数理解析研究所講究録
第822巻1993年84-94


# 積分可能系の量子化

## - $W_n$ 代数って何？ -

大阪大学・理学部　永友　清和

## 1　序

Lie 環 $sl(n,\mathrm{C})$ 構成される $W_n$ 代数[1]について解説したい. 一般に $n$ 階の常微分作用素

$$L = D^n + u_1(x)D^{n-1} + \cdots + u_n(x)$$

を1階化すれば

$$L = \frac{d}{dx} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -u_n(x) \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -u_{n-1}(x) \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 & -u_1(x) \end{bmatrix}$$

であるから $\mathfrak{gl}(n,\mathrm{C})$ と密接に関係している. 特に $(n-1)$ 階の係数が0であるような微分作用素は $sl(n,\mathrm{C})$ に関係し, Drinfel'd と Sokolov により一般化された KdV 階層が構成され, その Poisson 構造は $A_n^{(1)}$ 型の affine Lie 環の随伴共役構造を巾零部分群のある Poisson 作用で Reduction (Hamiltonian Reduction) して得られることが知られている.

一方, MKdV 階層は Miura 変換により KdV 階層に移行するのみならずその Poisson 構造を保っている. すなわち, KdV 階層の Poisson 構造は MKdV 階層の自明な Poisson 構造からハミルトン写像で導かれることが知られている. こ

[1] S.L.Luk'yanov, V.A.Fateev; Coformally invariant models of two-dimensional quantum field theory with $Z_n$ - symmetry, Sov.Phy.JETP, 67, 447-454(1988).

こでは, この事実に注目し Miura 変換を Boson を使って量子化することによりどの様な代数があらわれるかを見ることにする. ここで導かれる代数は $W_n$ 代数と呼ばれ, 特徴的であるのは, どの $n$ に対しても Virasoro 代数を Lie 環として含んでいることである[2].

量子化された Miura 変換を述べるには Boson 解析が不可欠である. そこで, はじめに Boson 解析の作用素展開について解説しよう. その後に, 量子化された Miura 変換と $W_n$ 代数をを定義し, Virasoro 代数が部分環として含まれていることを示す. 最後にリーマン面上の射影構造の変形と $W_n$ 代数の関係についても触れることにする.

## 2 Boson 解析と作用素展開

ここでは Boson 解析について簡単に述べよう[3]. 作用素 $a_i(s), i = 1, \ldots, n, s \in \mathbf{Z}$ を生成元とし交換関係

$$[a_i(u), a_j(s)] = hs\delta_{ij}\delta_{s+u,0}, \quad h \text{ は Planck 定数}$$

で生成される代数を Heisenberg 代数と云い $\gamma_n$ であらわす. Heisenberg 代数の元に対して生成演算子 $a_p(s), s < 0$ を左に消滅演算子 $a_k(u), u > 0$ を右に表したものを正規順序と呼ぶ. $A^-$, $A^+$ をそれぞれを $a_p(s), s < 0$ と $a_k(u), u > 0$ の生成する多項式環とし, 左 $\gamma_n$ 加群 $F$ と右 $\gamma_n$ 加群 $\bar{F}$ を方程式

$$a_k(u)|0>= 0, \quad u > 0, \quad <0|a_p(s) = 0, \quad s < 0$$

で定義する.

---

[2] $W_n$ 代数自体は Lie 環ではなく 2 次の関係式で定義される.

[3] 土屋昭博　述, 庵原　謙治, 小島武夫　記 ; Intoroducton to Conformal Field Theory, または, 土屋昭博　述, 永友清和　記 ; 共形場理論入門（どちらも大阪大学理学部での集中講義記録）を参照.

**定理 2.1** *Heisenverg* 代数 $\gamma_n$ 加群 $F$ と $\bar{F}$ の間には次の条件を満たす *dual pairng* $<\ |\ >$ が存在する：$|u>\in F$, $<v|\in\bar{F}$ の時,

$$<0|0>=1, \quad <va_i(s)|u>=<v|a_i(s)u>$$

が成り立つ.

