

高次 KdV 方程式が近似する長い水面波

阪大理 鹿野 忠良 (KANO Tadayoshi)

1. 本稿では, 非斉次 (第一) 高次 KdV 方程式が (1.1) が, 長い水面波に対する (第三) 近似を与える事を示す:

$$(1.1) \quad v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{5}{2} v^3 + 5A v v_{xx} + \frac{5}{2} A v_x^2 + A v_{xxxx} \right)_x = R_1,$$

ここに R_1 は, 夫々が KdV 方程式の解である f_1, g_1, w_1 等の微分多項式であり, また $A = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{5} \delta^2 \right)$.

a) (水深/波長)² \cong (波高/水深) を表わす無次元パラメータ δ^2 で量る時, 11 巾の長い水面波の第一近似は, 有限振幅の波に \rightarrow 11 2 も, 線型波動方程式

$$(1.2) \quad v_{tt} - v_{xx} = 0, \quad O(\delta^2) \text{ の誤差,}$$

で与えられる; また, KdV 方程式

$$(1.3) \quad v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{3}{2} v^2 + A v_{xx} \right)_x = 0$$

は $O(\delta^4)$ 誤差の二次近似を与える [1]。今, $V_0 = v$ から出発し2次の漸化式で定義される, いわゆる KdV-hierarchy $\{V_n\}$ を考える:

$$(1.5) \quad V_{n+1,x} = v_x V_n + 2v V_{n,x} + A V_{n,xxx}, \quad n \geq 1.$$

本稿は, この KdV hierarchy に対応する, 外力 R_1 をもつ最初の高次 KdV 方程式

$$v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2} V_{2,x} = R_1, \quad \text{i.e. (1.1)},$$

が, $O(\delta^6)$ 誤差で三次近似を与える事を示すのである。ここでは述べないが, 実は

$$v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2} V_{3,x} = R_1$$

の形の, 非斉次(第=)高次 KdV 方程式が, 長い水面波の $O(\delta^8)$ 誤差の近似を与える事もわかる。

6) 他に, 積分可能系である Kaup 方程式・Sawata-Kotera 方程式とも呼ばれる高次 KdV 方程式連が, しばしば「水面波のモデル方程式」と呼ばれる [3]。しかし本稿では, 積分可能系である

$$(1.6) \quad v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2} V_{2,x} = 0$$

ではなく, 外力 R_1 をもつ (1.1) が実際に長い水面波を近似する事を言) のである。

2. 長い水面波。長い水面波は, 水深 h , 波長 λ および波高 α の間に次の関係を有する: $\lambda \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow 0$ の時

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 = \delta^2 \sim \varepsilon = \frac{\alpha}{h} \text{ as infinitesimals.}$$

無次元化した方程式は, 速度ポテンシャル φ と水面 $y = 1 + \delta^2 \gamma$ に対し, 次の通りである:

$$(2.1) \quad \delta^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad \Omega = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1 + \delta^2 \gamma\}$$

$$(2.2) \quad \varphi_y = 0, \quad y = 0$$

$$(2.3) \quad \left. \begin{aligned} \varphi_t + \delta^2 \varphi_x^2 + \gamma + \frac{1}{2} \varphi_y^2 &= 0 \\ \gamma_t + \delta^2 \gamma_x \varphi_x - \delta^{-2} \varphi_y &= 0 \end{aligned} \right\} y = 1 + \delta^2 \gamma$$

$$(2.4)$$

この方程式系は以下に述べる解析関数のバナッハ空間のスケール X で, 局所時間に対し解かれている [2]; 亦, [4] [5], [6] を参照: $X = \bigcup_{\rho > 0} B_\rho$,

$$B_\rho = \left\{ u(z); z = x + iy, x \in \mathbb{R}, |y| < \rho, \text{ の正則関数} \right. \\ \left. \|u\|_\rho = \|\hat{u}(\xi)(1 + |\xi|) e^{\rho|\xi|}\|_{L^2} < +\infty \right\}$$

ここで $\hat{u}(\xi)$ は $u(x)$ の Fourier 変換で、

$$\|u\|_p^2 \sim \sup_{|\xi| < \rho} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x+i\xi)|^2 dx$$

である。すなわち、初期値

$$(2.5) \quad \gamma(0, x) = \gamma_0(x) > 0, \quad \varphi(0, x, y) = \varphi_0(x, y)$$

を B_{ρ_0} , $\rho_0 > 0$, $t \leq T$ 時, (2.1) - (2.4) の解 $\{\gamma(t, x), \varphi(t, x, y)\} \in B_{\rho} \times B_{\rho}$, $0 < \rho < \rho_0$, かつ, $|t| < \alpha(\rho_0 - \rho)$ に対して存在する。ここで, $u \in B_{\rho}$ を \mathbb{R}^1 上に制限すると, $\forall \rho$ に対して $u \in H^k(\mathbb{R}^1)$ である事に注意しておく。

