数理解析研究所講究録
825巻 1993年 43-62

Bergman 空間上の乗法作用素

大野 修一 (Shûichi Ohno)

1. 序論

Dを単位開円板とし、$dA(z)$をD上の正規化されたLebesgue測度とする。$0<p<\infty$に対して, $L^p=L^p(D,dA)$をLebesgue可測な関数fで

$$\int_D |f(z)|^p dA(z)$$

が有限なものの集合とする。$L^\infty=L^\infty(D)$をD上有界な関数全体とする。

$f\in L^p$に対して、

$$\|f\|_p=\begin{cases}\int |f|^p dA & , \quad 0<p<1\\ \left(\int |f|^p dA\right)^{1/p} & , \quad 1\leq p<\infty\\ \sup_{z\in D}|f(z)| & , \quad p=\infty\end{cases}$$

とおくと、L^pは$d(f,g)=\|f-g\|_p$ $(f,g\in L^p)$によって定義された距離により完備な距離空間となる。

$0<p<\infty$に対して、L^p_aをL^pの関数でD上解析的なものの

集合とする。L_a^p は一般に Bergman 空間と言われる。H^∞をD上の有界な解析関数の空間とする。

Bergman 空間上の Toeplitz, Hankel 作用素といった作用素の研究が最近活発に行なわれている。それらの特徴付けが Bloch 空間等の Besov 空間に関係しているという興味深い面を持っている。ここでは、乗法作用素についての有界性や compactness の特徴付けをまとめてみる。そのためには、次のような Bergman 位相の概念を道具として必要とする。

単位開円板 D の任意の λ に対して、φ_λ を D 上の Möbius 変換 $\varphi_\lambda(z) = (\lambda - z)/(1-\bar{\lambda}z)$ $(z \in D)$ とする。D 上の pseudo-hyperbolic distance ρ はこの変換を使って $\rho(z,w) = |\varphi_z(w)|$ $(z, w \in D)$ と定義される。D 上の関数空間の性質を考えるとき、一般にこの距離が使われている（[3 : 1章]）が、ここでは、次の Bergman 位相 $\beta(\cdot,\cdot)$ を使う：

$$\beta(z,w) = \frac{1}{2}\log(1+\rho(z,w))/(1-\rho(z,w)) \quad , \ z, w \in D .$$

このとき、Möbius 変換 φ に対して $\beta(\varphi(z), \varphi(w)) = \beta(z,w)$ である。

任意の $z \in D$ と $r > 0$ に対して

$$D(z,r) = \{ w \in D : \beta(z,w) < r \}$$

を Bergman metric disk とする。$D(z,r)$ は次の中心 C と半径 R を持つユークリッドの意味での円とみなせる：

$$C=(1-s)z/(1-|z|^2s^2),\quad R=(1-|z|^2)s/(1-|z|^2s^2)$$

ただし、$s=(e^r-e^{-r})/(e^r+e^{-r})\in(0,1)$。

集合Eに対して、$|E|$を(Eの面積)$/\pi$ とする

2．補題

この節では、後で使われる補題をまとめておく([12]参照)。

[補題2.1] (1) 任意の $z\in D$, $r>0$に対して,

$$|D(z,r)|=(1-|z|^2)^2s^2/(1-|z|^2s^2)^2$$

(2) 任意の$R>0$ に対して、次の条件を満たす定数$C>0$ が存在する： $\beta(z,w)\leqq R$, $r\leqq R$に対して,

$$C^{-1}\leqq|D(z,r)|/|D(w,r)|\leqq C\ .$$

[補題2.2] 次の条件を満たす自然数Nが存在する：任意の$r\leqq 1$に対して、次のような点列$\{\lambda_n\}(\subset D)$が存在する.

