数理解析研究所講究録
825巻 1993年 18-31

Multipliers and Bourgain algebras of $H^\infty+C$ on the polydisk

神奈川大工 泉池 敬司 (Keiji Izuchi)
信州大 理 真次 康夫 (Yasuo Matsugu)

2次元torus T^2 上では $(H^\infty+C)(T^2)=H^\infty(T^2)+C(T^2)$ は $L^\infty(T^2)$ の closed subspaceであるが，algebra にはならない。しかし単位円周T上では $(H^\infty+C)(T)$ は $L^\infty(T)$ の closed subalgebra になる。又 Bourgain algebraに関しては，$H^\infty(T^2)_b = H^\infty(T^2)$ であり $H^\infty(T)_b=(H^\infty+C)(T)_b=(H^\infty+C)(T)$ である。これらはTとT^2の持つ性質の差の一面である。ここでは，それらの差から生ずる次の問題について考える。

問題1. $\mathcal{A}$を $A(T^2)$ と $H^\infty(T^2)$ の間の closed subalgebra とする。いつ $\mathcal{A}+C(T^2)$ はclosed subalgebra になるか？

問題2. $(H^\infty+C)(T^2)_b$ は何か？

いずれも，$(H^\infty+C)(T^2)$ の multiplier algebra $\mathcal{M}$ がその中心的な役割を果す。今後の課題として，$\mathcal{M}$ についての corona定理が成立するか等が残されてくる。

§1. Introduction

U^2で unit polydiskを表す。$H^\infty(U^2)$で有界なholomorphic関数の空間とする。その境界関数(T^2上の)の空間を$H^2(T^2)$と書く。$C(T^2)$は連続関数の空間である。Rudin [7] は$(H^\infty+C)(T^2)$が$L^\infty(T^2)$のclosed subspaceであるが，subalgebraにならないことを証明した。一方 Sarason [8] により$(H^\infty+C)(T)$は$L^\infty(T)$のclosed subalgebraになることが良く知られている。ここで$(H^\infty+C)(T^2)$のmultiplier algebraを

$$\mathfrak{M} = \{f \in L^\infty(T^2)\,;\, f\cdot(H^\infty+C)(T^2) \subset (H^\infty+C)(T^2)\}$$

とする。$\mathfrak{M}$は$L^\infty(T^2)$のclosed subalgebrになる。§2において，$\mathfrak{M} \subset H^\infty(T^2)$でありかつ$\mathfrak{M}$を決定する。その事を使って問題1に答える。

次にCima-Timoney [3] によって導入されたBourgain algebraの定義をする。Xを単位元を持つ可換Banach環とし，Yをそのclosed subspaceとする。

$$Y_b = \{f \in X\,;\, \|ff_n+Y\| \to 0,\ \forall \{f_n\}_n \subset Y \text{ weakly null}\}$$

とする。彼らはY_bがXのclosed subalgebraになることを確かめ，Y_bをXに対するYのBourgain algebraと呼んだ。特に注意したいのは，Yがalgebraである時は$Y \subset Y_b$になるが，Yがalgebraではない時はY_bがどの程度大きな空間になるのか全く予測できない所である。その後Cima-Janson-

Yale [1] により $H^\infty(T)$ の $L^\infty(T)$ に対する Bourgain algebra は

$$H^\infty(T)_b = (H^\infty + C)(T)$$

であることが示された。これを契機に Bourgain algebra の研究が急速に広まった。Gorkin-Izuchi-Mortini [4] は

$$(H^\infty + C)(T)_b = (H^\infty + C)(T)$$

であることを示し，一般の Douglas algebra に対する Bourgain algebra を決定した。多次元上では Cima-Wogen (Izuchi [5]) は，

