数理解析研究所講究録
第822巻 1993年 163-175

ソリトン方程式のｑ－離散化

東京大学工学部物理工学科　梶原健司 (Kenji Kajiwara)
東京大学大学院数理科学研究科　薩摩順吉 (Junkichi Satsuma)

1. 緒言

今世紀において解析の対象はほとんど連続系に絞られ、１９世紀において盛んに研究されていた離散系、ｑ－離散系の理論の研究にはそれほど注意が払われていなかった。しかし、計算機の発明により離散系の価値が再発見され、さらに最近の量子群の発見とそれ以後の理論の発展により、ｑ－離散系に再び注目が集まっている。

通常の特殊函数と可積分系とは密接な関係があることが知られている[1),2)]。そこでｑ－特殊函数が同様な役割を果たすであろう「ｑ－離散系における可積分系」を研究することは興味ある問題である。また、そこには通常の可積分系の背後に様々なリー代数が現れたように[3)]、様々な量子群の構造があることが期待される。従って、可積分系の立場からq-特殊函数の理論や量子群に対して新たな知見を与える可能性がある。

さて、可積分系のｑ－離散化を行う際に、微分を単純にｑ－差分に置き換えただけでは、可積分性が保存されるとは限らない。そこには何か指導原理が必要である。そこで、我々は直接法の立場に立ち、指導原理として

「可積分系の双一次形式は行列式またはパフィアンの恒等式、もしくはそれに対してリダクションを行ったものに帰着する」

を採用する。すなわち、もとの非線形方程式のレベルでｑ－離散化を行うのではなく、双一次形式に変換してから、そのレベルでｑ－離散化を行う、ということである。

本稿では二種類の二次元戸田方程式、すなわち二次元戸田分子方程式と二次元戸田格子方程式を取り上げて、そのｑ－離散化を議論することにする。まず、連続系で上の指導原理を簡単に説明する。

二次元戸田方程式

$$\frac{\partial V_n}{\partial x} = V_n(J_n - J_{n+1}) \,, \tag{1.1a}$$

$$\frac{\partial J_n}{\partial y} = V_{n-1} - V_n \tag{1.1b}$$

は境界条件によって区別され、

$$V_0 = V_{M+1} = 0 \tag{1.2}$$

（有限、非周期）の場合は二次元戸田分子 (2DTM) 方程式、

$$n \in Z \tag{1.3}$$

の場合は二次元戸田格子 (2DTL) 方程式と呼ばれる。解の構造は両者全く異なっている。以下、この事を直接法に従って見ることにする。2DTM 方程式は従属変数変換

$$V_n = \frac{\tau_{n-1}\tau_{n+1}}{\tau_n^2}\ , \qquad J_n = \frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} \tag{1.4}$$

によって双一次形式

$$\frac{\partial^2 \tau_n}{\partial x \partial y}\tau_n - \frac{\partial \tau_n}{\partial x}\frac{\partial \tau_n}{\partial y} = \tau_{n+1}\tau_{n-1} \tag{1.5}$$

に書きかえられる。(1.5) の解は

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f & \partial_x f & \cdots & \partial_x^{n-1} f \\ \partial_y f & \partial_x\partial_y f & \cdots & \partial_x^{n-1}\partial_y f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_y^{n-1} f & \partial_x \partial_y^{n-1} f & \cdots & \partial_x^{n-1}\partial_y^{n-1} f \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

で表され、境界条件は

$$f = \sum_{k=1}^{M+1} f_k(x) g_k(y) \tag{1.7}$$

とおくことによって満足される。ただし、$f_k(x)$ 、$g_k(y)$ はそれぞれ x 、yの任意函数である。実際、(1.6) が (1.5) の解であることはヤコビの恒等式を用いて示すことができる[4)]。

2DTL 方程式はやはり (1.4) の従属変数変換 によって双一次形式

$$\frac{\partial^2 \tau_n}{\partial x \partial y}\tau_n - \frac{\partial \tau_n}{\partial x}\frac{\partial \tau_n}{\partial y} = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2 \tag{1.8}$$