(1) $D=\bigcup_{n=1}^{\infty}D(\lambda_n,r)$

(2) $D(\lambda_n,r/4)\cap D(\lambda_m,r/4)=\phi\quad(n\neq m)$

(3) Dの任意の点は高々N個の$D(\lambda_n,2r)$に含まれる。

$z,w\in D$に対して Bergman核 $K_z(w)=K(w,z)=(1-\bar{z}w)^{-2}$ は、$f\in L^1_a$に関して再生核の性質

$$f(z)=\int_D f(w)\overline{K_z(w)}\,dA(w)$$

を持つ。$k_z(w)=(1-|z|^2)K_z(w)$ とおくと $\|k_z\|_2=1$ となることにより、k_z は正規化された Bergman 核といわれる。この k_z と Bergman disk について、次の関係式が有効な働きをする。

[補題2.3] $r>0$, $z\in D$ に対して $D(z,r)$ を Bergman metric disk とする。

(1) $\inf\{|k_z(w)|^2 : w\in D(z,r)\}=(1-s|z|)^4/(1-|z|^2)^2$

(2) $\sup\{|k_z(w)|^2 : w\in D(z,r)\}=(1+s|z|)^4/(1-|z|^2)^2$。

[補題2.4] 次の条件を満たす $C>0$ が存在する：D上解析的な f に対して

$$|f(z)|^p \leqq \frac{C}{|D(z,r)|}\cdot\int_{D(z,r)}|f(w)|^p dA(w).$$

$(z\in D,\ 0<p<\infty,\ r\leqq 1)$。

[証明] $p>0$ に対して $|f|^p$ は劣調和だから

$$|f(0)|^p \leqq \frac{1}{|D(0,r)|}\int_{D(0,r)}|f(w)|^p dA(w).$$

f を $f\circ\varphi_z$ $(z\in D)$ とし、変数変換をすると、

$$|f(z)|^p \leqq \frac{1}{s^2}\int_{D(z,r)}|f(w)|^p\cdot|k_z(w)|^2 dA(w).$$

[補題2.3]より、

$$\leqq \frac{(1+s|z|)^4}{(1-|z|^2)^2 s^2}\int_{D(z,r)}|f(w)|^p dA(w).$$

ここで、[補題2.1]より、$s_0=\tanh 1$ に対して、

$$|D(z,r)|^{-1} \geqq \frac{(1-s_0^2)^2}{2^4}\frac{(1+s|z|)^4}{(1-|z|^2)^2 s^2}.$$

よって、

$$|f(z)|^p \leqq \frac{C}{|D(z,r)|}\int_{D(z,r)} |f(w)|^p dA(w).\blacksquare$$

uをD上の実数値調和関数とすると、uの共役な調和関数vが存在して、$u+iv$はD上解析的と出来る。Hardy空間論において、$u \in L^1(\partial D)$に関して、必ずしも$v \in L^1(\partial D)$とはなっていなかったが、Bergman空間論においては、L^1からL_a^1へ有界な射影がつくれることより、$p=1$についても成り立つ。

$\alpha > -1$に対して、

$$P_\alpha f(z) = (\alpha+1)\int_D f(w)\frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}dA(w)$$

とおくと$1 \leqq p < \infty$, $p(\alpha+1) > 1$において、P_αはL^pからL_a^pへの有界な射影となる。

［補題2.5］ $1 \leqq p < \infty$のとき，uをD上の実数値調和関数、vをその共役な調和関数とすると、次の不等式を満たす定数Cが存在する：

$$\|v\|_p \leqq C\|u\|_p.$$

証明は上のP_αの有界性より示されるが、上の定理はさらに$0<p<1$に対しても成り立つことが知られている。

3. L^p 上の乗法作用素

D上の関数 f を1つ固定して、乗法作用素 M_f を次のように定義する: $M_f g = fg$, $g \in L^p$ $0<p<\infty$.
この節では，任意の p, q $(0<p, q \leqq \infty)$ に対して、作用素 $M_f : L^p \to L^q$ の特徴付けを考える。

[定理3.1]([2]) $0<p<q\leqq\infty$ とする。このとき、$M_f : L^p \to L^q$ が有界であるための必要十分条件は $f=0$ である。

[証明] $f \neq 0$ と仮定すると、ある正定数 t に対して.

$$E_t = \{ z \in D : |f(z)| > t \}$$

とおくと、$|E_t| > 0$. このとき，任意の $g \in L^p$ に対して.
ある定数 C があって $\|M_f g\|_q \leqq C \|g\|_p$ とすると.

$$\begin{aligned} C\|g\|_p^q &\geqq \int |fg|^q dA \\ &\geqq \int_{E_t} |fg|^q dA \\ &\geqq t^q \int_{E_t} |g|^q dA . \end{aligned}$$

よって，$L^p(E_t, dA) \subset L^q(E_t, dA)$。これは $p<q$ に矛盾∎

この定理は，もっと一般的な状況についても成り立つ([2]).

