-1\}$ のいずれかである $n\times m$ 行列 T が次の条件を満たすとき、T を強さ 2 の balanced array といい、$BA(n,m,s,2)$ と表す。

(i) T の任意の 2 列からなる部分行列 T_0 において、あらゆる $i,j\in S$ に対して、(i,j) が T_0 の行としてちょうど $\mu_{i,j}$ 回現れる。

(ii) あらゆる $i,j\in S$ に対して、$\mu_{i,j}=\mu_{j,i}$ 。

S の要素をシンボルという。すべての $i,j\in S$ に対して、$\mu_{i,j}=\mu$ であるとき、T を orthogonal array といい、$OA(n,m,s,2)$ と表す。ここで、$n=\mu s^2$ である。

BA, OA の存在性、構成法、分類について、多くの研究があり、たとえば、Addelman and Kempthorne [1], Bose and Bush [2], Bush [3], Seiden [8], Seiden and Zemach [9], Chakravarti [4], Rafter and Seiden [7], Srivastava [10], Srivastava and Chopra [11], Yamamoto, Namikawa and Fujii [12] などを参照されたい。

T の任意の行 $(t_1, t_2, \cdots, t_m)$ について、$(t_m, t_1, \cdots, t_{m-1})$ もまた T の行であるとき、T は cyclic であるという。本稿での目的は cyclic BA, cyclic OA を構成することである。

例 1.1 次の 52×13 行列は cyclic $BA(52, 13, 3, 2)$ で、$\mu_{0,0} = 14$, $\mu_{0,1} = \mu_{0,2} = 7$, $\mu_{1,1} = \mu_{2,2} = 2$, $\mu_{1,2} = 3$ である。

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c}
0121022001000 & 0010211000202 & 0000100220121 & 0202000112010 \\
0012102200100 & 2001021100020 & 1000010022012 & 0020200011201 \\
0001210220010 & 0200102110002 & 2100001002201 & 1002020001120 \\
0000121022001 & 2020010211000 & 1210000100220 & 0100202000112 \\
1000012102200 & 0202001021100 & 0121000010022 & 2010020200011 \\
0100001210220 & 0020200102110 & 2012100001002 & 1201002020001 \\
0010000121022 & 0002020010211 & 2201210000100 & 1120100202000 \\
2001000012102 & 1000202001021 & 0220121000010 & 0112010020200 \\
2200100001210 & 1100020200102 & 0022012100001 & 0011201002020 \\
0220010000121 & 2110002020010 & 1002201210000 & 0001120100202 \\
1022001000012 & 0211000202001 & 0100220121000 & 2000112010020 \\
2102200100001 & 1021100020200 & 0010022012100 & 0200011201002 \\
1210220010000 & 0102110002020 & 0001002201210 & 2020001120100
\end{array}\right]
$$

2. cyclic (r, λ)-design with MBN と nested 差集合

V を要素が v 個の集合とし、$\mathcal{B}$ を V の部分集合の集まりとする。V の要素を点、$\mathcal{B}$ の要素をブロックといい、$(V, \mathcal{B})$ をデザインという。また、Z_v を v を法とする加群とし、$V = Z_v$ であるデザイン $(V, \mathcal{B})$ において、$\mathcal{B}$ の任意のブロック $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ に対して、$\{a_1 + 1, a_2 + 1, \cdots, a_k + 1\} \pmod v$ もまた $\mathcal{B}$ のブロックであるとき、$(V, \mathcal{B})$ は cyclic であるという。

デザイン $(V, \mathcal{B})$ が次の条件を満たすとき、$(V, \mathcal{B})$ を (r, λ)-design という。

(i) あらゆる点はちょうど r 個のブロックに現れる。

(ii) 異なる２つの点のあらゆる組はちょうど λ 個のブロックに現れる。

(r,λ)-design $(V,\mathcal{B})$ の存在性と $BA(b,v,2,2)$ の存在性とは同値であることがよく知られており、そのことから、次の結果が得られる。

定理 2.1 cyclic (r,λ)-design $(V,\mathcal{B})$ の存在性と $\mu_{1,1}=\lambda$, $\mu_{0,1}=r-\lambda$, $\mu_{0,0}=b-2r+\lambda$ である cyclic $BA(b,v,2,2)$ の存在性とは同値である。ここで、$v=|V|$, $b=|\mathcal{B}|$ である。