に書きかえられる。ここで、2DTM 方程式とは decoupling を変えたため、右辺が (1.5) と異なっていることに注意しておく。このことを陽に表現するために、通常、2DTL 方程式は (1.1) 、(1.4) で V_nを $1+V_n$で置き換えたもので表すことが多い。

さて、(1.8) の解はカソラチ行列式

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix} \tag{1.9}$$

で表される。ただし、$f_n^{(k)}$、$k = 1, \cdots N$ は分散関係と呼ばれる関係式

$$\partial_x f_n^{(k)} = -f_{n+1}^{(k)}\ , \qquad \partial_y f_n^{(k)} = f_{n-1}^{(k)}\ , \quad k = 1, \cdots, \ N \tag{1.10}$$

を満たす任意函数である。実際、(1.8) は行列式の恒等式、この場合はプリュッカー関係式に帰着することを証明することができる[5),6)]。

最初に述べたように、2DTM 方程式、2DTL 方程式の q －離散化はこのような事実を踏まえて行われる。以下、2 節では 2DTM 方程式、3 節では 2DTL 方程式の q －離散化を議論する。

2. 二次元戸田分子方程式の q －離散化
2.1 方程式とその解

さて、2DTM 方程式の q-アナログ、q-2DTM 方程式は

$$\delta_{q^\alpha,x} V_n(x,y) = V_n(q^\alpha x, y) J_n(x, q^\beta y) - V_n(x,y) J_{n+1}(x,y)\ , \tag{2.1a}$$

$$\delta_{q^\beta,y} J_n(x,y) = V_{n-1}(q^\alpha x, y) - V_n(x,y)\ , \tag{2.1b}$$

$$V_0 = V_{M+1} = 0 \tag{2.1c}$$

で与えられる。ただし、$\delta_{q^\alpha,x}$、$\delta_{q^\beta,y}$は

$$\delta_{q^\alpha,x} f(x,y) = \frac{f(x,y) - f(q^\alpha x, y)}{(1-q)x}\ , \qquad \delta_{q^\beta,y} f(x,y) = \frac{f(x,y) - f(x, q^\beta y)}{(1-q)y} \tag{2.2}$$

で定義される q-差分作用素である。(2.1) は従属変数変換

$$J_n(x,y) = \frac{1}{(1-q)x}\left(\frac{\tau_{n-1}(x,y)\tau_n(q^\alpha x, y)}{\tau_{n-1}(q^\alpha x, y)\tau_n(x,y)} - 1\right)\ , \tag{2.3a}$$

$$V_n(x,y) = \frac{\tau_{n+1}(x,y)\tau_{n-1}(x, q^\beta x)}{\tau_n(x,y)\tau_n(x, q^\beta y)} \tag{2.3b}$$

によって双一次形式

$$
\begin{aligned}
&\delta_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,\breve{y}}\tau_n(x,y)\cdot\tau_n(x,y)-\delta_{q^\alpha,x}\tau_n(x,y)\delta_{q^\beta,y}\tau_n(x,y)\\
&=\tau_{n+1}(x,y)\tau_{n-1}(q^\alpha x,q^\beta y)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

に変換される。また、(2.4) の解は

$$
\tau_n(x,y)=\begin{vmatrix}
f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}f(x,y)\\
\delta_{q^\beta,y}f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}\delta_{q^\beta,y}f(x,y)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,y)
\end{vmatrix}
\tag{2.5}
$$

で与えられる。ただし、境界条件は通常の場合と同様に

$$
f(x,y)=\sum_{k=1}^{M+1}f_k(x)g_k(y)
\tag{2.6}
$$

とおくことにより満足される。

以下、(2.5) が (2.4) の解になっていることを示そう。まず、

$$
\begin{aligned}
\tau_n(q^{-\alpha}x,y)&=\left.\begin{vmatrix}
f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}f(x,y)\\
\delta_{q^\beta,y}f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}\delta_{q^\beta,y}f(x,y)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,y)
\end{vmatrix}\right|_{x\to q^{-\alpha}x}\\
&=q^{\alpha(n-1)}\times\begin{vmatrix}
f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}f(q^{-\alpha}x,y)\\
\delta_{q^\beta,y}f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}\delta_{q^\beta,y}f(q^{-\alpha}x,y)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(q^{-\alpha}x,y)
\end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