[定理3.2] $0<p=q\leqq\infty$ とする。このとき、$M_f:L^p\to L^q$ が有界であることと $f\in L^\infty$ は同値である。

[証明] M_f が有界ならば、任意の $g\in L^p$ に対して

$$\|fg\|_p \leqq C\|g\|_q$$

なる定数 C がとれる。今 $g=1$ とおくと $f\in L^p$, $\|f\|_p\leqq C$.

$g=f^{n-1}$ とおくと $\|f^n\|\leqq C^n$。よって $\lim_{n\to\infty}\|f^n\|_p^{1/n}\leqq C$。ゆえに $f\in L^\infty$ ■

$1\leqq p<\infty$ に対して、$(L^p)^*=L^s$ $(p^{-1}+s^{-1}=1)$ であるから、次のことは明らか。

[補題3.3] $1\leqq p<\infty$ のとき，次のことは同値：

(1) $M_f: L^p\to L^q$ は有界

(2) $f\in L^s$, $p^{-1}+s^{-1}=1$

[定理3.4] $1\leqq q<p<\infty$ とすると、次のことは同値：

(1) $M_f: L^p\to L^q$ は有界.

(2) $f\in L^r$, $q^{-1}=p^{-1}+r^{-1}$

[証明] (1)⇒(2)を示せばよい。s を $q^{-1}+s^{-1}=1$ とすると

$$fL^pL^s\subset L^qL^s\subset L^1.$$

一方，t を $p^{-1}+s^{-1}=t^{-1}$ とおく。このとき，任意の $g\in L^t$ に

対して $g = g^{t/s} \cdot g^{t/p}$ とすると $g^{t/s} \in L^s$, $g^{t/p} \in L^p$ より $L^t \subset L^p L^s$。よって、

$$f L^t \subset f L^p L^s \subset L^1$$

[補題3.3] より $f \in L^r$, $r^{-1} + t^{-1} = 1$。このとき, $r^{-1} = 1 - t^{-1} = q^{-1} - p^{-1}$ ∎

4. 一般化されたCarleson測度

μをD上の有限な正測度とし、$0 < p, q \leqq \infty$ とする。μが (p, q) Carleson 測度であるとは

$$\int |f|^q d\mu \leqq C \int |f|^p dA \quad , \quad f \in L_a^p$$

を満たす有限な定数 $C > 0$ が存在するときを言う。明らかにμが (p, q) Carleson測度であることと $L_a^p \subset L^q(d\mu)$ でその inclusion map が有界であることと同値である。また $1 \leqq p$ のとき, μが (p, q) Carleson 測度でさらに上の inclusion map が compact である場合を (p, q) compact Carleson測度と言う。即ち、L_a^pの有界列 $\{f_n\}$ に対して、その部分列 $\{f_{n_k}\}$ で $L^q(d\mu)$-収束するものが取れる場合である。

乗法作用素の有界性や compactness を特徴付ける為に (p, q) Carleson測度, (p, q) compact Carleson測度を特徴付ける。このとき, $p \leqq q$ の場合と $q < p$ の場合に分けて考える。

Luecking [8] は次のように言いかえられる。

［定理4.1］ $0<p\leqq q<\infty$，μはD上の有限な正測度とすると、次のことは同値である：

(1) μは(p,q) Carleson測度である．

(2) $\sup\left\{\int |k_\lambda|^{2q/p}d\mu : \lambda\in D\right\}<+\infty$

(3) $\sup\left\{|D(\lambda,r)|^{-q/p}\mu(D(\lambda,r)) : \lambda\in D\right\}<+\infty$ ，$0<r$．