この定理から以下で $<v|a_i(s)|u>$, $\quad <v|\in\bar{F}$, $\quad |u>\in F$ 等と表すことができる. さて, n- 成分の current $I(z)=(I_1(z),\ldots,I_n(z))$, $\quad z\in\mathbf{C}^*=\mathbf{C}-\{0\}$ を

$$I_i(z)=\sum_{s\in\mathbf{Z}}a_i(s)z^{-s-1}$$

で定義しよう. このとき, Heisenberg 代数の交換関係は current $I_i(z)$ の間の作用素展開

$$I_i(z)I_j(\xi)\sim\frac{h}{(z-\xi)^2}\delta_{i,j}$$

と同等である. 記号 $\sim$ は $|z|>|\xi|>0$ の時, 任意の $|u>\in F$ と $<v|\in\bar{F}$ に対し $z$ の関数として

$$<v|I_i(z)I_j(\xi)|u>-\frac{h}{(z-\xi)^2}\delta_{i,j}<v|u>$$

が $z=\xi$ で正則であることを意味している. 実際には等式

$$I_i(z)I_j(\xi)=\frac{h}{(z-\xi)^2}\delta_{i,j}+:I_i(z)I_j(\xi):$$

が成立している. ここで $<v|:I_i(z)I_j(\xi):|u>$ は $z,z^{-1},\xi,\xi^{-1}$ の多項式であることを注意しておく. Boson 解析において最も重要な事実は作用素の合成[4]に関

[4]積ではない. あくまでも合成である.

する Wick の定理である. Wick の定理から導かれる公式を必要なものだけあげよう.

$$1)\quad I_i(z)I_j(\xi) = \frac{h}{(z-\xi)^2} + :I_i(z)I_j(\xi):$$

$$2)\quad I_i^2(z)I_j(\xi) = \frac{2h}{(z-\xi)^2}I_i(z) + :I_i^2(z)I_j(\xi):$$

$$3)\quad I_i^2(z)I_j^2(\xi) = \frac{2h^2}{(z-\xi)^4} : + \frac{4h}{(z-\xi)^2} : I_i(z)I_j(\xi) : + : I_i^2(z)I_j^2(\xi) :$$

最後に作用素展開と交換関係との対応について説明しておこう.

**定義 2.1** $(O_1(z), O_2(\xi))$ と $(O_2(\xi), O_1(z))$ が各々 $|z| > |\xi| > 0, |\xi| > |z| > 0$ で合成可能で $(\mathbf{C}^*)^2 - \Delta$ へ一価正則に解析接続され, かつ

$$O_1(z)O_2(\xi) = O_2(\xi)O_1(z), \quad (z,\xi) \in (\mathbf{C}^*)^2 - \Delta$$

が成り立つとき, 互いに *Bosonic* であると云う.

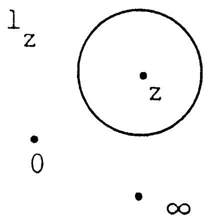
**定理 2.2** $A(z), B(z)$ を互いに *Bosonic* な *operators* とする.

$$A(z) = \sum_{n\in Z} A(n)z^{-n-\Delta_A}, \quad B(z) = \sum_{n\in Z} B(n)z^{-n-\Delta_B}$$

の時,

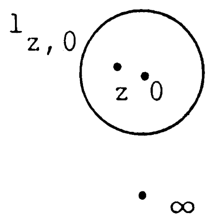
$$[A(m), B(z)] = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{l_z} dw\, w^{m+\Delta_A-1} A(w)B(z)$$

が成り立つ. ただし, $l_z$ は下図の閉曲線である:




［証明］ $A(w)B(z)$ は $z$ をとめたとき, $w=0, w=z, w=\infty$ に極をもつから,

$$A(m)B(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{l_{z,0}} dw\, w^{m+\Delta_A-1}A(w)B(z)$$