となることがわかる。ここで、$k=1$ から N まで k列から $(k+1)$ 列の $(1-q)x$ 倍を引いた。また、q-差分作用素それ自体が x に依存し、

$$
\left.\delta_{q^\alpha,x}^k f(x,y)\right|_{x\to q^{-\alpha}x}=q^{k\alpha}\ \delta_{q^\alpha,x}^k f(q^{-\alpha}x,y)
\tag{2.8}
$$

であることに注意されたい。同様にして、

$$
\tau_n(x,q^{-\beta}y)=q^{\beta(n-1)}\times
$$

$$\begin{vmatrix} f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}f(x,y) \\ \delta_{q^\beta,y}f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}\delta_{q^\beta,y}f(x,y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,q^{-\beta}y) & \delta_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,q^{-\beta}y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,q^{-\beta}y) \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

などを得る。さて、

$$q^{(\alpha+\beta)n}(1-q)^2xy\ \tau_{n+1}(q^{-\alpha}x,q^{-\beta}y)$$

$$= \begin{vmatrix} f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}f(q^{-\alpha}x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(q^{-\alpha}x,y) \\ \delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,q^{-\beta}y) & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(q^{-\alpha}x,q^{-\beta}y) \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

に対してヤコビの恒等式を適用すると、

$$\begin{aligned} &\tau_n(q^{-\alpha}x,q^{-\beta}y)\tau_n(x,y) - \tau_n(q^{-\alpha}x,y)\tau_n(x,q^{-\beta}y) \\ &= q^{-(\alpha+\beta)}(1-q)^2xy\ \tau_{n+1}(q^{-\alpha}x,q^{-\beta}y)\tau_{n-1}(x,y) \end{aligned} \tag{2.11}$$

が得られる。これは (2.4) で、x を $q^{-\alpha}x$ 、yを $q^{-\beta}y$でそれぞれ置き換えたものに他ならない。従って、(2.5) が (2.4) の解になっていることが示された。

次に q-2DTM 方程式のリダクションを考えよう。(2.4) において

$$xy = r^2\ , \qquad \alpha = \beta = 2 \tag{2.12}$$

とおき、τ_nが rのみに依存するという条件を課すと、(2.4) は

$$(\frac{1}{r}\delta_{q,r} + q^2\delta_{q,r}^2)\tau_n(r)\cdot\tau_n(r) - \{\delta_{q,r}\tau_n(r)\}^2 = \tau_{n+1}(r)\tau_{n-1}(q^2r) \tag{2.13}$$

に、また (2.5) は

$$\tau_n(r) = q^{\frac{-2n(n-1)(n-2)}{3}}r^{n(n-1)}\times \begin{vmatrix} f(r) & r\delta_{q,r}f(r) & \cdots & (r\delta_{q,r})^{n-1}f(r) \\ r\delta_{q,r}f(r) & (r\delta_{q,r})^2f(r) & \cdots & (r\delta_{q,r})^nf(r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (r\delta_{q,r})^{n-1}f(r) & (r\delta_{q,r})^nf(r) & \cdots & (r\delta_{q,r})^{2n-2}f(r) \end{vmatrix} \tag{2.14}$$

にそれぞれ帰着する。(2.13) は $q \to 1$ の極限で cylindrical 戸田分子 (cTM) 方程式[7]

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\tau_n(r)\cdot\tau_n(r) - \left\{\frac{\partial\tau_n(r)}{\partial r}\right\}^2 = \tau_{n+1}(r)\tau_{n-1}(r) \tag{2.15}$$