［証明］ (1)⇒(2) 明らか．

(2)⇒(3)．

$$|D(\lambda,r)|^{-q/p}\mu(D(\lambda,r)) \leqq C\int_{D(\lambda,r)}|k_\lambda|^{\frac{2q}{p}}d\mu$$

$$\leqq C\int_D |k_\lambda|^{\frac{2q}{p}}d\mu<+\infty.$$

(3)⇒(1)．$f\in L^p_a$に対して、

$$\int|f|^q d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{D(\lambda_n,r)}|f|^q d\mu$$

$$\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{z\in D(\lambda_n,r)}|f|^q\int_{D(\lambda_n,r)}d\mu$$

$$\leqq\sum\frac{C}{|D(\lambda_n,r)|^{q/p}}\left(\int_{D(\lambda_n,r)}|f|^p dA\right)^{q/p}\cdot\int_{D(\lambda_n,r)}d\mu$$

$$\leqq C\sup_{\lambda_n}\frac{\mu(D(\lambda_n,r))}{|D(\lambda_n,r)|^{q/p}}\cdot\sum\left(\int_{D(\lambda_n,r)}|f|^p dA\right)^{q/p}$$

$q/p\geqq1$より

$$\leqq C\left(\sum\int_{D(\lambda_n,r)}|f|^p dA\right)^{p/q}$$

$$\leqq C\|f\|_p^p$$

よって、μは(p,q) Carleson測度である∎

証明中の定数Cは必ずしも同じものではない。

$0<q<p<\infty$ の場合. 完全な特徴付けは得られていない。

次に (p,q) compact Carleson 測度 の特徴付けを行う。

［定理4.2］ $1<p\leqq q<\infty$，μ をD上の有限な正測度とすると、次のことは同値である：

(1) μ は (p,q) compact Carleson 測度である。

(2) $\displaystyle\lim_{|\lambda|\to 1}\int |k_\lambda|^{2q/p}d\mu=0$

(3) $\displaystyle\lim_{|\lambda|\to 1}|D(\lambda,r)|^{-q/p}\mu(D(\lambda,r))=0$.

［証明］ (1)⇒(2). $1<p<\infty$ のとき，L_a^p は回帰的。よって. (1)より $\{k_{\lambda_n}^{2/p}\}$ は $|\lambda_n|\to 1$ のとき L_a^p で弱位相で0へ収束するので. $\{k_{\lambda_n}^{2/p}\}$ は $L^q(d\mu)$ で0へ収束する. 即ち、$\displaystyle\lim_{|\lambda|\to 1}\int |k_{\lambda_n}|^{2q/p}d\mu=0$.

(2)⇒(3) ［定理4.1］(2)⇒(3)の証明中の不等式より明らか.

(3)⇒(1). (3)と［定理4.1］より、μ は (p,q) Carleson 測度である。$\{f_m\}\subset L_a^p$ で $f_m\to 0$ (弱)と仮定すると. $\{f_m\}$ は一様有界でDの任意のcompact集合上一様に0へ収束する。今、$r>0$、$\{\lambda_n\}\subset D$, $D=\cup D(\lambda_n,r)$ として固定する。(3)より、任意の $\varepsilon>0$ に対して. ある N_0 が取れて

$$|D(\lambda_n,r)|^{-q/p}\mu(D(\lambda_n,r))<\varepsilon \qquad n\geqq N_0$$

とできる。

[定理4.1] (3)⇒(1) の証明中より

$$\sum_{N_0}^{\infty}\int_{D(\lambda_n,r)}|f_m|^q d\mu \leqq C\sum_{N_0}^{\infty}\frac{\mu(D(\lambda_n,r))}{|D(\lambda_n,r)|^{q/p}}\left(\int_{D(\lambda_n,r)}|f_m|^p dA\right)^{q/p}$$

$$\leqq \varepsilon C\left(\int|f_m|^p dA\right)^{q/p}$$

よって、

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\int|f_m|^q d\mu \leqq \lim_{m\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{N_0-1}\int_{D(\lambda_n,r)}|f_m|^p d\mu+\varepsilon C\|f_m\|_p^q\right]$$

$$\leqq \varepsilon C$$

εは任意より $\lim_{m\to\infty}\int|f_m|^q d\mu=0$ ∎

$1<q<p<\infty$ の場合、(p,q) compact Carleson 測度の完全な特徴付けも得られていない。

5 乗法作用素

D上の関数fを1つ固定する。fがL_a^pからL^qへのmultiplierであるとは、$fL_a^p\subset L^q$のときをいう。任意の$g\in L_a^p$に対して、M_fを$M_f g=fg$と定義するとき、M_fをL_a^pからL^qへの乗法作用素という。閉グラフ定理より、fがmultiplierであることとM_fが有界であることは同値である。またM_fが有界であることと$M_{|f|}$が有界であることも同値である。

