

関数空間上の連続汎関数について

筑波大学数学系 森下和彦 (Kazuhiko Morishita)

1 序

本稿では、空間は全てチコノフとする。また記号 $C_k(X)$ で、空間 X 上の実数値連続関数全体からなる集合にコンパクト開位相を導入した空間をあらわすこととし、 $C_k(X)$ 上の実数値関数を汎関数と云うことにする。

さて、1991年10月22日に当研究所で行われた研究会において、次の定理を公表した。

定理 1. ([2]) 関数空間 $C_p(X)$ 上の任意の連続汎関数に対して、その最小なサポート S が存在し、 S は可分となる。(但し $C_p(X)$ は、空間 X 上の実数値連続関数全体からなる集合に点別収束位相を導入した空間をあらわすものとする。)

定理 2. ([3]) 関数空間 $C_k(X)$ 上の任意の連続汎関数に対して、その最小なサポートが存在する。

ここで、サポートの定義を述べる。

定義 S を X の閉集合、 ξ を $C_k(X)$ 上の汎関数とする。 $C_k(X)$ の勝手な 2 元 f, g に対し、 $f|_S = g|_S$ であれば $\xi(f) = \xi(g)$ となる時、 S を ξ のサポートと云う。

上の 2 つの定理を比較して、自然に以下の疑問が生ずる。

「定理 2 でのサポートは σ -コンパクトな稠密部分集合を含むのだろうか？」

この疑問をふまえて、ここで定義を行う。

定義 空間 X が σ -コンパクトな稠密部分集合を含むとき、 X を概 σ -コンパクトと云う。また空間 $C_k(Y)$ 上の任意の連続汎関数の最小なサポートが概 σ -コンパクトとなる時、空間 Y は性質 (σ) をもつと云う。

昨年の講演で空間 X が性質 (σ) をもつ為の十分条件の一つを話したが、その後、性質 (σ) をもたない空間の例等、若干の結果が得られたので併せてここで証明を付して紹介する。

2 記号等

ここで、必要となる記号等を定義しておく。

X 上の連続関数 f と X の部分集合 M に対して、 f の M への制限を $f|_M$ とあらわし、 π_M を $C_k(X)$ の元 f に対し $\pi_M(f) = f|_M$ で定まる $C_k(X)$ から $C_k(M)$ への制限写像とする。また $C_k(X)$ の元 f と X のコンパクト集合 K 、及び正数 ε に対して

$$\langle f, K, \varepsilon \rangle = \{g \in C_k(X) : \text{任意の } x \in K \text{ に対し } |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$$

とおく。更に、 $C_k(X)$ の基本開集合 $U = \langle f, K, \varepsilon \rangle$ に対して、 $\text{supp}(U) = K$ とおく。 \mathbf{R} 、 ω 及び ω_1 はそれぞれ実数直線、最小の無限順序数、及び最小の非可算順序数をあらわすものとする。

3 諸結果

まず、性質 (σ) をもつ為の十分条件を挙げる。

定理 3. ([2]) 関数空間 $C_k(X)$ が可算鎖条件を充たせば、 X は性質 (σ) をもつ。

この定理を証明する為に次の補題を必要とする。

補題 4. D を可算鎖条件を充たす、関数空間 $C_k(S)$ の稠密部分集合とし、 ρ を D 上の実数値連続関数とする。このとき以下の性質 $(*)$ を持つ S の σ -コンパクト部分集合 A がある。

$(*)$: D の任意の元 f_1, f_2 に対し、 $f_1|_A = f_2|_A$ であれば $\rho(f_1) = \rho(f_2)$ が成り立つ。

補題 4 の証明 $\{B_n : n \in \omega\}$ を \mathbf{R} の開基とし、 γ_n を $\cup \gamma_n \subset \rho^{-1}(B_n)$ となるような、 D の空でない基本開集合からなる、互いに素な集合族のうち極大なものとする。 γ_n の極大性により $\cup \gamma_n$ は $\rho^{-1}(B_n)$ で稠密となる。