に帰着し、従って (2.15) を q-cTM 方程式と呼ぶ。(2.15) は従属変数変換

$$V_n(r) = \frac{\tau_{n-1}(qr)\tau_{n+1}(r)}{\tau_n(r)\tau_n(qr)}\ , \tag{2.16a}$$

$$J_n(r) = \frac{1}{(1-q)x}\left(\frac{\tau_n(qr)\tau_{n-1}(r)}{\tau_n(r)\tau_{n-1}(qr)} - 1\right) \tag{2.16b}$$

によって

$$\left(q\delta_{q,r} + \frac{1}{r}\right)J_n(r) = V_n(r) - V_{n-1}(qr)\ , \tag{2.17a}$$

$$\delta_{q,r}V_n(r) = qJ_n(qr)V_n(qr) - J_{n+1}(r)V_n(r) \tag{2.17b}$$

に書きかえられる。

2.2 Bäcklund 変換と Lax pair

q-2DTM 方程式の Bäcklund 変換は双一次形式で

$$\begin{aligned}\delta_{q^\beta,y}\ \tau_n(x,y)\cdot\tau'_n(x,y) - \tau_n(x,y)\ \delta_{q^\beta,y}\ \tau'_n(x,y)&\\ = -\tau_{n+1}(x,y)\tau'_{n-1}(x,q^\beta y)\ ;&\end{aligned} \tag{2.18a}$$

$$\begin{aligned}\delta_{q^\alpha,x}\ \tau_n(x,y)\cdot\tau'_{n-1}(x,y) - \tau_n(x,y)\ \delta_{q^\alpha,x}\ \tau'_{n-1}(x,y)&\\ = \tau_{n-1}(q^\alpha x,y)\tau'_n(x,y)&\end{aligned} \tag{2.18b}$$

で与えられる。(2.18) は q-2DTM 方程式の解

$$\tau_n(x,y) = \begin{vmatrix} f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}f(x,y) \\ \delta_{q^\beta,y}f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}\delta_{q^\beta,y}f(x,y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,y) & \delta_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,y) & \cdots & \delta_{q^\alpha,x}^{n-1}\delta_{q^\beta,y}^{n-1}f(x,y) \end{vmatrix} \tag{2.19}$$

を別の解

$$\tau_n'(x,y)=\begin{vmatrix} \delta_{q^\alpha,x}f(x,y) & \delta^2_{q^\alpha,x}f(x,y) & \cdots & \delta^n_{q^\alpha,x}f(x,y) \\ \delta_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}f(x,y) & \delta^2_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}f(x,y) & \cdots & \delta^n_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}f(x,y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{q^\alpha,x}\delta^{n-1}_{q^\beta,y}f(x,y) & \delta^2_{q^\alpha,x}\delta^{n-1}_{q^\beta,y}f(x,y) & \cdots & \delta^n_{q^\alpha,x}\delta^{n-1}_{q^\beta,y}f(x,y) \end{vmatrix} \tag{2.20}$$

へ写す。言い方をかえれば (2.18) は (2.19) と (2.20) の間に成り立つ恒等式である。以下、(2.18b) についてこのことを示そう。まず、次のような記号を導入する。

$$\tau_n(x,y)=|0,1,\cdots,n-1|\ , \tag{2.21}$$

$$\tau_n'(x,y)=|1,2,\cdots,n|\ . \tag{2.22}$$

すなわち、"k"は縦ベクトル

$$"k"=\left.\begin{pmatrix} \delta^k_{q^\alpha,x}f(x,y) \\ \delta^k_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}f(x,y) \\ \vdots \\ \delta^k_{q^\alpha,x}\delta^{n-1}_{q^\beta,y}f(x,y) \end{pmatrix}\right\}n \tag{2.23}$$

である。すると、

$$\tau_{n-1}(x,y)=|0,1,\cdots,n-1,\phi|\ , \tag{2.24}$$

$$q^{-(n-1)\alpha}\tau_n(q^{-\alpha}x,y)=|0,1,\cdots,n-2,n-1_{q^{-\alpha}x}|\ , \tag{2.25}$$

$$q^{-(n-1)\alpha}\tau_{n-1}'(q^{-\alpha}x,y)=|1,2,\cdots,n-2,n-1_{q^{-\alpha}x},\phi|\ , \tag{2.26}$$

$$q^{-n\alpha}(1-q)x\ \tau_n'(q^{-\alpha}x,y)=|1,2,\cdots n-1,n-1_{q^{-\alpha}x}| \tag{2.27}$$