定理 2.2 cyclic (r,λ)-design $(V,\mathcal{B})$ において、$2\lambda \le r$, $b \le 3r-2\lambda$ ならば、$\mu=r-\lambda$ である cyclic $OA(b,v,2,2)$ が存在する。ここで、$v=|V|$, $b=|\mathcal{B}|$ である。

s (≥ 3) シンボルの balanced array を構成するために、Kuriki and Fuji-Hara [6], Fuji-Hara and Kuriki [5] は (r,λ)-design with MBN を考え、そのようなデザインが $BA(n,m,s,2)$ と同値であることを示した。

$(V,\mathcal{B})$ を (r,λ)-design とし、$\mathcal{B}$ のブロック B が g 個のサブブロック $B_1,B_2,\cdots,B_g$（それらのうちのいくつかは空でもよい）に分割されているものとする。i 番目のサブブロック B_i の集まりを $\mathcal{B}_i$ とし、$\Pi=\{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\cdots,\mathcal{B}_g\}$ とする。(r,λ)-design with mutually balanced nested subdesigns（略して、(r,λ)-design with MBN ）とは次の条件を満たす $(V,\mathcal{B},\Pi)$ のことである。

(i) $(V,\mathcal{B}_i)$ は (r_i,λ_i)-design である $(i=1,2,\cdots,g)$ 。

(ii) V の異なる 2 つの点 x, y に対して、x を i 番目のサブブロック、y を j 番目のサブブロックに含む $\mathcal{B}$ のブロック B の個数は $\lambda_{i,j}$ である。

ここで、$\lambda_{i,j} = \lambda_{j,i}$, $\lambda_i = \lambda_{i,i}$ であり、

$$r = \sum_{i=1}^{g} r_i\ , \quad \lambda = \sum_{i=1}^{g} \lambda_i + 2 \sum_{1 \le i < j \le g} \lambda_{i,j}$$

が成り立つ。

定理 2.3 cyclic (r, λ)-design $(V, \mathcal{B}, \Pi)$ with MBN の存在性と

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} \lambda_{i,j}, & i \neq j, \quad i,j \neq 0 \quad \text{のとき、} \\ \lambda_i, & i = j \neq 0 \quad \text{のとき、} \\ r_i - \sum_{j'=1}^{s-1} \lambda_{i,j'}, & i \neq 0, j = 0 \quad \text{のとき、} \\ b - 2r + \lambda, & i = j = 0 \quad \text{のとき、} \end{cases}$$

である cyclic $BA(b, v, s, 2)$ の存在性とは同値である。ここで、$v = |V|$, $b = |\mathcal{B}|$, $s = |\Pi| + 1$ である。

証明 cyclic (r, λ)-design $(V, \mathcal{B}, \Pi)$ with MBN に対して、

$$t_{x,u} = \begin{cases} i, & V\text{の点 } x \text{ が } \mathcal{B} \text{の } u \text{ 番目のブロックの} \\ & i \text{ 番目のサブブロックに現れるとき、} \\ 0, & \text{そうでないとき、} \end{cases}$$

である $v \times b$ 行列 $T = [t_{x,u}]$ を考える。そのとき、T が cyclic $BA(b, v, s, 2)$ であることは容易に示されるであろう。また、逆も同様である。 □

cyclic (r, λ)-design with MBN を差集合の言葉で表現しよう。Z_v の部分集合 D が

$$D \ominus D = \lambda(Z_v - \{0\})$$

を満たすとき、D を出現数 λ の差集合という。ここで、$D \ominus D = \{d - d' \pmod v\ |(d,d') \in D \times D, d \neq d'\}$ である。また、Z_v の部分集合 $D^{(1)}, D^{(2)}, \cdots, D^{(e)}$ が

$$\bigcup_{h=1}^{e}(D^{(h)} \ominus D^{(h)}) = \lambda(Z_v - \{0\})$$

を満たすとき、$\{D^{(1)}, D^{(2)}, \cdots, D^{(e)}\}$ を出現数 λ の差集合族という。

Z_v の互いに素な部分集合 $D_1, D_2, \cdots, D_g$ が次の条件を満たすとき、$(D_1, D_2, \cdots, D_g)$ を nested 差集合という。

(i) D_i は出現数 λ_i の差集合である $(i = 1, 2, \cdots, g)$ 。

(ii) $D_i, D_j\ (1 \leq i < j \leq g)$ に対して、

$$D_i \ominus D_j = \lambda_{i,j}(Z_v - \{0\})$$

が成り立つ。

ここで、$D_i \ominus D_j = \{d - d' \pmod v\ |(d,d') \in D_i \times D_j\}$ である。次に、nested 差集合族を考えよう。Z_v の部分集合 $D_i^{(h)}\ (1 \leq h \leq e, 1 \leq i \leq g)$ について、

$$\begin{aligned} D = \{ \quad & (D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, \cdots, D_g^{(1)}), \\ & (D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, \cdots, D_g^{(2)}), \\ & \qquad \vdots \\ & (D_1^{(e)}, D_2^{(e)}, \cdots, D_g^{(e)}) \quad \} \end{aligned}$$