$$H^\infty(T^2)_b = H^\infty(T^2)$$

であることを示し，[5] では単位球面上 ∂B_n で

$$H^\infty(\partial B_n)_b = (H^\infty + C)(\partial B_n)$$

であることが示された。$(H^\infty + C)(T)_b$ は T 上では Chang-Marshall の定理があるので決定できたが，∂B_n 上ではその定理にあたるものが知られていないので，$(H^\infty + C)(\partial B_n)_b$ はまだ決定されずに残されている。一方内部に目を向けてみる。$C^\infty(U)$ で U 上の有界連続関数の空間とする。$H^\infty(U)$ の $C^\infty(U)$ に対する Bourgain algebra を考えることが出来る（境界と内部の Bourgain algebra の相互関係はまだはっきりしていない）。Cima-Stroethoff-Yale [2] 及び Izuchi-Stroethoff-Yale [6] は

$$H^\infty(U)_b = (H^\infty(U)+C(\overline{U}))_b = H^\infty(U)+C(\overline{U})$$

であることを示した。

以上はalgebraのBourgain algebraについての結果であるが，algebraでない時で知られているのは次のIzuchi-Stroethoff-Yale [6] による結果である。$h^\infty(U)$をU上の有界調和関数の空間とする。$h^\infty(U)$はalgebraにはならない。その$h^\infty(U)$に対するBourgain algebraは，VMO(T)空間と関係して次の形になる，

$$h^\infty(U)_b = (VMO(T)\cap L^\infty(T))^\sim + C(\overline{U}),$$

ここで$\sim$は内部へのharmonic extensionを表す。

もう一度Bourgain algebra Y_bの定義にもどってみる。YのXに対するmultiplier algebraを考えることができる，

$$\mathcal{M}(Y) = \{f\in X;\ fY\subset Y\}。$$

すると$\mathcal{M}(Y)\subset Y_b\subset X$であることは明らかであり，又$Y_b$がYのmultiplierの概念を少し広げたものであることが気ずかれる。Y_bは$fY\subseteq Y$なる$f\in X$の集まりであると考えられる。この意味からするとBourgain algebraの研究はclosed subspaceに内在するalgebraの研究といっても良いであろう。又特に$\mathcal{M}(h^\infty(D))=\mathbb{C}$であることから，$h^\infty(D)_b$の決定はそれなりに意味があることと思える。

さて$(H^\infty+C)(T^2)$もalgebraではない，closed subspace

であった。§3において，その $L^\infty(T^2)$ に対するBourgain algebraは

$$(H^\infty+C)(T^2)_b = \mathcal{M}_b = \mathcal{M}$$

となることを見る。

§4においては，$C^\infty(U^2)$ に対するBourgain algebraを考えてみる。~はPoisson積分による内部への拡張を表すことにする。$C_{T^2}(\overline{U}^2)$ で $C(\overline{U}^2)$ の中の関数で T^2 上で0になるものとする。$C_0(U^2)\subset C_{T^2}(\overline{U}^2)\subset C(\overline{U}^2)$ である。その時，

$(\tilde{\mathcal{M}})_b=(H^\infty(U^2)+C(\overline{U}^2))_b=(H^\infty(U^2)+C_{T^2}(\overline{U}^2))_b=\tilde{\mathcal{M}}+C_0(U^2)$

である。ここで高階のBourgain algebraを $Y_{b(n+1)}=(Y_{b(n)})_b$ とする。興味ある結果として

$$(\tilde{\mathcal{M}}+C_0(U^2))_{b(n)} \neq (\tilde{\mathcal{M}}+C_0(U^2))_{b(n+1)};$$

$$(\tilde{\mathcal{M}}+C_{T^2}(\overline{U}^2))_{b(n)} = (\tilde{\mathcal{M}}+C_{T^2}(\overline{U}^2))_{b(n+1)}$$

が得られる。

§5において，polydisk algebra $A(T^2)$ 及び $A(\overline{U}^2)$ のBourgain algebraについて述べる。