などがわかる。ただし、ϕと"$n-1_{q^{-\alpha}x}$"は

$$\phi=\left.\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}n\ , \qquad "n-1_{q^{-\alpha}x}"=\begin{pmatrix} \delta^{n-1}_{q^\alpha,x}f(q^{-\alpha}x,y) \\ \delta^{n-1}_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}f(q^{-\alpha}x,y) \\ \vdots \\ \delta^{n-1}_{q^\alpha,x}\delta^{n-1}_{q^\beta,y}f(q^{-\alpha}x,y) \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

である。

さて、次のような $2n \times 2n$ 行列式の恒等式を考える。

$$0 = \left| \begin{array}{c:ccc:ccc:ccc} 0 & 1 & \cdots & n-2 & & 0 & & n-1 & n-1_{q^{-\alpha}x} & \phi \\ \hdashline 0 & & 0 & & 1 & \cdots & n-2 & n-1 & n-1_{q^{-\alpha}x} & \phi \end{array} \right| . \tag{2.29}$$

右辺をラプラス展開することによって、

$$\begin{aligned} 0 =& |0,1,\cdots,n-2,n-1_{q^{-\alpha}x}|\ |1,\cdots,n-2,n-1,\phi| \\ &-|0,1,\cdots,n-2,n-1|\ |1,\cdots,n-2,n-1_{q^{-\alpha}},\phi| \\ &+|1,\cdots,n-2,n-1,n-1_{q^{-\alpha}x}|\ |0,1,\cdots,n-2,\phi| \end{aligned} \tag{2.30}$$

が得られる。各項に (2.21) 、(2.22) 、(2.24-27) を代入することにより、

$$\begin{aligned} &\tau_n(q^{-\alpha}x,y)\tau'_{n-1}(x,y) - \tau_n(x,y)\tau'_{n-1}(q^{-\alpha}x,y) \\ &\quad = q^{-\alpha}(1-q)x\ \tau_{n-1}(x,y)\tau'_n(q^{-\alpha}x,y) \end{aligned} \tag{2.31}$$

が得られるが、これは (2.18b) で x を $q^{-\alpha}x$ で置き換えたものに他ならない。同様にして (2.18a) も示すことができる。

さて、次に Bäcklund 変換から Lax pair を構成しよう。Hirota ら[8] に従って、

$$\tau'_n(x,y) = \tau_n(x,y)\psi_{n+1}(x,y) \tag{2.32}$$

とおく。すると、Bäcklund 変換 (2.18) は

$$\delta_{q^\beta,y}\psi_{n+1}(x,y) = V_n(x,y)\psi_n(x,q^\beta y)\ , \tag{2.33a}$$

$$\delta_{q^\alpha,x}\psi_n(x,y) = -J_n(x,y)\psi_n(x,y) - \psi_{n+1}(x,y) \tag{2.33b}$$

と書き直される。さらに、二つの行列

$$L(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ V_1(x,y) & 0 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \\ & & V_M(x.y) & 0 \end{pmatrix} , \tag{2.34}$$

$$R(x,y) = -\begin{pmatrix} J_1(x,y) & 1 & & & & \\ & J_2(x,y) & 1 & & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & J_M(x,y) & 1 \\ & & & & & J_{M+1}(x,y) \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

を導入すれば、(2.33) は

$$\delta_{q^\beta,y}\Psi(x,y) = L(x,y)\Psi(x,q^\beta y)\ , \qquad \delta_{q^\alpha,x}\Psi(x,y) = R(x,y)\Psi(x,y) \tag{2.36}$$

となる。ただし、

$$\Psi(x,y) = \begin{pmatrix} \psi_1(x,y) \\ \vdots \\ \psi_{M+1}(x,y) \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