ここで, 水面に於ける速度 $\bar{\varphi}_x \equiv \varphi_x(t, x, y=1+\delta^2\gamma)$ と γ によって, f, g を次の定義する:

$$f = \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\varphi}_x), \quad g = \frac{1}{2}(\gamma - \bar{\varphi}_x).$$

今, 初期値 (2.5) を

$$(2.6) \quad f(0) = O(1), \quad g(0) = O(\delta^2)$$

をみたす様に δ を選ぶ; すなわち流速の分布が水面の形に比較的に近い場合を立している (初期時刻で)。

本稿の結論は次の定理である:

定理 (1.1) に対する初期値問題

$$v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{5}{2} v^3 + 5A v v_{xx} + \frac{5}{2} A v_x^2 + A v_{xxxx} \right)_{xx} = R_1$$

$$v(0) = f(0) \in B_{p_0}, \quad R_1 \in H^5(\mathbb{R}^1)$$

は, $\forall T > 0$ に対して

$$C^0([0, T]; H^5(\mathbb{R}^1)) \cap C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}^1))$$

に属する解をもち, 次が成立:

$$\|f(t) - v(t)\|_{H^5(\mathbb{R}^1)} = O(\delta^6), \quad \|f_t(t) - v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} = O(\delta^6),$$

$$|t| < a(p_0 - p), \quad 0 < p < p_0.$$

注意 定理はさ(あたり), (1.1)が, "R'上へ制限された" 長い水面波の近似方程式を与える事を言っており, 一次近似 (1.2), 二次近似 (1.3) より弱い結果である。

3. $f = \frac{1}{2}(v + \bar{\varphi}_x), \quad g = \frac{1}{2}(v - \bar{\varphi}_x)$ が満たす方程式。

水面 $y = 1 + \delta^2 \gamma$ 上

$$u \equiv \bar{\varphi}_x \longmapsto \bar{\varphi}_y = \varphi_y(t, x, y = 1 + \delta^2 \gamma)$$

を与える, 所謂 Dirichlet-Neumann mapを用いて, 方程式 (1.3) - (1.4) を δ^2 に関して展開する:

$$(1.3)' \quad v_t + u_x + \delta^2 \left((vu)_x + \frac{1}{3} u_{xxx} \right) + \\ + \delta^4 \left((vu_x)_{xx} + \frac{2}{15} u_{xxxx} \right) = O(\delta^6),$$

$$(1.4)' \quad u_t + v_x + \delta^2 uu_x - \delta^4 u_x u_{xx} = O(\delta^6),$$

剰余項評価は $O(\delta^6)$ in B_p , である。上の展開は、一次近似の波が伝播する方向, (1,1) の特性方向, に伝播する f, g に対応する, 下の展開を与える:

$$(3.1) \quad f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{3}{2} f^2 + \frac{1}{3} f_{xx} \right)_x + \\ + \frac{\delta^4}{2} \left(ff_{xx} + \frac{1}{2} f_x^2 + \frac{2}{15} f_{xxxx} \right)_x = \\ = \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{3}{2} g^2 + \frac{1}{3} g_{xx} \right)_x + \frac{\delta^2}{2} ((f-g)g)_x + O(\delta^6),$$

$$(3.2) \quad g_t - g_x - \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{3}{2} g^2 + \frac{1}{3} g_{xx} \right)_x = \\ = -\frac{\delta^2}{2} \left(\frac{3}{2} f^2 + \frac{1}{3} f_{xx} \right)_x - \\ - \frac{\delta^4}{2} \left(ff_{xx} + \frac{1}{2} f_x^2 + \frac{2}{15} f_{xxxx} \right)_x - \\ - \frac{\delta^2}{2} ((g-f)f)_x + O(\delta^6).$$

4. $\underline{H_1 = \frac{3}{2} f^2 + \frac{1}{3} f_{xx}}$ の近似。

$H_0 = f$ から出発して

$$H_{n+1,x} = f_x H_n + 2f H_{n,x} + \frac{1}{3} H_{n,xxx}, \quad n \geq 1$$

が定義する KdV hierarchy は,

$$H_0 = f$$

$$H_1 = \frac{3}{2} f^2 + \frac{1}{3} f_{xx}$$

$$H_2 = \frac{5}{2} f^3 + \frac{5}{3} f f_{xx} + \frac{5}{6} f_x^2 + \frac{1}{9} f_{xxxx},$$

⋮

であるが、次が成立:

Prop. $H_{1,x} = H_{2,x} + (f_x w_1 + 2f w_{1,x} + \frac{1}{3} w_{1,xxx}) + O(\delta^4)$