§2. multiplier algebra $\mathcal{M}$

$f\in L^\infty(T^2)$ に対して

$$I_k(f)(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta},e^{i\varphi})\,e^{-ik\varphi}\,d\varphi/2\pi \qquad \text{a.e. } e^{i\theta}\in T;$$

$$J_k(f)(e^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta},e^{i\varphi})\,e^{-ik\theta}\,d\theta/2\pi \qquad \text{a.e. } e^{i\varphi}\in T$$

を定義することができる。$\|I_k(f)\|_T \le \|f\|_{T^2}$である。又$f \in H^\infty(T^2)$である必要十分条件は$I_k(f) = J_k(f) = 0$ a.e. on T $\forall k < 0$となる。特に$f \in H^\infty(T^2)$とすると

(1) $\tilde{f}(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) w^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(w) z^n, \quad (z,w) \in U^2$

と表せる。$f_n(z), g_n(w) \in H^\infty(U)$であり，その境界関数は

$$f_n(e^{i\theta}) = I_n(f)(e^{i\theta}), \qquad g_n(e^{i\varphi}) = J_n(e^{i\varphi})$$

であることが容易に示せる。これを使って$\mathfrak{M}$は次の様に特徴づけられる。

定理2.1. $\mathfrak{M} = \{f \in H^\infty(T^2) ; I_k(f), J_k(f) \in A(T) \ \forall k \ge 0\}$.

上の定理を(1)の言葉でいいかえると，

$$\mathfrak{M} = \{f \in H^\infty(T^2) ; f_n, g_n \in A(\bar{U}) \ \forall k \ge 0\}$$

となる。$\mathfrak{M}$に入る関数の例としては，$h(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n \in H^\infty(U)$に対して$f(z,w) = h(zw)$を考えれば良い。

系1. $f \in H^\infty(T^2)$とする。$f \in \mathfrak{M}$である必要十分条件は$\tilde{f}$が$\bar{U}^2 \setminus T^2$へ連続に拡張できることである。

次に問題1について考える。$f \in H^\infty(T^2)$に対して，次の様に表すこともできる

$$(2) \qquad f(e^{i\theta}) = F_n(e^{i\theta}, e^{i\psi}) + e^{in(\theta+\psi)} G_n(e^{i\theta}, e^{i\psi}),$$

ここで $F_n, G_n \in H^\infty(T^2)$ で $\hat{F}_n(i,j) = 0 \ \forall i,j \geq n \geq 0$ である。$A(T^2) \subset \mathfrak{A} \subset H^\infty(T^2)$ なるclosed subalgebra $\mathfrak{A}$ が $*$-invariantであるとは各 $f \in \mathfrak{A}$ に対して(2)の形に表した時，$G_n \in \mathfrak{A}$ $\forall n \geq 0$ の時にいうことにする（これはT上の $*$-invariant の自然な拡張である[8]）。

系2. $\mathfrak{M}$ は $*$-invariant である。

Rudin [7] により $\mathfrak{A} + C(T^2)$ はclosed subspace になることは分っている。

定理2.2. $\mathfrak{A}$ を $A(T^2) \subset \mathfrak{A} \subset H^\infty(T^2)$ なるclosed subalgebra とする。その時 $\mathfrak{A} + C(T^2)$ がclosed subalgebra になる必要十分条件は $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$ であり，$\mathfrak{A}$ は $*$-invariantになることである。

系3. $\mathfrak{M} + C(T^2)$ はclosed subalgebra である。

§3. $(H^\infty+C)(T^2)$ の Bourgain algebra

定理3.1. $(H^\infty+C)(T^2)_b = \mathfrak{M}_b = \mathfrak{M}$.