である。従って、(2.34) 、(2.36) が Lax pair を与える。実際、(2.36) の両立条件

$$\delta_{q^\alpha,x}L(x,y) - \delta_{q^\beta,y}R(x,y) = L(q^\alpha x,y)R(x,q^\beta y) - R(x,y)L(x,y) \tag{2.38}$$

から q-2DTM 方程式 (2.1) が導かれる。

3. 二次元戸田格子方程式の q －離散化

2DTL 方程式の q-アナログ、q-2DTL 方程式は

$$\delta_{q^\alpha,x}V_n(x,y) = J_n(x,y)V_n(q^\alpha x,y) - J_{n+1}(x,y)V_n(x,y)\ , \tag{3.1a}$$

$$\delta_{q^\beta,y}J_n(x,y) = V_{n-1}(q^\alpha x,y) - q^\beta V_n(x,q^\beta y) \tag{3.1b}$$

で与えられる。(3.1) は従属変数変換

$$V_n(x,y) = \frac{\tau_{n+1}(q^\alpha x,y)\tau_{n-1}(x,q^\beta y)}{\tau_n(x,q^\beta y)\tau_n(x,y)}\ , \tag{3.2a}$$

$$J_n(x,y) = \frac{1}{(1-q)x}\left\{\{1+(1-q)^2 xy\}\ \frac{\tau_n(q^\alpha x,y)\tau_{n-1}(x,y)}{\tau_n(x,q^\beta y)\tau_{n-1}(q^\alpha x,y)}\ -1\right\} \tag{3.2b}$$

によって双一次形式

$$\{\delta_{q^\alpha,x}\delta_{q^\beta,y}\tau_n(x,y)\}\ \tau_n(x,y)-\{\delta_{q^\alpha,x}\tau_n(x,y)\}\ \{\delta_{q^\beta,y}\tau_n(x,y)\}$$
$$=\tau_{n+1}(x,q^\beta y)\tau_{n-1}(q^\alpha x,y)-\tau_n(q^\alpha x,q^\beta y)\tau_n(x,y) \tag{3.3}$$

に書き直され、その解は

$$\tau_n(x,y)=\begin{vmatrix} f_n^{(1)}(x,y) & f_{n+1}^{(1)}(x,y) & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)}(x,y) \\ f_n^{(2)}(x,y) & f_{n+1}^{(2)}(x,y) & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)}(x,y) & f_{n+1}^{(N)}(x,y) & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)}(x,y) \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

で表される[9]。ただし、$f_n^{(k)}$、$k=1,\cdots,N$の満たす分散関係は

$$\delta_{q^\alpha,x}f_n^{(k)}(x,y)=-f_{n+1}^{(k)}(x,y)\ ,\qquad \delta_{q^\beta,y}f_n^{(k)}(x,y)=f_{n-1}^{(k)}(x,y)\ ,\qquad k=1,\cdots,N \tag{3.5}$$

である。

以下、(3.4)、(3.5) が q-2DTL 方程式 (3.3) の解になっていることを示そう。2.1 節と同様に

$$\tau_n(x,y)=|0,1,\cdots,N-1| \tag{3.6}$$

という記号を導入する。ただし、"j"は縦ベクトル

$$"j"=\begin{pmatrix} f_{n+j}^{(1)}(x,y) \\ f_{n+j}^{(2)}(x,y) \\ \vdots \\ f_{n+j}^{(N)}(x,y) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

である。分散関係 (3.5) に注意して、

$$\tau_n(q^{-\alpha}x,y)=|0_{q^{-\alpha}x},1_{q^{-\alpha}x},\cdots N-1_{q^{-\alpha}x}|$$
$$=|0,\cdots,N-2,N-1_{q^{-\alpha}x}|\ , \tag{3.9}$$

$$-(1-q)q^{-\alpha}x\ \tau_n(q^{-\alpha}x,y)=|0,\cdots,N-2,N-2_{q^{-\alpha}x}|\ , \tag{3.10}$$

$$\tau_n(x, q^{-\beta}y) = |0_{q^{-\beta}y}, 1, \cdots, N-1| \,, \tag{3.11}$$

$$(1-q)q^{-\beta}y \ \tau_n(x, q^{-\beta}y) = |1_{q^{-\beta}y}, 1, \cdots, N-1| \,, \tag{3.12}$$

$$\{1+(1-q)^2q^{-(\alpha+\beta)}xy\} \ \tau_n(q^{-\alpha}x, q^{-\beta}y) = |0_{q^{-\beta}y}, 1, \cdots, N-2, N-1_{q^{-\alpha}x}| \tag{3.13}$$