$$A = \cup \{ \text{supp}(U) : U \in \cup \{ \gamma_n : n \in \omega \} \}$$

とおく ($\text{supp}(U)$ の定義は、第 1 節を見よ)。 D は可算鎖条件を充たすので、 A は σ -コンパクトとなる。性質 $(*)$ を A が持つことを云う為に、 D の勝手な元 f_1, f_2 に対し $f_1|_A = f_2|_A$ であって、かつ、ある $n \in \omega$ で $f_1 \in \overline{\cup \gamma_n}$ となるならば $f_2 \in \overline{\cup \gamma_n}$ なることを示す。 S のコンパクト部分集合 K と正数 ε をとる。 $f_1 \in \overline{\cup \gamma_n}$ となっているから、ある γ_n の元 U と D の元 g_1 があって $g_1 \in \langle f_1, K, \varepsilon \rangle \cap U$ を充たす。ここで V を $C_k(S)$ の基本開集合で、 $\text{supp}(V) = \text{supp}(U)$ かつ $U = V \cap D$ となるものとする。ここで、 $r|_{\text{supp}(U)} = 0$ かつ $r|_{\{x \in S : |g_1(x) - f_2(x)| \geq \varepsilon\} \cap K} = 1$ となる写像 $r : S \rightarrow [0, 1]$ をとり $g_2 = f_2 \times r + g_1 \times (1 - r)$ とおくと、 $g_2 \in \langle f_2, K, \varepsilon \rangle$ となり、更に $g_2|_{\text{supp}(U)} = g_1|_{\text{supp}(U)}$

となることから $g_2 \in V$ が云える。 D は $C_k(S)$ で稠密であったから $\langle f_2, K, \varepsilon \rangle \cap U \neq \emptyset$ となる。(Q.E.D.)

定理 3 の証明 ξ を $C_k(X)$ 上の連続汎関数、 S を ξ の最小なサポートとし $D = \pi_S(C_k(X))$ とおく。このとき D 上に、 $\xi = \rho \circ \pi_S$ となるような実数値連続関数 ρ が存在する。 D と ρ が補題 4 の条件を充たすことは明らかだから、補題 4 によって性質 (*) を持つような S の σ -コンパクト部分集合 A が存在する。明らかに \bar{A} は ξ のサポートとなるから S の最小性により、 $S = \bar{A}$ を得る。(Q.E.D.)

Vidossich [5] と Nakhmanson [4] は X が submetrizable であれば $C_k(X)$ が可算鎖条件を充たすことを示しているので、以下の系を得る。

系 5. X が submetrizable (特に、距離化可能) であれば、 X は性質 (σ) をもつ。

Nakhmanson [4] は $C_k(\omega_1)$ が可算鎖条件を充たさないことを示している。しかし、以下が成り立つ。

命題 6. ([3]) 空間 ω_1 は性質 (σ) をもつ。

証明 任意の $C_k(\omega_1)$ 上の連続汎関数 ξ が可算なサポートをもつことを示せば十分だから、これを背理法により示す。そのために、ある正数 ε が存在して、任意の $\alpha < \omega_1$ に対し、以下の 2 条件、(a) と (b) を充たすような関数 f_α と g_α を $C_k(\omega_1)$ のなかにとることが出来るということを仮定する。

$$(a) f_\alpha|_{[0, \alpha]} = g_\alpha|_{[0, \alpha]}$$

$$(b) |\xi(f_\alpha) - \xi(g_\alpha)| > 2\varepsilon$$

Gul'ko [1] は $C_k(\omega_1)$ が Lindelöf であることを示しているので、ネット $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ は集積点 h を $C_k(\omega_1)$ の中にもつ。 ξ の連続性によって、ある $\beta < \omega_1$ と正数 δ が

存在して、 $\langle h, [0, \beta], \delta \rangle$ の勝手な元 f に対して $|\xi(f) - \xi(h)| < \varepsilon$ が成り立つ。 $\gamma < \omega_1$ を $\beta < \gamma$ かつ $f_\gamma \in \langle h, [0, \beta], \delta \rangle$ を満たすようにとる。このとき (a) によって $g_\gamma \in \langle h, [0, \beta], \delta \rangle$ が成り立つが、これは (b) に反する。(Q.E.D.)

特別な場合に対しては、空間が性質 (σ) をもつことの必要条件を得ることが出来る。ここで、位相不変量を定義する。

定義 空間 X に対し、

$$cd(X) = \min\{\tau : \tau \text{ は濃度で、各 } \alpha < \tau \text{ に対し、} X \text{ のコンパクト部分集合 } K_\alpha \text{ が存在して、} X = \overline{\cup\{K_\alpha : \alpha < \tau\}}\}$$

と定める。

次の補題はよく知られている。

補題 7. K をコンパクト空間とすると、 $C_k(K)$ が可分ならば K は距離化可能である。

定理 8. ([3]) X を $cd(Y) = \omega_1$ であるような、開かつ閉な部分空間 Y を含む空間とする。 X が性質 (σ) をもつならば、 X の任意のコンパクト部分集合は距離化可能である。