前節において、$d\mu(z)=|f(z)|^q dA(z)$とおくことにより、

乗法作用素 M_f の有界性、compactness が特徴付けられる。

［定理 5.1］ $0<p\leqq q<\infty$ とするとき、次のことは同値：

(1) $M_f : L^p_a \to L^q$ は有界である

(2) $\sup\{\|f k_\lambda^{2/p}\|_q : \lambda\in D\}<+\infty$

(3) $\sup\{|D(\lambda,r)|^{-q/p}\int_{D(\lambda,r)}|f|^q dA : \lambda\in D\}<+\infty$

［定理 5.2］ $0<p<q=\infty$ の場合、次のことは同値：

(1) $M_f : L^p_a \to L^\infty$ は有界である

(2) $\sup\{|D(z,r)|^{-1/p}|f(z)| : z\in D\}<+\infty$

［証明］ (1) ⇒ (2).

$$|f(z)(1-|z|^2)^{2/p}| = |f(z)\,k_z(z)^{2/p}|$$
$$\leqq C\,\|k_z^{2/p}\|_p = C.$$

(2) ⇒ (1). $p>0$ に対して、任意の $g\in L^p_a$ に関して $|g|^p$ は劣調和。よって

$$|g(z)|^p \leqq C_r|D(z,r)|^{-1}\int_{D(z,r)}|g(w)|^p dA(w),\quad r>0.$$

ゆえに、

$$|f(z)g(z)| \leqq C_r|f(z)|\cdot|D(z,r)|^{-1/p}\left(\int_D|g|^p dA\right)^{1/p}.$$

即ち、 $\sup_z|f(z)g(z)|\leqq C\,\|g\|_p$ （$0<p<1$ のときは右辺 $=C\|g\|_p^p$）■

これらの定理は、$\mathbb{C}^n$ の有界対称領域、及び $\mathbb{C}$ のなめらかな

境界を持つ有界な領域についても成り立つ（[11]）。

次に、f の具体的な例として、負でない劣調和関数を取ってみる。

[系1]　$0<p<q\leqq\infty$，$1\leqq q\leqq\infty$，v を D 上負でない劣調和関数と仮定する。このとき、次のことは同値：

(1)　$M_v : L_a^p \to L^q$ は有界である．

(2)　$v\equiv 0$．

[証明]（1）⇒（2）の場合を示せばよい。$q<\infty$ のとき，

$$0\leqq v(z)\leqq \frac{C_r}{|D(z,r)|}\int_{D(z,r)} v\,dA \qquad (r>0)$$

$$\begin{aligned}
&\leqq \frac{C_r}{|D(z,r)|^{1/q}}\left(\int_{D(z,r)} v^q\,dA\right)^{1/q}\\
&\leqq C_r|D(z,r)|^{-1/q}\times M\,|D(z,r)|^{1/p} \qquad ([\text{定理}5.1])\\
&= C_r\,|D(z,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\\
&\leqq C_r(1-|z|^2)^{(q-p)/pq}.
\end{aligned}$$

$|z|\to 1$ とすると、$q-p>0$ より $v(z)\to 0$。よって最大値原理より $v\equiv 0$。$q=\infty$ の場合は明らか■