これを証明するのに，次の補題を使う。ここで $f\in H^\infty(T^2)$ に対して $\tilde{f}(z,w)$ は w を固定した時 z に関して $\tilde{f}(\cdot,w)\in H^\infty(U)$ であるから，その境界関数を $\tilde{f}(e^{i\theta},w)$ で表す。

補題. $f\in H^\infty(T^2)$ で $I_k(f)\notin A(T)$ for some $k\geq 0$ とする。その時，$0<r<1$ に対して

$$\sup_{|w|=r}\|\tilde{f}(e^{i\theta},w)+C(T)\|_T > r^k\|I_k(f)+C(T)\|_T/2 \neq 0$$

である。

定理3.1の証明の一部分。 $\mathfrak{M}_b=\mathfrak{M}$ となることだけを証明してみる。$\mathfrak{M}$ は algebra であるから，$\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}_b$ である。$\mathfrak{M}\subset H^\infty(T^2)$ であるから，[5] より $\mathfrak{M}_b\subset H^\infty(T^2)$ である。$\mathfrak{M}_b\subset\mathfrak{M}$ を示すために $f\in\mathfrak{M}_b$ とする。$f\notin\mathfrak{M}$ と仮定する。定理2.1よりある $k\geq 0$ に対して $I_k(f)\notin A(T)$ と考えて良い。補題より次をみたす列 $\{w_n\}_n\subset U$ が取れる，

(3) $|w_n|\to 1$;

(4) $\|\tilde{f}(e^{i\theta},w_n)+C(T)\|_T > \|I_k(f)+C(T)\|_T/3 \neq 0$.

(3)より $A(T)$ の中の weakly null sequence $\{h_n(e^{i\psi})\}_n$ で $\tilde{h}_n(w_n)=1$ なるものが存在する。$A(T)\subset H^\infty(T^2)$ と考える

ことができて, h_n は $\mathfrak{M}$ の weakly null sequence となる。すると $h\in\mathfrak{M}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|f h_n(e^{i\psi})+h\|_{T^2} &\geq \sup_{|z|<1} |\tilde{f}(z,w_n)\hat{h}_n(w_n)+\hat{h}(z,w_n)| \\
&\geq \|\tilde{f}(e^{i\theta},w_n)+A(T)\|_T \\
&> \|I_B(f)+C(T)\|_T/3 \qquad \text{by (4)}
\end{aligned}
$$

となり, $\|f h_n+\mathfrak{M}\|_{T^2}\not\to 0\ (n\to\infty)$ である。よって $f\notin\mathfrak{M}_b$ となり矛盾が生ずる。

系3より $\mathfrak{M}+C(T^2)$ は closed subalgebra になるが, $(\mathfrak{M}+C(T^2))_b=\mathfrak{M}+C(T^2)$ となるかどうか分っていない。その原因は T^2 上でやはり Chang-Marshall の定理にあたる結果が知られていない所にある。

§4. $C^\infty(U^2)$ に対する Bourgain algebra について

$\mathfrak{M}$ 及び $H^\infty(T^2)$ の T^2 上の Bourgain algebra の結果を使うと, 比較的容易に次を示すことができる。

定理4.1. (i) $(\tilde{\mathfrak{M}})_b=\tilde{\mathfrak{M}}+C_0(U^2)$.

(ii) $H^\infty(U^2)_b=(H^\infty+C_0)(U^2)$.

次に $(\tilde{\mathfrak{M}})_{bb}=(\tilde{\mathfrak{M}}+C_0(U^2))_b$ 及び $H^\infty(U^2)_{bb}=(H^\infty+$

$C_0)(U^2)_b$ を決定しようということになる。ここからの話しは $\partial\bar{U}^2\setminus T^2$ における関数の挙動が関係してくる。系1より, $\mathfrak{M}$ の関数は $\partial\bar{U}^2\setminus T^2$ で連続(に拡張できる)であるが(関数があまり多くないということ), $H^\infty(U^2)$ は複雑に動きうる(関数が多くあるということ)。ここが以下の結果の形が異なるものに対する大もとである。

定理4.2. $n \geq 1$ に対して,

$$H^\infty(U^2)_{b(n)} = (H^\infty + C_0)(U^2)_{b(n)} = (H^\infty + C_0)(U^2).$$

$(H^\infty + C_0)(U^2)$ は algebra であるから, その Bourgain algebra は $(H^\infty + C_0)(U^2)$ より大きくなるが, 本当に大きくなり得ないのは, $H^\infty(U^2)$ が多くの関数を含み, かつ種々の weakly null sequence を作ることが可能であるためである。

