

フォンノイマンの不等式

山形大工学部 高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)
東京電機大工学部 鶴見和之 (Kazuyuki Turumi)

概要

von Neumann の不等式に対する Lewis-Wermer-Cole の考え方を紹介し、その応用としてコハイポノーマル作用素に関する不等式を導く。また von Neumann の不等式に対する Ky Fan の考え方を紹介し、この不等式の一つの一般化を与え、単葉凸函数に関する一つの問題を提示する。

von Neumann の不等式

$B(H)$ をヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素のつくるバナッハ環とする。 $T \in B(H)$ とそのスペクトル $\sigma(T)$ の近傍で正則な複素函数 $f(z)$ に対して、通常の Riesz-Dunford 積分

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - T} d\lambda$$

を考える。ここで Γ は $\sigma(T)$ を囲む閉曲線である。 D を単位開円盤とするとき、von Neumann (1951) は次の定理を示した。

定理 V。 T を H 上の縮小作用素、 f を単位閉円盤 D^- の近傍で正則な複素函数とする。このとき、 $|f(z)| \leq 1$ ($\forall z \in D^-$) ならば $\|f(T)\| \leq 1$ である。

定理 V の見方 I

Lewis-Wermer-Cole [4] は上の定理 V に関して次のような考察を行った。

$\{z_1, \dots, z_n\}$ を D 内の固定された相異なる n 個の点とする。このとき、次の不等式を満たす D 内の n 個の点 $\{w_1, \dots, w_n\}$ は $\{z_1, \dots, z_n\}$ に関して Pick の条件を満たすと言う：

$$\sum_{ij} (1 - z_i \bar{z}_j)^{-1} w_i \bar{w}_j h_i \bar{h}_j \leq \sum_{ij} (1 - z_i \bar{z}_j)^{-1} h_i \bar{h}_j \quad (\forall h_1, \dots, h_n \in \mathbb{C})$$

\mathbb{C}^n を通常の n 次元ヒルベルト空間とする。

$$T = \text{dig}(w_1, \dots, w_n), \quad S = \text{dig}(z_1, \dots, z_n)$$

且つ

$$A = ((1 - z_j \bar{z}_i)^{-1})_{ij}$$

と置く。このとき、上の Pick の条件は $T^*AT \leq A$ を意味する。更に

$$\begin{aligned} T^*AT \leq A &\Leftrightarrow A^{-1/2}T^*ATA^{-1/2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow (A^{1/2}TA^{-1/2})^*(A^{1/2}TA^{-1/2}) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \|A^{1/2}TA^{-1/2}\| \leq 1 \end{aligned}$$

である。しかし、

$$(ASh, Sh) - (Ah, h) = -|\sum h_i|^2 \leq 0 \quad (\forall h \in \mathbb{C}^n)$$

であるから、 $S^*AS \leq A$ 、従って上の議論から $\|A^{1/2}SA^{-1/2}\| \leq 1$ である。それ故、もし $\|f\|_\infty \leq 1$ 且つ $f(z_i) = w_i$ ($i = 1, \dots, n$) を満たす $f \in A(D^-)$ が存在したなら、 $T = f(S)$ である。今任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|p - f\| < \varepsilon$ 且つ $\|p\|_\infty \leq 1$ となる多項式 $p = p(z)$ を選べ。このとき定理 V から

$$\|p(A^{1/2}SA^{-1/2})\| \leq 1$$

である。しかし $p(A^{1/2}SA^{-1/2}) = A^{1/2}p(S)A^{-1/2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \|A^{1/2}TA^{-1/2}\| &\leq \|A^{1/2}p(S)A^{-1/2}\| + \|A^{1/2}(f(S) - p(S))A^{-1/2}\| \\ &\leq 1 + \|A^{1/2}\| \|A^{-1/2}\| \|f - p\|(S) \\ &\leq 1 + \|A^{1/2}\| \|A^{-1/2}\| \max_{1 \leq i \leq n} |(f - p)(z_i)| \\ &\leq 1 + \|A^{1/2}\| \|A^{-1/2}\| \varepsilon \end{aligned}$$

である。 $\varepsilon \downarrow 0$ として、 $\|A^{1/2}TA^{-1/2}\| \leq 1$ 、結局 $T^*AT \leq A$ を得る。