ここに, w_1 は線型化 KdV 方程式の初期値問題の解 $\in B_p$:

$$\begin{cases} w_{1,t} + w_{1,x} + \frac{\delta^2}{2} (3f w_{1,x} + \frac{1}{3} w_{1,xxx}) = 0 \\ w_1(0) = f(0) - H_1(0) \end{cases}$$

証明 $f = \frac{1}{2}(\gamma + u)$ は (3.1) を H_2 から

$$f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2} (3f f_x + \frac{1}{3} f_{xxx}) = O(\delta^4).$$

他方, \bar{H}_1 は次の方程式をみたす事か, 再び (3.1) に注意すれば, わかる:

$$\bar{H}_{1,t} + \bar{H}_{1,x} + \frac{\delta^2}{2} (3f \bar{H}_{1,x} + \frac{1}{3} \bar{H}_{1,xxx}) = O(\delta^4).$$

故に $W_1 \equiv f - \bar{H}_1$ は次の Cauchy 問題の解である:

$$\begin{cases} W_{1,t} + W_{1,x} + \frac{\delta^2}{2} (3f W_{1,x} + \frac{1}{3} W_{1,xxx}) = O(\delta^4) \\ W_1(0) = f(0) - \bar{H}_1(0). \end{cases}$$

今 Cauchy prob.

$$\begin{cases} w_{1,t} + w_{1,x} + \frac{\delta^2}{2} (3f w_{1,x} + \frac{1}{3} w_{1,xxx}) = 0 \\ w_1(0) = W_1(0) \end{cases}$$

を $X = \bigcup_{\rho > 0} B_\rho$ の解とし, 解 w_1 を W_1 と比較すれば, 右辺に関する連続性から

$$\|w_1(t) - W_1(t)\|_\rho = O(\delta^4)$$

が従う。すなわち

$$f(t) = \bar{H}_1(t) + w_1(t) + O(\delta^4) \text{ in } B_\rho.$$

これを定義式に代入すれば,

$$\begin{aligned}
 \bar{H}_{1,x} &= 3ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx} = \\
 &= f_x f + 2ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx} = \\
 &= f_x (\bar{H}_1 + w_1 + O(\delta^4)) + \\
 &\quad + 2f (\bar{H}_{1,x} + w_{1,x} + O(\delta^4)) + \\
 &\quad + \frac{1}{3} (\bar{H}_{1,xxx} + w_{1,xxx} + O(\delta^4)) = \\
 &= \bar{H}_{2,x} + (f_x w_1 + 2f w_{1,x} + \frac{1}{3} w_{1,xxx}) + O(\delta^4).
 \end{aligned}$$

c.q.f.d.

5. 前節の結果: \bar{H}_1 の \bar{H}_2 による近似, を (3.1) の $O(\delta^2)$ の項に代入すると, f が次の方程式を満たす事がわかる:

$$\begin{aligned}
 &f_t + f_x + \\
 &+ \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{5}{2} f^3 + \left(\frac{5}{3} + \delta^2 \right) f f_{xx} + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} + \delta^2 \right) f_x^2 + \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{15} \delta^2 \right) f_{xxx} \right)_x = \\
 &= \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{3}{2} g^2 + \frac{1}{3} g_{xx} \right)_x + \frac{\delta^2}{2} ((f-g)g)_x - \\
 &\quad - \frac{\delta^2}{2} \left(f_x w_1 + 2f w_{1,x} + \frac{1}{3} w_{1,xxx} \right) + O(\delta^6),
 \end{aligned}$$

すなわち,

$$A = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{5} \delta^2 \right)$$

を用いて,

$$\begin{aligned} & f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{5}{2} f^3 + 5A f f_{xx} + \frac{5}{2} A f_x^2 + A^2 f_{xxxx} \right)_x = \\ (5.1) \quad & = \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{3}{2} g^2 + \frac{1}{3} g_{xx} \right)_x + \frac{\delta^2}{2} \left((f-g)g \right)_x - \\ & - \frac{\delta^2}{2} \left(f_x w_1 + 2f w_{1,x} + \frac{1}{3} w_{1,xxx} \right) + O(\delta^6) \end{aligned}$$

in B_p .