また,

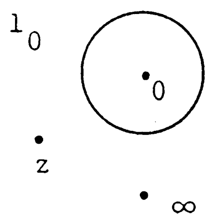
$$B(z)A(m)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{l_0} w^{m+\Delta_A-1}B(z)A(w)$$

ここで, $A(z), B(z)$ は互いに Bosonic であるから,

$$A(w)B(z)=B(z)A(w), \quad (z,w)\in(\mathbf{C}^*)^2-\Delta$$

したがって,

$$B(z)A(m)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{l_0} w^{m+\Delta_A-1}A(w)B(z)$$



以上から,

$$[A(m), B(z)] = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{l_z} dw\, w^{m+\Delta_A - 1} A(w) B(z)$$

が成り立つ.

［証明終］

## 3 量子化された Miura 変換

KdV 方程式の場合の Miura 変換を思い出そう. KdV 方程式

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x$$

は Hamilton 系として

$$u_t = \left(\frac{1}{2}\partial^3 + u\partial + \partial u\right)\frac{\delta H_2}{\delta u}, \quad H_2 = u^2$$

とあらわされていた. このとき, 考えている Poisson 構造は

$$\{f, g\} = \frac{\delta f}{\delta u}\left(\frac{1}{2}\partial^3 + u\partial + \partial u\right)\frac{\delta g}{\delta u}$$

である. 一方, MKdV 方程式

$$v_t = v_{xxx} - 6v^2 v_x$$

は

$$v_t = \left(-\frac{1}{2}\partial\right)\frac{\delta H}{\delta v}, \quad H = (v_x - v^2)^2$$

その Poisson 構造は

$$\{f, g\} = \frac{\delta g}{\delta u}\left(-\frac{1}{2}\partial\right)\frac{\delta f}{\delta u}$$

である. 今, $f$ と $g$ を $S^1$ 上の関数と同一視したとき $C^\infty(S^1, \mathrm{C})$ における Hamilton 構造

$$\{f,g\} = -\frac{1}{2}\int_{S^1} \frac{\delta f}{\delta v}(x)\partial\frac{\delta g}{\delta v}(x)\,dx$$

を定義するから、$C^\infty(S^1, \mathrm{C})$ の基底

$$e^{\sqrt{-1}nx}, \quad n \in \mathbf{N}$$

に対しては

$$\{e^{\sqrt{-1}mx}, e^{\sqrt{-1}nx}\} = \int_{S^1} e^{\sqrt{-1}mx}(-\frac{1}{2}\partial)e^{\sqrt{-1}nx}\,dx = \frac{m}{2}\delta_{m+n,0}$$

すなわち Heisenberg の交換関係である.

Miura 変換 $u = v_x - v^2$ は, MKdV の解 $v$ を KdV の解 $u$ に写すのみならず, KdV 方程式の Hamilton 構造は MKdV 方程式の Hamilton 構造をこの Miura 変換で写像したものになっている[5]. 従属変数 $u$ と $v$ の関係は常微分作用素 $D^2 + u$ の分解

$$D^2 + u = (D - v)(D + v)$$

で決っている. この事実は一般の常微分作用素

$$L = D^n + u_1(x)D^{n-1} + u_2(x)D^{n-2} + \cdots + u_{n-1}(x)D + u_n(x)$$

に対応する一般化された KdV 方程式と MKdV 方程式の間の Miura 変換

$$L = (D + v_1)(D + v_2)\cdots(D + v_n)$$

に対しても成立する. Drinfel'd と Sokolov[6] は Lie 環 $sl(n, \mathrm{C})$ から定まる微分方程式系の Lie 群 $SL(n, \mathrm{C})$ の巾零部分群が定める gauge 変換として, Miura 変換を特徴づけた.