証明 X が距離化可能でないコンパクト部分集合 K を含むことを仮定して矛盾を導く。 $C_k(K)$ は距離化可能となるが、補題 7 によって、可分とならない。従って、各 $\alpha < \omega_1$ に対して、集合族 $\{\xi_\alpha^{-1}((0, 1)) : \alpha < \omega_1\}$ が疎となるような非定値連続関数 $\xi_\alpha : C_k(K) \rightarrow [0, 1]$ が存在する。また $cd(Y) = \omega_1$ が仮定されているから、各 $\alpha < \omega_1$ に対して、空でない Y のコンパクト部分集合 K_α が存在して、 $Y = \overline{\cup\{K_\alpha : \alpha < \omega_1\}}$ となる。 $C_k(X)$ の各元 f と各 $\alpha < \omega_1$ に対して、

$$s(f, \alpha) = \sup\{|f(x)| : x \in K_\alpha\}$$

とおく。 $C_k(X)$ 上の汎関数 ξ を $C_k(X)$ の各元 f に対して、

$$\xi(f) = \sum \{s(f, \alpha) \times \xi_\alpha(\pi_K(f)) : \alpha < \omega_1\}$$

と定めることにより、定義すると ξ は連続となることが判る。以下、 ξ のサポートは概 σ -コンパクトとならないことを示す。 S を ξ のサポートとする。ここで、ある $\beta < \omega_1$ と K_β の点 x が存在して、 $x \notin S \cup K$ となったと仮定する。 $f|_K \in \xi_\beta^{-1}((0, 1])$ となる $C_k(X)$ の元 f をとる。 $f|_{S \cup K} = g|_{S \cup K}$ かつ $g(x) = s(f, \beta) + 1$ となるような $C_k(X)$ の元 g が存在する。このとき、

$$\xi(g) - \xi(f) = s(g, \beta) \times \xi_\beta(\pi_K(g)) - s(f, \beta) \times \xi_\beta(\pi_K(f)) \neq 0$$

となるから、これは $f|_S = g|_S$ であって、かつ、 S がサポートであることに反する。従って、

$$Y = \overline{\cup \{K_\alpha : \alpha < \omega_1\}} \subset S \cup K$$

をうる。 S が概 σ -コンパクトであれば、明らかに $S \cup K$ も概 σ -コンパクトとなり、また Y は $S \cup K$ の開かつ閉な部分集合であるから、概 σ -コンパクトとなる。これは $cd(Y) = \omega_1$ であることに反する。(Q.E.D.)

定理 8 によって、性質 (σ) をもたない空間の例を挙げることが出来る。

例 空間 $\omega_1 \oplus \omega_1 + 1$ 、 $D(\omega_1) \oplus \omega_1 + 1$ 及び $L(\omega_1) \oplus \omega_1 + 1$ はいずれも性質 (σ) をもたない。但し、 $D(\omega_1)$ は濃度 ω_1 の離散空間、 $L(\omega_1)$ は $D(\omega_1)$ の 1 点 Lindelöf 化とする。

注意 上の例において、 ω_1 、 $D(\omega_1)$ 、 $L(\omega_1)$ 、 $\omega_1 + 1$ はいずれも性質 (σ) をもつことが云えるから、空間が性質 (σ) をもつことは一般に位相和で保たれないことが判る。またコンパクト空間は明らかに性質 (σ) をもつが、 $\omega_1 \oplus \omega_1 + 1$ は可算コンパクトかつ局所コンパクト、 $L(\omega_1) \oplus \omega_1 + 1$ は Lindelöf となるから空間のコンパクト性をこれらの条件に弱めることは出来ないことが判る。更に、空間 $D(\omega_1) \oplus \omega_1 + 1$ はパラコンパクト M であって、性質 (σ) をもたない例となっている。

参考文献

- [1] S. P. Gul'ko, *On properties of some function spaces*, Soviet Math. Dokl., Vol. 19, 1978, pp. 1420 - 1424.
- [2] K. Morishita, *The minimal support for a continuous functional on a function space*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 114, No. 2, 1992, pp. 585-587.
- [3] K. Morishita, *The minimal support for a continuous functional on a function space II*, Tsukuba J. Math., Vol. 16, No. 2, 1992, pp. 495-501.
- [4] L. B. Nakhmanson, *The Souslin number and caliber of rings of continuous functions*, Izvestiya VUZ. Matematika, Vol. 28, 1984, pp. 49 - 55.
- [5] G. Vidossich, *Function spaces which are pseudo- \aleph -compact spaces*, preprint 1972.