今, (5.1) の右辺を $R + O(\delta^6)$ とかく時, 既知函数 $R_1 \in B_p$ を

$$(5.2) \quad \| R - R_1 \|_p = O(\delta^6)$$

ととる事が出来れば, 2の R_1 をもつ

$$(5.3) \quad v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{5}{2} v^3 + 5A v v_{xx} + \frac{5A}{2} v_x^2 + A^2 v_{xxxx} \right)_x = R_1$$

をつくれれば, 2節に述べた定理を得る。次節に, R_1 をどうとるかをはべる。

6. R の近似。一次近似 f_0, g_0 : それぞれ

$$(6.1) \quad f_{0,t} + f_{0,x} = 0, \quad f_0(0) = f(0)$$

および

$$(6.2) \quad g_{0,t} - g_{0,x} = 0, \quad g_0(0) = g(0)$$

の解, は次をみたす:

$$\|f(t) - f_0(t)\|_p = O(\delta^2), \quad \|g(t) - g_0(t)\|_p = O(\delta^2).$$

次に, 二次近似 f_1, g_1 : 夫々, 次の Cauchy 問題の解:

$$(6.3) \quad \begin{cases} f_{1,t} + f_{1,x} + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{3}{2} f_1^2 + \frac{1}{3} f_{1,xx} \right) = 0 \\ f_1(0) = f(0) \end{cases}$$

$$(6.4) \quad \begin{cases} g_{1,t} - g_{1,x} - \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{3}{2} g_1^2 + \frac{1}{3} g_{1,xx} \right) = \\ = -\frac{\delta^2}{2} \left(\frac{3}{2} f_0^2 + \frac{1}{3} f_{0,xx} \right) - \frac{\delta^2}{2} \left((g_0 - f_0) f_0 \right) \\ g_1(0) = g(0) \end{cases},$$

は, 次をみたす:

$$(6.5) \quad \|f(t) - f_1(t)\|_p = O(\delta^4), \quad \|g(t) - g_1(t)\|_p = O(\delta^4).$$

これ等の f_1, g_1 をもとて R_1 を次の式で定義する:

$$R_1 = \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{3}{2} g_1^2 + \frac{1}{3} g_{1,xx} \right)_x + \frac{\delta^2}{2} \left((f_1 - g_1) g_1 \right)_x - \left(f_{1,x} w_1 + 2 f_1 w_{1,x} + \frac{1}{3} w_{1,xxx} \right),$$

$$R_1 \in B_p [2].$$

この R_1 をもとて (5.3) をつくれば, 次節で示すように

$$(6.6) \quad \begin{cases} (5.3) \\ v(0) = f(0) \end{cases}$$

は

$$(6.7) \quad C^0([0, T]; H^5(\mathbb{R}^1)) \cap C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}^1))$$

で解をもつから, 再び $f - v$ に対する初期値問題を解いて右辺に関する連続性を用いる事によつて定理を得る。

注意: 上で定義した R_1 の存在は, 実際には, 高さ $|t| < a\delta$ のしか保障されない。従つて定理の述べは不正確である。要は, 近似される時間はちがまらぬ事, が大事な点である。

を計算する。ここに $\{V_n\}$ は, $V_0 = v$ から出発して (1.5) が定義する KdV hierarchy である。

ここから実際,

$$\|R_n\|_{H^5(\mathbb{R}^1)} \leq N$$

とする時,

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}(t)\|_{L^2}^2 + 2\varepsilon \int_0^t e^{t-s} \|\tilde{v}_{xx}(s)\|_{L^2}^2 ds &\leq \\ &\leq e^t \|\tilde{v}(0)\|_{L^2}^2 + N(e^t - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_x(t)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \int_0^t e^{t-s} \|\tilde{v}_{xxx}(s)\|_{L^2}^2 ds &\leq \\ &\leq e^t \|\tilde{v}_x(0)\|_{L^2}^2 + e^{\frac{10}{3}t} c(N, \|\tilde{v}(0)\|_{L^2}^2), \end{aligned}$$

等式を得る。

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T.Kano-T.Nishida: A mathematical justification for Korteweg-de Vries equation and Boussinesq equation of water surface waves, Osaka J.Math., 23(1986),389-413.
- [2] T.Kano : Une théorie trois-dimensionnelle des ondes de surface de l'eau et le développement de Friedrichs, J.Math.Kyoto Univ., 26(1986), 101-155,157-175.
- [3] S.Kichenassamy-P.J.Olver: Existence and nonexistence of solitary wave solution to higher order model evolution equation,SIAM J.Math.Anal., 23(1992),1141-1166.
- [4] L.V.Ovsjannikov: A nonlinear Cauchy problem in a scale of Banach spaces, Dokl.Akad.Nauk SSSR,200 (1971)=Soviet Math.Dokl.,12(1971),1497-1502.
- [5] V.I.Nalimov: A priori estimates of solutions of elliptic equations in the class of analytic functions and their applications to the Cauchy-Poisson problem,Dokl.Akad.Nauk SSSR,189 (1969)=Soviet Math.Dokl.,10(1969),1350-1354.
- [6] T.Kano-T.Nishida: Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde, J.Math. Kyoto Univ.,19(1979),335-370.