---

[5] B.A.Kupershimidt and G.Wilson; Modifying Lax eqiations and the second Hamiltonian structure, Invent. Math. 62, 403-436(1981)

[6] Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type, J. Sov. Math.30, 1975-2036(1984)

さて, 以上のことを踏まえて Miura 変換の Boson による量子化を実行しよう[7]. 場の作用素を係数とする常微分作用素 $L(z)$ を

$$L(z) =: (\partial_z + I_1)(\partial_z + I_2)\cdots(\partial_z + I_n) : = \partial_z^n + \sum_{i=1}^{n} W_i(z)\partial^{n-i}$$

で定義しよう. 例えば $n = 2$ のとき,

$$W_1(z) = I_1 + I_2, \quad W_2(z) =: I_1 I_2 : + \partial_z I_2$$

である. この $W_i(z), \quad i = 1, 2, \ldots, n$ は代数をなすことがわかる[8]. この代数は $gl(n, \mathrm{C})$ に対応するものである. 多くの場合 $W_n$ 代数といえばこの代数を $sl(n, \mathrm{C})$ に制限したもの, つまりトレースが 0 という条件を付加したもの[9]を指す. この場合には次のような制限された current を考えることになる. $(n-1)$-component field $I^*(z) = (I_1^*(z), I_2^*(z), \ldots, I_{n-1}^*(z))$ で作用素展開

$$I_i^*(z) I_j^*(\xi) \sim \frac{h}{(z-\xi)^2}\delta_{i,j}$$

で定義されるものを考えよう. さて, $\{h_k\}_{k=1}^n, \quad h_k \in \mathbf{R}^{n-1}$ を条件[10]

$$h_i h_j = \delta_{ij} - \frac{1}{n}, \quad \sum_{i=1}^{n} h_i = 0$$

で定めよう. このとき, $I_i(z) = (h_i, I^*(z))$ とおくと[11] $n$ component の current $I(z) = (I_1(z), I_2(z), \ldots, I_n(z))$ は

$$I_i(z) I_j(\xi) \sim \frac{h}{(z-\xi)^2}(\delta_{ij} - \frac{1}{n}), \quad \sum_{i=1}^{n} I_i(z) = 0$$

---

[7] S.L.Luk'yanov; Quantization of the Gel'fand-Dikki brackets, Func. Anal. Appl. 22, 255-262(1989)

[8] 前出の Luk'yanov の文献を参照.

[9] それは微分作用素では $u_1(x) = 0$ に対応する

[10] $sl(n, \mathrm{C})$ のルート系に関係している.

[11] $n-1$ 次元 Euclid 空間での標準的な内積

を満たしている．Miura 変換を実行して $W_k$, $k = 1,2,\ldots,n$ を計算しよう．明らかに $W_1 = \sum_{i=1}^n I_i(z) = 0$ である．$W_2(z)$ は

$$W_2(z) = \sum_{i<j} : I_i I_j : + \sum_{i=1}^n (i-1)\partial_z I_i = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n : I_i^*(z)^2 : -\rho\partial_z I^*(z)$$

である． ここで $\rho = -\sum_{i=1}^n (i-1)h_i$, $\rho^2 = n(n^2-1)/12$ とした．ここで定義した $W_k$ も 2 次の関係で定まる閉じた代数系をつくることがわかっている．特に operator の合成 $W_2(z)W_2(\xi)$ は Wick の定理を使って容易に計算することができ、 Virasoro 代数を実現していることがわかる．

**定理 3.1**

$$\frac{1}{h}W_2(z)W_2(\xi) \sim \frac{(n-1)}{2}\frac{(h-n(n+1))}{(z-w)^4} - \frac{2W_2(\xi)}{(z-\xi)^2} - \frac{\partial_\xi W_2(\xi)}{z-\xi}.$$