さて,

$$C_{T^2}(\bar{U}^2) = \{f \in C(\bar{U}^2)\,;\, f = 0 \text{ on } T^2\}$$

であり, $C_0(U^2) \subset C_{T^2}(\bar{U}^2) \subset C(\bar{U}^2)$ であった。$(H^\infty + C_0)(U^2)$ は algebra になるが, $H^\infty(U^2) + C_{T^2}(\bar{U}^2)$ 及び $H^\infty(U^2) + C(\bar{U}^2)$ は algebra ではない $C^\infty(U^2)$ の closed subspace である。そしてその境界関数は

(5) $\qquad (H^\infty + C_0)(U^2)|_{T^2} = H^\infty(T^2)\,;$

(6) $\quad (H^\infty(U^2)+C_{T^2}(\bar{U}^2))|_{T^2} = H^\infty(T^2);$

(7) $\quad (H^\infty(U^2)+C(\bar{U}^2))|_{T^2} = (H^\infty+C)(T^2)$

である。上の様な差があるにもかかわらず，次が成立する。

定理4.3.

$$(H^\infty(U^2)+C_{T^2}(\bar{U}^2))_b = (H^\infty(U^2)+C(\bar{U}^2))_b = \widetilde{\mathfrak{M}} + C_0(U^2).$$

$(H^\infty(U^2)+C(\bar{U}^2))_b = \widetilde{\mathfrak{M}} + C_0(U^2)$ の方は定理3.1及び4.1を見ると納得し易い。しかし定理4.2,(5),(6)から見た時，$(H^\infty(U^2)+C_{T^2}(\bar{U}^2))_b = \widetilde{\mathfrak{M}} + C_0(U^2)$ となるのは想像するのが難かしい。そこで，$f \in H^\infty(U^2) \setminus \widetilde{\mathfrak{M}}$ とする。系1より f は $\partial\bar{U}^2 \setminus T^2$ のある点で連続に拡張できない。その性質を使って $C_{T^2}(\bar{U}^2)$ の中にうまく weakly null sequence を見つけて $f \notin (H^\infty(U^2)+C_{T^2}(\bar{U}^2))_b$ を示せる。

さて最後に残されてくるのが，$\widetilde{\mathfrak{M}} + C_0(U^2)$, $\widetilde{\mathfrak{M}} + C_{T^2}(\bar{U}^2)$, $\widetilde{\mathfrak{M}} + C(\bar{U}^2)$ の Bourgain algebra の決定である。
$\widetilde{\mathfrak{M}} + C(\bar{U}^2)|_{T^2} = \mathfrak{M} + C(T^2)$ でその Bourgain algebra は決定されていないから，$\widetilde{\mathfrak{M}} + C(\bar{U}^2)$ の Bourgain algebra は決定されずに残る。前の2つについて考える。

定理4.4. (i) $(\widetilde{\mathfrak{M}} + C_0(U^2))_{b(n)} \neq (\widetilde{\mathfrak{M}} + C_0(U^2))_{b(n+1)}$.

(ii) $\quad (\tilde{\mathfrak{M}} + C_{T^2}(\bar{U}^2))_{b(n)} = (\tilde{\mathfrak{M}} + C_{T^2}(\bar{U}^2))_b$

$\neq \tilde{\mathfrak{M}} + C_{T^2}(\bar{U}^2).$

$(\tilde{\mathfrak{M}} + C_0(U^2))_{b(n)}$ 及び $(\tilde{\mathfrak{M}} + C_{T^2}(\bar{U}^2))_b$ を具体的に記述することができるが，記号が複雑になるのでここでは述べない。[5] において，任意の $A(T^2) \subset \mathcal{A} \subset H^\infty(T^2)$ なる closed subalgebra $\mathcal{A}$ に対して，$L^\infty(T^2)$ に対する Bourgain algebra に関して $\mathcal{A}_{bb} = \mathcal{A}_b$ かという問題が出されているが（まだ未解決），定理4.1と4.4より同じ種類の問題を $A(\bar{U}^2)$ と $H^\infty(U^2)$ の間に考えると，$\tilde{\mathfrak{M}}$ はその反例を与える。