を得る。ただし、

$$"j_{q^{-\alpha}x}" = \begin{pmatrix} f^{(1)}_{n+j}(q^{-\alpha}x, y) \\ f^{(2)}_{n+j}(q^{-\alpha}x, y) \\ \vdots \\ f^{(N)}_{n+j}(q^{-\alpha}x, y) \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

である。

さて、次の $2N \times 2N$行列式の恒等式

$$\left| \begin{array}{c:ccc:c:ccc:c} 0_{q^{-\beta}y} & 1 & \cdots & N-2 & N-1_{q^{-\alpha}x} & 0 & & 0 & & N-1 \\ \hdashline 0_{q^{-\beta}y} & & 0 & & & 0 & 1 & \cdots & N-2 & N-1 \end{array} \right| = 0 \tag{3.15}$$

の左辺をラプラス展開し、(3.6) 、(3.9)-(3.13) を代入すると、

$$\begin{aligned} &\{1+(1-q)^2q^{-(\alpha+\beta)}xy\} \ \tau_n(q^{-\alpha}x, q^{-\beta}y) \ \tau_n(x,y) - \tau_n(q^{-\alpha}x, y) \ \tau_n(x, q^{-\beta}y) \\ &+(1-q)q^{-\alpha}x \ \tau_{n+1}(q^{-\alpha}x, y) \ (1-q)q^{-\beta}y \ \tau_{n-1}(x, q^{-\beta}y) = 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

が得られる。これは (3.1) で x を $q^{-\alpha}x$ 、yを $q^{-\beta}y$で置き換えたものに他ならない。従って、(3.3) が (3.1) の解であることが示された。

次に q-2DTL 方程式のリダクションについて議論する。2DTM 方程式の場合と同様に、(3.1) において (2.12) の条件を課すことにすると、(3.1) は

$$\Big\{\Big(\frac{1}{r}\delta_{q,r} + q\delta^2_{q,r}\Big)\tau_n(r)\Big\}\tau_n(r) - \Big\{\delta_{q,r}\tau_n(r)\Big\}^2 = \tau_{n+1}(qr)\tau_{n-1}(qr) - \tau_n(q^2r)\tau_n(r) \tag{3.17}$$

となる。これは $q \to 1$ の極限で cylindrical 戸田格子 (cTL) 方程式[10)]

$$\Big\{\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big)\tau_n(r)\Big\}\tau_n(r)-\Big\{\frac{\partial}{\partial r}\tau_n(r)\Big\}^2=\tau_{n+1}(r)\tau_{n-1}(r)-\tau_n(r)^2 \tag{3.18}$$

に帰着する。そこで (3.17) を q-cTL 方程式と呼ぶことにする。cTL 方程式 (3.18) はベッセル函数を要素として持つカソラチ行列式を解として持つことが知られている[5),10)]。

(3.17) の解を議論しよう。q-2DTL 方程式の解 (3.4)、(3.5) において、(2.12) の拘束条件を課すことにする。そこで、p_kを任意定数として

$$f_n^{(k)}(x,y)=\Big(\frac{y}{x}\Big)^{(n+p_k)/2}\phi_{n+p_k}(r) \tag{3.19}$$

とおく。これを (3.3) に代入すると、(ただし、$\alpha=\beta=2$ である) $\phi_{n+p_k}(r)$ の満たすべき式として、

$$\Big(q^{-(n+p_k)}\delta_{q,r}+\frac{[-(n+p_k)]}{r}\Big)\phi_{n+p_k}(r)=-\phi_{n+p_k+1}(r)\ , \tag{3.20}$$

$$\Big(q^{n+p_k}\delta_{q,r}+\frac{[n+p_k]}{r}\Big)\phi_{n+p_k}(r)=\phi_{n+p_k-1}(r) \tag{3.21}$$