上の Lewis-Wermer-Cole の考え方を応用すると、定理 V を僅かに拡張する次の命題を得る。

命題 1。 T をヒルベルト空間 H 上の縮小写像、 A を $T^*A^*AT \leq A^*A$ を満たす H 上の有界線形作用素、 f を単位閉円盤 D^- の近傍で正則な複素関数とする。このとき、 $|f(z)| \leq 1$ ($\forall z \in D^-$) ならば、 $f(T)^*A^*Af(T) \leq A^*A$ が成り立つ。

証明。今 $B_n = A^*A + 1/n$ と置く。従って B_n は可逆的正作用素である。さて

$$(x, y)_A = (B_n x, y) \quad (x, y \in H)$$

と置けば、 $(H, (\cdot, \cdot)_A)$ はヒルベルト空間となる。このとき、

$$T^* B_n T \leq T^* A^* A T + n^{-1} T^* T \leq A^* A + 1/n = B_n$$

それ故 $\|T\|_A \leq 1$ である。従って定理 V から $\|f(T)\|_A \leq 1$ を得る。しかしこの式は $f(T)^* B_n f(T) \leq B_n$ と同値であるから、 $n \rightarrow \infty$ として、 $f(T)^* A^* A f(T) \leq A^* A$ を得る。 (証明終わり)

系。T をヒルベルト空間上の縮小写像、f を単位閉円盤 D^- の近傍で正則で $|f(z)| \leq 1$ ($\forall z \in D^-$) を満たす複素函数とする。このとき、 $f(T)^* T^* T f(T) \leq T^* T$ である。更に T がコハイポノーマル (i. e., $T^* T \leq T T^*$) であれば、 $f(T)^* T T^* f(T) \leq T T^*$ である。

証明。T は縮小写像であるから、 $T^* T^* T T \leq T^* T$ が成り立つ。従って上の命題で $A = T$ と置いて、 $f(T)^* T^* T f(T) \leq T T^*$ を得る。また T がコハイポノーマルであれば、 $T^* T T^* T = (T^* T)^2 \leq T^* T \leq T T^*$ であるから、上の命題で $A = T^*$ と置いて、 $f(T)^* T T^* f(T) \leq T T^*$ を得る。 (証明終わり)

定理 V の見方 II

Ky Fan [2] は次の定理を得た。

定理 F。T をヒルベルト空間 H 上のプロパーな縮小写像 (i. e., $\|T\| < 1$) f を単位開円盤 D 上の正則函数で $f(D) \subset D$ を満たすものとする。このとき、 $\|f(T)\| < 1$ である。

注意 1。この定理は彼自身も [2] で述べているように、定理 V と同値である。

さて D 上の有界正則函数のつくる可換バナッハ環 (ハーディ環) $H^\infty(D)$ を考え、 $\|T\| < 1$ なる T に対して、

$$\pi_T(f) = f(T) \quad (f \in H^\infty(D))$$

と置くと、 π_T は $H^\infty(D)$ から $B(H)$ への以下の性質を満たす準同型写像となる。

- (1) $\pi_T(1) = I_H$.
- (2) $\pi_T(z) = T$ ($z : z \rightarrow z$ なる函数).

(3) π_T は $H^\infty(D)$ 上の広義一様収束位相と $B(H)$ 上のノルム位相に関して連続である。

このとき、定理 F から、

$$(4) \quad \|\pi_T(f)\| \leq \|f\|_\infty \quad (\forall f \in H^\infty(D)).$$

である。

実際、 $f \in H^\infty(D)$ に対して、 $g = f/(\|f\|_\infty + \varepsilon)$ と置けば、 $g(D) \subset D$ であるから、定理 F より、 $\|\pi_T(g)\| < 1$ 、従って、 $\|\pi_T(f)\| < \|f\|_\infty + \varepsilon$ 、それ故 $\varepsilon \downarrow 0$ として、 $\|\pi_T(f)\| \leq \|f\|_\infty$ を得る。次に任意のプロパー縮小写像 T に対して (4) が成り立つと仮定する。このとき定理 V を導くために、 T を縮小写像、 f を D^- のある近傍 U で正則な複素関数で

$$|f(z)| \leq 1 \quad (\forall z : |z| \leq 1)$$

を満たすとする。このとき、

$$f_k(z) = f(\alpha_k z) \quad (z \in U), \quad \alpha_k = k/(k+1) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