仮定において、さらに $\log v$ も劣調和である場合は $0<p<q\leqq\infty$ で成り立つ。

[系2] $1 \leqq p = q \leqq \infty$ とする。v を D 上負でない劣調和と仮定すると、次のことは同値：

(1) $M_v : L^p_a \to L^p$ は有界である。

(2) $v \in L^\infty$

証明は [系1] と同様に出来る。

f が解析的な場合と調和の場合は [1][2][6] を参照。上の2つの系は、領域が $\mathbb{C}^n$ の単位球の場合でも成り立つ。

$0 < q < p < \infty$ の場合については、前節同様完全な特徴付けは得られていないが、一般化された Hölder の不等式をヒントにして $fL^p_a \subset L^q$ ならば $f \in L^r$ $(q^{-1} = p^{-1} + r^{-1})$ となるかと予想される。しかし、f が一般の場合は必ずしも成立しない。例えば、$f(z)$ として $z \neq 0$ 上 $|z|^{-1}$, $z = 0$ で 0 とすると、明らかに $f \in L^1 \setminus L^2$ だが $fL^2_a \subset L^1$ である。よって、f として具体的な関数を取って考える。

[補題5.3]. $1 \leqq p \leqq \infty$ とし、u を D 上(複素数値)調和関数と仮定する。このとき、次のことは同値：

(1) $M_u : L^p_a \to L^1$ は有界である。

(2) $u \in L^q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$

［証明］ $p=1, \infty$ の場合は明らか。$1<p<\infty$ のとき，(1)⇒(2) を示す。任意の $f \in L^p_a$ に対して，

$$L(f)=\int f u \, dA$$

と定義すると，$L \in (L^p_a)^* = L^q_a$ $\quad p^{-1}+q^{-1}=1$．よって

$$\int f u \, dA = \int f \overline{g} \, dA$$

なる $g \in L^q_a$ が存在する。

ここで，$u \in L^1$ が調和であることと［補題2.5］を使って，$u = h + \overline{k}$，$h, k \in L^1_a$ と書ける。よって，上の等式で $f(z) = (1-\overline{\lambda} z)^{-2}$ $(\lambda \in D)$ とおくと

$$\overline{h(\lambda)} + k(0) = \overline{g(\lambda)} \qquad \lambda \in D$$

ゆえに $h = g - k(0) \in L^q_a$

同様に

$$L(f) = \int f \overline{u} \, dA \qquad f \in L^p_a$$

とおけば，$k \in L^q_a$ が示せる。よって，$u \in L^q$ ■

［定理5.4］ $1 \leq q < p < \infty$ とし，u を D 上（複素数値）調和とする。このとき，次のことは同値：

(1) $M_u : L^p_a \to L^q$ は有界である。

(2) $u \in L^r$，$q^{-1} = p^{-1} + r^{-1}$

［証明］ (1)⇒(2) を示す。$q>1$ とする。s を $q^{-1}+s^{-1}=1$ とすると

$$u L_a^p L_a^s \subset L^q L_a^s \subset L^1.$$

一方、$p^{-1}+s^{-1}=t^{-1}$に対して $L_a^t = L_a^p L_a^s$ となる（[5]）ことより

$$u L_a^t \subset L^1.$$

[補題5.3]より、$u \in L^r$, $r^{-1}+t^{-1}=1$。このとき $r^{-1}=q^{-1}-p^{-1}$. 即ち $q^{-1}=p^{-1}+r^{-1}$ ∎

Attele [1] は、実数値調和関数について、上の結果を得ている。負でない劣調和関数に対して、上の定理が成り立つかどうかは知られていない。

次に、乗法作用素の compactness についてみる。$p \leqq q$ の場合は、次の結果を得る。

[定理5.5] $1 \leqq p \leqq q < \infty$, fをD上の関数とすると、次のことは同値：

(1) $M_f : L_a^p \to L^q$ は compact

(2) $\lim_{|\lambda|\to 1} \| f k_\lambda^{2/p} \|_q = 0$

(3) $\lim_{|\lambda|\to 1} |D(\lambda,r)|^{-q/p} \int_{D(\lambda,r)} |f|^p dA = 0 \qquad r>0$

[証明] (1)⇒(2). $1 \leqq p < \infty$ において、仮定から $\{k_{\lambda_n}^{2/p}\} \subset L_a^p$ は有界列より 部分列 $\{k_{\lambda_n}^{2/p}\}$が取れて、$\{f k_{\lambda_n}^{2/p}\}$は