が得られる。ここで、$[n]$は q-整数

$$[n]=\frac{1-q^n}{1-q} \tag{3.22}$$

である。(3.20)、(3.21) は q-ベッセル函数の漸化式そのものである。また、$\tau_n(x,y)$ を $x^{c_1n+c_2}y^{c_3n+c_4}\tau_n(x,y)$ で置き換えても q-2DTL 方程式は不変であることを考慮すると、結局、

$$\tau_n(r)=\begin{vmatrix} J_{q,n+p_1}(r) & J_{q,n+p_1+1}(r) & \cdots & J_{q,n+p_1+N-1}(r)\\ J_{q,n+p_2}(r) & J_{q,n+p_2+1}(r) & \cdots & J_{q,n+p_2+N-1}(r)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ J_{q,n+p_N}(r) & J_{q,n+p_N+1}(r) & \cdots & J_{q,n+p_N+N-1}(r)\end{vmatrix} \tag{3.23}$$

が q-cTL 方程式 (3.17) の解であることがわかる。ただし、$J_{q,k}(r)$ は k次の q-ベッセル函数である。この結果は $q\to 1$ で既知の結果と一致する。

4. 結言

本稿では 2DTL 、2DTM 方程式をとりあげ、そのｑ－離散化について議論した。この方法で他のソリトン方程式のｑ－離散化も可能であることを注意しておく。今後の問題としては、

(1) 他のｑ－特殊函数との関連

(2) 量子群との関連

(3) パンルベ超越函数のｑ－アナログの構成

などが挙げられる。特に、(3) について簡単に触れたい。パンルベ方程式のτ 函数はいくつかのタイプの戸田分子方程式を満足することが知られている[11]。特に、第３種のパンルベ方程式 P3 の場合はτ函数が cTM 方程式を満足する。従って、τ函数が q-cTM 方程式を満足する q-P3 方程式の存在を期待することは自然であろう。また、最近、我々はパンルベ方程式のパラメータが特殊な場合にそれがプリュッカー関係式に帰着することを見いだした[12),13)]。これを踏まえて q-P3 方程式の構成を試みている。

最後に、有益な議論、助言をいただいた太田泰広氏に感謝したい。

参考文献

1) A. Nakamura, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 94 (1988), p.195.
2) K. Okamoto, *Algebraic Analysis* (Academic, Boston, 1988), p.647.
3) M. Jimbo and T. Miwa, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19**(1983), p.943.
4) A. N. Leznov and M. V. Saveliev, Physica 3D, **1**& **2**(1981),p.62.
5) K. Ueno and K. Takasaki, *Group Representation and Systems of Differential Equations*, Adv. Stud. in Pure Math. **4**(Kinokuniya, Tokyo, 1984), p.1.
6) R. Hirota, M. Ito and F. Kako, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 94 (1988), p.42.
7) R. Hirota and A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn., **56**(1987), p.3055.
8) R. Hirota, S. Tsujimoto and T. Imai, "Difference Scheme of Soliton Equations", to appear in Proc. of "*Future Directions of Nonlinear Dynamics in Physics and Biological Systems*" (1992).
9) K. Kajiwara and J. Satsuma, J. Phys. Soc. Jpn., **60**(1991), p.3986.
10) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn., **52**(1983),p.380.
11) K. Okamoto, Ann. Mat., (1986), p.337, *ibid.*, Japan J. Math., **13**(1987), p.47, *ibid.*, Math. Ann., **275**(1986) ,p. 221, *ibid.*, Funkcialaj Ekvacioj, **30**(1987), p.305.
12) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn., **61**(1992), p.3007.
13) K. Kajiwara, Y.Ohta and J.Satsuma, in preparation.