§5. Polydisk algebra の Bourgain algebra

X を $L^\infty(T^2)$ の maximal ideal space とする。$L^\infty(T^2) = C(X)$ と考えられる。$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in T^2$ に対する fiber を

$$X_\lambda = \{x \in X;\ z(x) = \lambda_1,\ w(x) = \lambda_2\}$$

とする。$f \in L^\infty(T^2)$ に対して

$$\omega_0(f, \lambda) = \sup\{|f(\lambda_1) - f(\lambda_2)|;\ \lambda_1, \lambda_2 \in X_\lambda\}$$

とする。$V(T^2)$ で $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\{\lambda \in T^2;\ \omega_0(f, \lambda) > \varepsilon\}$ が有限集合となる $f \in L^\infty(T^2)$ よりなる空間とする。[5] で

$$A(T^2)_{b(n)} = (H^\infty \cap V)(T^2)$$

となることが示されている。ここで $(H^\infty \cap V)(T^2) \subset \mathfrak{M}$ であ

る。$A(\bar{U}^2)$ の $C^\infty(U^2)$ に対する Bourgain algebra を考えると $\widetilde{\mathcal{R}}$ の時と様子が少し異なる。定理4.4と比較するとおもしろい。

定理 5.1.

(i) $A(\bar{U}^2)_b = ((H^\infty \wedge V)(T^2)^\sim)_b = (H^\infty \wedge V)(T^2)^\sim + C_0(U^2)$.

(ii) $A(\bar{U}^2)_{b(n)} \neq A(\bar{U}^2)_{b(n+1)}$.

(iii) $((H^\infty \wedge V)(T^2)^\sim + C_{T^2}(\bar{U}^2))_{b(n)}$
$$= ((H^\infty \wedge V)(T^2)^\sim + C_{T^2}(\bar{U}^2))_b$$
$$\neq ((H^\infty \wedge V)(T^2)^\sim + C_{T^2}(\bar{U}^2).$$

(iv) $(A(\bar{U}^2) + C_0(U^2))_{b(n)} \neq (A(\bar{U}^2) + C_0(U^2))_{b(n+1)}$.

(v) $(A(\bar{U}^2) + C_{T^2}(\bar{U}^2))_{b(n)} \neq (A(\bar{U}^2) + C_{T^2}(\bar{U}^2))_{b(n+1)}$.

それぞれの Bourgain algebra を記述することができる。

参 考 文 献

1. J. Cima, S. Janson and K. Yale, Completely continuous Hankel operators on H^∞ and Bourgain algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 105 (1989), 121–125.

2. J. Cima, K. Stroethoff and K. Yale, Bourgain algebras on the unit disk, to appear in Pacific J. Math.

3. J. Cima and R. Timoney, The Dunford-Pettis property for certain planner uniform algebras, Michigan Math. J. 34 (1987), 99-104.

4. P. Gorkin, K. Izuchi and R. Mortini, Bourgain algebras of Douglas algebras, Canad. J. Math. 44 (1992), 797-804.

5. K. Izuchi, Bourgain algebras of the disk, polydisk, and ball algebras, Duke Math. J. 66 (1992), 503-519.

6. K. Izuchi, K. Stroethoff and K. Yale, Bourgain algebras of spaces of harmonic functions, preprint.

7. W. Rudin, Spaces of type $H^\infty + C$, Ann. Inst. Fourier Grenoble 25 (1975), 99-125.

8. D. Sarason, Algebras of functions on the unit circle, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 286-299.