L^qである関数gへ収束していると出来る。よって$\{f k_{\lambda_n}^{2/p}\}$の部分列（再び同じ記号で書く）で、$f k_{\lambda_n}^{2/p} \to g$ a.e となるものがある。一方 $\lim\{k_{\lambda_n}^{2/p}(z) : |\lambda_n| \to 1\} = 0$ であるから、$g = 0$ a.e.、即ち、$\lim_{|\lambda_n| \to 1} \| f k_{\lambda_n}^{2/p} \|_q = 0$

(2) ⇒ (3) 明らか。

(3) ⇒ (1). $\mu = |f|^q dA$ として［定理4.2］の証明 (3) ⇒ (1) と同様に示せる ∎

［系］ $1 \leqq p = q < \infty$，v を D 上負でない劣調和とする。このとき、$M_v : L_a^p \to L^p$ が compact であるための必要十分条件は $v = 0$ である。

$q < p$ の場合は、Hölderの不等式を使って、次の十分条件が得られる。

［定理5.6］ $0 < q < p \leqq \infty$，$0 < t < \infty$，$p^{-1} + t^{-1} = q^{-1}$ とする。このとき $f \in L^q$，$f L_a^p \subset L^q$ で次の条件を満たすと仮定する：任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\int_{D \setminus K} |v|^t dA < \varepsilon$$

を満たす compact 集合 $K (\subset D)$ がとれる。

このとき、$M_f : L_a^p \to L^q$ は compact.

この定理によると、$fL_a^p \subset L^q$ のとき、$f \in L^t$, $p^{-1}+t^{-1}=q^{-1}$ ならば、M_f は compact になる。

6. 例

前節により、$M_f : L_a^p \to L^q$ の有界性と compactness の評価は各 p, q に依存していた。$f \in L^\infty$ のとき、これらの評価は同値となるが、最後に $p=q$ の場合で各 p 間の差異を示す例を挙げておく。

［例6.1］ D 内の集合 S を

$$S = \{z = re^{i\theta} : 0 \leqq r < 1,\ |\theta| < (1-r)^2\}$$

とおく。

$$f(z) = \begin{cases} (1-|z|)^{-1} & z \in S \\ 0 & z \notin S \end{cases}$$

とすると、$f \in L^2$。この f について、$M_f : L_a^1 \to L^1$ は有界となるが、$M_f : L_a^2 \to L^2$ は有界とはならない。

［例6.2］ D 内の集合 S を上のようにとる。

$$f(z) = \begin{cases} (1-|z|)^{-1/2}, & z \in S \\ 0, & z \notin S \end{cases}$$

とすると、$f \in L^2$.

明らかに $M_f : L_a^1 \to L^1$, $M_f : L_a^2 \to L^2$ は有界であるが.
$M_f : L_a^1 \to L^1$ は compact であるが、$M_f : L_a^2 \to L^2$ は compact
にはならない。

参 考 文 献

1. K.R.M. Attele, Analytic multipliers of Bergman spaces, Michigan Math. J. 31(1984), 307-319.

2. S. Axler, Zero multipliers of Bergman spaces, Can. Math. Bull. 28(1985), 237-242.

3. J.B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, New York, 1981.

4. W.W. Hastings, A Carlrson measure theorem for Bergman spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 52(1975), 237-241.

5. C. Horowitz, Factirization theorems in the Bergman spaces, Duke Math. J. 44(1977), 201-213.

6. K. Izuchi, A function theoretic proof of Axler's zero multiplier theorem, Canad. Math. Bull. 31(1988), 111-114.

7. D.C. Luecking, A technique for characterizing Carleson

measures on Bergman spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 87(1983), 656-660.

8. D.H. Luecking, Forward and reverse Carleson inequalities for functions in Bergman spaces and their derivatives, Amer. J. Math. 107(1985), 85-111.

9. S. Ohno, Multipication operators on the Bergman spaces $L_a^p(\Omega)$, Proceedings of the International Symposium on Functional Analysis and Related Topics, World, 1991, 234-237.

10. V.L. Oleinik, Embedding theorems for weighted classes of harmonic and analytic functions, J. Soviet Math. 9(1978), 228-243.

11. V.L. Oleinik and B.S. Pavlov, Embedding theorems for weighted classes of harmonic and analytic functions, J. Soviet Math. 2(1974), 135-142.

12. K.H. Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Pure and applied Math. vol.139, Marcel Dekker, New York, 1990.