とし、$D_1^{(h)}, D_2^{(h)}, \cdots, D_g^{(h)}$ は互いに素であるとする。次の条件を満たすとき、D を nested 差集合族という。

(i) $\{D_i^{(1)}, D_i^{(2)}, \cdots, D_i^{(e)}\}$ は出現数 λ_i の差集合族である $(i = 1, 2, \cdots, g)$ 。

(ii) D_i, D_j $(1 \leq i < j \leq g)$ に対して、

$$\bigcup_{h=1}^{e} (D_i^{(h)} \ominus D_j^{(h)}) = \lambda_{i,j}(Z_v - \{0\})$$

が成り立つ。

定理 2.4　もし nested 差集合族が存在するならば、cyclic (r,λ)-design $(V, \mathcal{B}, \Pi)$ with MBN が存在する。ここで、$r_i = \sum_{h=1}^{e} |D_i^{(h)}|$ $(i = 1, 2, \cdots, g)$ である。

3．存在性と構成法

ここでは、nested 差集合をとおして cyclic BA, cyclic OA の存在性と構成法を考える。v を素数とし、$v - 1 = pf$ とする。Z_v の原始元を α に対して、$H_u^p = \{\alpha^d | d \equiv u \pmod p\}$ とし、$C_p = \{c_0, c_1, \cdots, c_{p-1}\}$, $c_u \in H_u^p$ とする。C_p の互いに素な部分集合 $L_1, L_2, \cdots, L_g$ に対して、

$$D = \{ \ (\ c(L_1 \circ H_0^p), c(L_2 \circ H_0^p), \cdots, c(L_g \circ H_0^p) \ ) \mid c \in C_p \ \}$$

は nested 差集合族である。ここで、$W \circ W' = \{ww' | w \in W, w' \in W'\}$ である。$\ell_i = |L_i|$ $(i = 1, 2, \cdots, g)$ とするとき、次の定理が得られる。

定理 3.1　$v = pf + 1$ が素数で、$\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_g \leq p$ のとき、

$$r_i = pf\ell_i, \quad \lambda_i = \ell_i(f\ell_i - 1), \quad \lambda_{i,j} = f\ell_i\ell_j \quad (1 \leq i < j \leq g)$$

である nested 差集合族が存在する。

例 3.1 $p=4,\ f=3,\ v=13,\ \ell_1=\ell_2=1,\ g=2$ のとき、Z_{13} の原始元 2 に対して、

$$Z_{13}=\{\begin{array}{cccc} 0, & 1, & 3, & 9, \\ & 2, & 6, & 5, \\ & 4, & 12, & 10, \\ & 8, & 11, & 7 \end{array}\}$$

で、$C_4=\{1,2,4,8\}$ として、

$$H_0^4=\{1,3,9\},\quad H_1^4=\{2,6,5\},\quad H_2^4=\{4,12,10\},\quad H_3^4=\{8,11,7\}$$

である。$L_1=\{1\}$, $L_2=\{2\}$ とする。

nested 差集合族 D :

1	3	9	2	6	5
2	6	5	4	12	10
4	12	10	8	11	7
8	11	7	1	3	9

対称差：

0	2	8	1	5	4
11	0	6	12	3	2
5	7	0	6	10	9
12	1	7	0	4	3
8	10	3	9	0	12
9	11	4	10	1	0
0	4	3	2	10	8
9	0	12	11	6	4
10	1	0	12	7	5
11	2	1	0	8	6
3	7	6	5	0	11
5	9	8	7	2	0

0	8	6	4	7	3
5	0	11	9	12	8
7	2	0	11	1	10
9	4	2	0	3	12
6	1	12	10	0	9
10	5	3	1	4	0
0	3	12	6	8	1
10	0	9	3	5	11
1	4	0	7	9	2
7	10	6	0	2	8
5	8	4	11	0	6
12	2	11	5	7	0

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_{1,2}=3.$$

定理 3.1 を定理 2.3 と 2.4 に適用することによって、cyclic BA, cyclic OA が構成される。

定理 3.2　$v = pf + 1$ が素数で、$\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{s-1} \leq p$ のとき、cyclic $BA(pv, v, s, 2)$