［証明］ $W_2(z)$ の定義から

$$\begin{aligned} W_2(z)W_2(\xi) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{4} : I_i^*(z)^2 :: I_j^*(z) : \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} : I_i^*(z)^2 : \rho\partial_\xi I^*(\xi) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} : \rho\partial_z I^*(z) : I_i^*(\xi)^2 : \\ &\quad + \rho\partial_z I_1^*(z)\rho\partial_\xi I_1^*(\xi) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} &: I_i^*(z)^2 : I_j^*(\xi)^2 : \\ &\sim \frac{2h^2}{(z-\xi)^4}\delta_{i,j} + \frac{4h}{(z-\xi)^2} : \delta_{i,j} I_i^*(\xi) I_j^*(\xi) : + \frac{4h}{z-\xi}\delta_{i,j} : \partial_\xi I_i^*(\xi) I_j^*(\xi) : \end{aligned}$$

さらに,

$$\sum_{i=1}^{n} : I_i^*(z)^2 : \rho\partial_\xi I^*(\xi) \sim \frac{4h}{(z-\xi)^3}\rho I^*(\xi) + \frac{4h}{(z-\xi)^2}\rho\partial_\xi I^*(\xi) + \frac{2h}{z-\xi}\partial_\xi^2 I_1^*(\xi)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \rho\partial_z I^*(z) : I_i^*(\xi)^2 :\sim \frac{4h}{(z-\xi)^3}\rho I^*(\xi)$$

$$\rho\partial_z I^*(z)\rho\partial_\xi I^*(\xi) \sim -\frac{6h}{(z-\xi)^4}\rho^2$$

が成り立つから, 求める結論を得る.

[証明終]

特に

$$L_i = -\frac{1}{h}\oint \frac{dz}{2\pi i} z^{i+1} W_2(z)$$

とおくと, Virasoro 代数の交換関係

$$[L_i, L_j] = (i-j)L_{i+j} + \frac{(n-1)}{12}\left(1 - \frac{n(n+1)}{h}\right)(i^3 - i)\delta_{i+j,0}$$

を得る. すなわち,

定理 **3.2** central charge

$$c = (n-1)\left(1 - \frac{n(n+1)}{h}\right)$$

の Virasoro 代数は $W_n$ 代数の subalgebra として実現される.

注意 **3.1** *Fock*空間を定めるときに

$$a_i(0)|0>=\mu_i, \quad i=1,\ldots,n-1$$

とすると

$$L_0=\frac{1}{h}\sum_{i=1}n-1\sum_{s\in\mathbf{Z}}:a_i(s)a_i(-s):+\frac{1}{h}sum_{i=1}nh_i\ldots(a_1(0),\cdots,a_{n-1}(0))$$

に注意すると

$$L_0|0>=\frac{1}{2h}(\mu-2\rho\mu)$$

を得る.

注意 **3.2** 古典近似を

$$\hat{L}_i\stackrel{\mathrm{def}}{=}hL_i, \quad [\hat{L}_i,\hat{L}_j]\stackrel{\mathrm{def}}{=}\lim_{h\to 0}[hL_ihL_j]/h$$

と定義しよう. この交換子で centrral charge $c=n-n^3$ の Virasoro 代数をえる. これは Khovanova が示した Virasoro 代数の Gel'fand-Dikii 代数への埋め込に他ならない[12].

## 4 $W_n$ 代数の幾何学的アプローチ

A.Bilal, V.V.Fock, I.I.Kogan によって $W_n$ 代数の幾何学的な構成が与えられている. そこではリーマン面上の $SL(n,\mathbf{C})$ 接続のモジュライの空間の Chern-Simons 作用から導かれる Poisson 構造の parabolic subgroup の作用による Hamiltonian Reduction として $W_n$ 代数が得られている. 詳しくは「On the origin of W-algebras, Nuclear Physics B359,635-672(1991)」を参考にされたい.

[12] Gel'fand-Dikii Lie algebras and the Virasoro algebra, Func. Anal. Appl. 20, 89-90(1986)