と置けば、 $\{f_k\}$ は D^- のあるコンパクト近傍 K で有界列となるから、Montel の定理より $\{f_k\}$ の部分ネット $\{f_{k'}\}$ が存在して、

$$\limsup_{k'} \sup_{z \in K} |f_{k'}(z) - f(z)| = 0$$

である。一方簡単な計算から、 $f(\alpha_{k'} T) = f_{k'}(T)$ 、従って仮定より、

$$\|f_{k'}(T)\| = \|f(\alpha_{k'} T)\| \leq \|f\|_\infty$$

となるが、

$$\lim_{k'} \|f_{k'}(T) - f(T)\| = 0$$

であるため ([1], p. 33 参照)、 $\|f(T)\| \leq \|f\|_\infty$ を得る。

以上から定理 F、定理 V 及び不等式 (4) の三つは同値であることが分かる。我々は、上の定理を僅かに拡張する次の結果を証明する。

命題 2。 ρ を $H^\infty(D)$ から $B(H)$ への準同型写像で、以下の条件を満たすものとする。

$$(1') \quad \rho(1) = I_H.$$

$$(2') \quad \|\rho(z)\| \leq 1 \quad (z : z \rightarrow z \text{ なる関数}).$$

(3') ρ は $H^\infty(D)$ 上の広義一様収束位相と $B(H)$ 上の弱位相に関して連続で

ある。

このとき、 $\|\rho(f)\| \leq \|f\|_\infty$ ($\forall f \in H^\infty(D)$) が成り立つ。

証明。 $f \in H^\infty(D)$ とする。今

$$f_k(z) = f(\alpha_k z) \quad (z \in D), \quad \alpha_k = k/(k+1) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

と置けば、 $\|f_k\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ ($k = 1, 2, \dots$) である。それ故、Montel の定理から広義一様収束する $\{f_k\}$ の部分ネット $\{f_{k'}\}$ が存在する。勿論 $\{f_k\}$ は f に各点収束するから、 $\{f_{k'}\}$ は f に広義一様収束する。従って、 $\{\rho(f_{k'})\}$ は f に弱収束する。更に、 $\rho(f_{k'}) = f(\alpha_{k'} \rho(z))$ が成り立つ。実際、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

且つ

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{f_{k'}(\lambda)}{\lambda^{n+1}} d\lambda,$$

と置け。但し $0 < r < 1$ である。このとき、 $b_n = (\alpha_{k'})^n a_n$ であることが容易に分かる。従って

$$\begin{aligned} \rho(f_{k'}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \rho\left(\sum_{n=0}^N b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\rho(z))^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha_{k'} \rho(z))^n \\ &= f(\alpha_{k'} \rho(z)) \end{aligned}$$

である。さて、 $\varepsilon > 0$ とし、次の条件を満たす $\xi \in H$ を選べ。

$$\|\rho(f)\|^2 < (\rho(f) \rho(f)^* \xi | \xi) + \varepsilon \quad \text{and} \quad \|\xi\| \leq 1$$

従って、十分大きな k' に対して

$$(\rho(f) \rho(f)^* \xi | \xi) < |(\rho(f_{k'}) \rho(f)^* \xi | \xi)| + \varepsilon$$

が成り立つ。それ故、 $\|\alpha_{k'} \rho(z)\| < 1$ に注意して不等式 (4) から

$$\begin{aligned} \|\rho(f)\|^2 &< |(\rho(f_{k'}) \rho(f)^* \xi | \xi)| + \varepsilon \\ &\leq \|\rho(f_{k'})\| \|\rho(f)\| + \varepsilon \\ &= \|f(\alpha_{k'} \rho(z))\| \|\rho(f)\| + \varepsilon \\ &\leq \|f\|_\infty \|\rho(f)\| + \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つが、ここで $\varepsilon \downarrow 0$ として $\|\rho(f)\| \leq \|f\|_\infty$ を得る。(証明終わり)

注意 2。

$$\text{Rep}_1(H^\infty(D); H) = \{\pi_T : T \in B(H), \|T\| < 1\}$$

$\text{Rep}_2(H^\infty(D); H) = \{\rho : \text{次の条件を満たす } H \text{ 上に作用する } H^\infty(D) \text{ の表現} :$

$$(1') \quad \rho(1) = I_H,$$

$$(2'') \quad \|\rho(z)\| < 1,$$

(3') ρ : 広義一様収束位相と弱位相に関して連続)