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} f\ell_i\ell_j, & i \neq j, \quad i, j \neq 0 \quad \text{のとき、} \\ \ell_i(f\ell_i - 1), & i = j \neq 0 \quad \text{のとき、} \\ \ell_i\{f(p-\ell)+1\}, & i \neq 0, j = 0 \quad \text{のとき、} \\ (p-\ell)\{f(p-\ell)+1\}, & i = j = 0 \quad \text{のとき、} \end{cases}$$

が存在する。ここで、$\ell = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{s-1}$ である。

例 3.1 に対応する balanced array が例 1.1 で与えられている。

$n = v$ である 1 サイクルの cyclic BA である T に $(a, a, \cdots, a)$, $a \in S$ である行をいくつか加えることによって cyclic OA になるとき、T を準対称 cyclic OA という。

定理 3.3　$s \geq 3$ のとき、s シンボルの準対称 cyclic OA は存在しない。

証明　1 サイクルの cyclic BA を T とする。T に対応する cyclic (r, λ)-design $(V, \mathcal{B}, \Pi)$ with MBN において、それぞれのサブブロックのサイズは一定であり、それを k_i $(i = 1, 2, \cdots, s-1)$ とする。この $(V, \mathcal{B}, \Pi)$ はある nested 差集合から構成され、

$$r_i = k_i, \quad \lambda_i(v-1) = k_i(k_i - 1), \quad \lambda_{i,j}(v-1) = k_ik_j, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, s-1, \ i \neq j)$$

が成り立つ。また、定理 2.3 から、T において、

$$\mu_{i,0} = r_i - \sum_{j'=1}^{s-1} \lambda_{i,j'}, \quad \mu_{i,j} = \lambda_{i,j}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, s-1, \ i \neq j)$$

が成り立つ。T が準対称 cyclic OA であるとき、$\mu_{i,j} = \lambda_{i,j} = \dfrac{k_ik_j}{v-1}$ は i と j に依存しないので、k_i も i に依存しない。したがって、λ_i も i に依存しない。ここで、$k_i = k^*, \lambda_i = \lambda^*$ とする。$\mu_{i,0} = \mu_{i,j}$ であるので、

$$k_i - \sum_{j \neq i} \frac{k_ik_j}{v-1} - \frac{k_i(k_i-1)}{v-1} = \frac{k_ik_j}{v-1}$$

であるが、k^* を用いて表すと、$v = sk^*$ が得られる。したがって、

$$\lambda^*(sk^* - 1) = k^*(k^* - 1)$$

つまり、

$$\lambda^* \equiv 0 \pmod{k^*}$$

が成り立つ。$\lambda^* = \beta k^*$ とすると、

$$\beta(sk^* - 1) = k^* - 1$$

であるが、このような β を取ることはできない。 □

References

[1] Addelman S. and Kempthorne O., Some main-effect plans and orthogonal arrays of strength two, Ann. Math. Statist. 32 (1961) 1167-1176.

[2] Bose R.C. and Bush K.A., Orthogonal arrays of strength two and three, Ann. Math. Statist. 23 (1952) 508-524.

[3] Bush K.A., Orthogonal arrays of index unity, Ann. Math. Statist. 23 (1952) 426-434.

[4] Chakravarti I.M., On some methods of construction of partially balanced arrays, Ann. Math. Statist. 32 (1961) 1181-1185.

[5] Fuji-Hara R. and Kuriki S., Mutually balanced nested designs, Discrete Math. 97 (1991) 167-176.

[6] Kuriki S. and Fuji-Hara R., Balanced arrays of strength two and nested (r, λ)-designs, submitted for publication.

[7] Rafter J.A. and Seiden E., Contributions to the theory and construction of balanced arrays, Ann. Statist. 2 (1974) 1256-1273.

[8] Seiden E., On the problem of construction of orthogonal arrays, Ann. Math. Statist. 25 (1954) 151-156.

[9] Seiden E. and Zemach R., On orthogonal arrays, Ann. Math. Statist. 37 (1966) 1355-1370.

[10] Srivastava J.N., Some general existence conditions for balanced arrays of strength t and 2 symbols, J. Combin. Theory (A) 13 (1972) 198-206.

[11] Srivastava J.N. and Chopra D.V., Balanced arrays and orthogonal arrays, "A Survey of Combinatorial Theory" (J.N. Srivastava et al., Eds.) (1973) 411-428.

[12] Yamamoto S., Namikawa T. and Fujii Y., Classification of two-symbol orthogonal arrays of strength t, $t + 3$ constraints and index 4, TRU Math. 24 (1988) 167-184.