$\text{Rep}_3(H^\infty(D); H) = \{\rho : \text{次の条件を満たす } H \text{ 上に作用する } H^\infty(D) \text{ の表現} :$

$$(1') \quad \rho(1) = I_H,$$

$$(2') \quad \|\rho(z)\| \leq 1,$$

(3') ρ : 広義一様収束位相と弱位相に関して連続)

このとき、

$$\text{Rep}_1(H^\infty(D); H) = \text{Rep}_2(H^\infty(D); H) \subset \text{Rep}_3(H^\infty(D); H)$$

$$\exists H : \text{Rep}_2(H^\infty(D); H) \subsetneq \text{Rep}_3(H^\infty(D); H)$$

実際、

$$\text{Rep}_1(H^\infty(D); H) \subset \text{Rep}_2(H^\infty(D); H) \subset \text{Rep}_3(H^\infty(D); H)$$

は明か。また $\rho \in \text{Rep}_2(H^\infty(D); H)$ として、 $T = \rho(z)$ と置く。従って

$$\pi_T(f) = f(\rho(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\rho(z))^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho\left(\sum_{n=0}^N a_n z^n\right) = \rho(f)$$

がすべての $f \in H^\infty(D)$ に対して成り立つ。つまり $\pi_T = \rho$ が成り立つ。それ故、

$$\text{Rep}_1(H^\infty(D); H) = \text{Rep}_2(H^\infty(D); H)$$

である。

次に $C^b(D)$ を D 上の有界連続函数のつくる可換 C^* -環、 $L^2(D)$ を D 上のルベーク測度に関して L^2 -有界な函数のつくるヒルベルト空間とする。

$$\rho(f)(g) = fg \quad (\forall f \in C^b(D), \forall g \in L^2(D))$$

と置く。このとき ρ は $C^b(D)$ の $L^2(D)$ 上の等距離 $*$ -表現となっている。また (1'), (2') は明かに成立する。(3') を示す。セミノルム系

$$(T \rightarrow |(Tg, h)| : g, h \in L^2(D), g \text{ はコンパクトな台を持つ})$$

の定義する局所凸位相は弱位相に同値である。何故ならコンパクトな台を持つ L^2 -函数全体は $L^2(D)$ の中でデンスであるからである。そこで、 $\{f_\lambda\} \subset L^2(D)$ がゼロに広義一様収束したと仮定して、 $g, h \in L^2(D)$ (但し g はコンパクトな台を持つ) に対して、 $\lim (\rho(f_\lambda)g, h) = 0$ を示す。 K を g の台とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\max\{|f_\lambda(z)| : z \in K\} < \varepsilon \quad (\lambda \gg 0)$$

従って、

$$|(\rho(f_\lambda)g, h)| = \left| \int_K f_\lambda g \bar{h} dz \right| \leq \varepsilon \int |gh| dz \leq \varepsilon \|g\|_2 \|f\|_2$$

が十分大きな λ に対して成り立つ。その結果 ρ は広義一様収束位相と弱位相に関して連続である。つまり (3') が成り立つ。しかし $\|\rho(z)\| = \|z\|_\infty = 1$ であるから、 $\rho \mid H^\infty(D) \in \text{Rep}_3(H^\infty(D); H) \setminus \text{Rep}_2(H^\infty(D); H)$ である。

注意 3。Ky Fan [2] は、 f が D 上の正規化された単葉凸函数なら、

$$\{\rho(f) : \rho \in \text{Rep}_1(H^\infty(D); H)\}$$

もまた凸集合となるかと言う問題を出し、J. S. Hwang [3] が否定的解答を与えたが、少し広い立場から

$$\{\rho(f) : \rho \in \text{Rep}_3(H^\infty(D); H)\}$$

が凸集合となるかと言う問題が考えられる。

注意 4。(G, +) を可換離散群、 $L^1(G)$ を G 上の群環とする。このとき、 $G \neq \{0\}$ であれば、定理 V で $B(H)$ を $L^1(G)$ に置き換えることはできない。

実際、 $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ を任意の多項式、 t を無限位数を持つ G の任意の元とする。このとき、 $p(\delta t) = a_0 + a_1 \delta t + \dots + a_n \delta^{nt}$ であるから、

$$\|p(\delta t)\|_1 = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|.$$

一方 $\|\delta t\|_1 = 1$ であるから、もし定理 V の不等式が成り立てば、

$$|a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| \leq \sup_{z \in D} |p(z)|$$

が成り立たなければならない。これは矛盾。

上の証明及び多項式 $P(z) = 1 + z - z^2$ を考えれば、 t が位数 2 以上でもよい。また t が位数 1 を持てば、もし定理 V の不等式が成り立てば、

$$|a_1 + |a_0 - a_2| \leq \sup_{z \in D} |a_0 + a_1 z + a_2 z^2|$$

がすべての $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ について成り立つことになり、矛盾。

また閉区間 $[a, b]$ 上の n 回連続微分可能な複素関数のつくる可換バナッハ環 $C^n[a, b]$ に対しても、 $1 \leq n$ であれば、同じことが言える。

上の注意から、バナッハ関数環 A が

$$\|f(x)\| \leq \|f\|_\infty \quad (\forall f \in H^\infty(D), \forall x \in A : \|x\| < 1)$$

を満たせば、 A は関数環となってしまうような気がするが証明はできない。

一般に A を単位元をもつバナッハ環、 x を $\|x\|_\sigma < r < 1$ なる A の元とする。但し $\|x\|_\sigma$ は x のスペクトル半径を表す。このとき、 $H^\infty(D)$ の任意の元 f に対して、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda)}{\lambda - x} d\lambda$$

を考える。このとき、 $\pi_x(f) = f(x)$ と置くと、 π_x は $H^\infty(D)$ から A への準同型写像で、広義一様収束に関してノルム連続である ([1], p.33 参照)。また

$$\frac{1}{\lambda - x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} x^n \quad (|\lambda| = r)$$

であるから、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

と置けば、

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n \quad (D \text{ 上広義一様収束})$$

且つ、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}} x^n d\lambda \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (\text{ノルム収束}) \end{aligned}$$

が成り立つ。従って $A(1, x)$ を $\{1, x\}$ で生成された A の可換閉部分環とすると、

$$\{f(x) : f \in H^\infty(D)\} \subset A(1, x)$$

が成り立つ。いま $f(x)$ を A の元と見たときのスペクトル半径を $\|f(x)\|_\sigma$ で表す。また $f(x)$ を $A(1, x)$ の元と見たときのスペクトル半径を $\|f(x)\|'_\sigma$ で表す。従って、 $\|f(x)\|_\sigma \leq \|f(x)\|'_\sigma$ が成り立つ。ところで $A(1, x)$ のキャリア空間を Φ とすると、任意の $\varphi \in \Phi$ に対して、 $\varphi \circ \pi_x$ は $H^\infty(D)$ のキャリア空間に属するから、 $|\varphi(f(x))| \leq \|f\|_\infty$ が成り立つ。以上から我々は次の命題を得る。

命題 3。 A を単位的バナッハ環、 x を $\|x\|_\sigma < 1$ を満たす A の元とする。このとき $\|f(x)\|_\sigma \leq \|f\|_\infty$ ($\forall f \in H^\infty(D)$) が成り立つ。

注意 5。一般に $\|x\| < 1$ なる $x \in A$ に対して、

$$\|f(x)\| \leq (1 - \|x\|)^{-1} \|f\|_\infty \quad (\forall f \in H^\infty(D))$$

が成り立つ。従って

$$\|\pi_x\| \leq (1 - \|x\|)^{-1} \quad (\forall x \in A : \|x\| < 1)$$

である。

参 考 文 献

1. F. Bonsall and J. Duncan, "Complete Normed Algebras," Springer-Verlag, New York/Berlin, 1973.
2. Ky Fan, Analytic functions of a proper contraction, Math. Z. **160** (1978), 275-290.
3. J. S. Hwang, A problem on the Riesz-Dunford operator calculus and convex univalent functions, Glasgow Math. J. **24**(1983), 129-130.
4. K. Levis and J. Wermer, On the theorems of Pick and von Neumann, in "Function Spaces" (K. Jarosz, Ed.), pp. 273-280, Marcel-Dekker, Inc. 1992.