数理解析研究所講究録
825巻 1993年 1-17

Distance Formulas of Asymptotic Toeplitz and Hankel Operators

北大 理　山田 雅博 (Masahiro Yamada)

§1. 序論　$\mathbb{T}$を単位円周, $1\le p\le\infty$ に対して $L^p=L^p(\mathbb{T})$ を$\mathbb{T}$上のLebesgue空間とする。さらに, $H^p=H^p(\mathbb{T})$を通常のHardy空間(すなわち, L^p-関数の中で負のフーリエ係数が0となっている関数からなるL^pの閉部分空間。)とする。

$\phi\in L^\infty$に対して, $M_\phi f:=\phi f$ $(f\in L^2)$とし, PをL^2からH^2への直交射影, さらにVを $(Vf)(z):=f(\bar{z})$ $(f\in L^2)$で定義する。特に このときVはL^2上のユニタリー作用素であり, $V: H^2\longleftrightarrow\overline{H^2}$ である。これらを準備して, 以下で扱う2つの重要な作用素, Toeplitz作用素とHankel作用素を定義する。上と同様に$\phi\in L^\infty$とする。

$$T_\phi f:=PM_\phi f\qquad(f\in H^2)$$
$$H_\phi f:=PVM_\phi f\qquad(f\in H^2)$$

とし、各々T_ϕをToeplitz作用素、H_ϕをHankel作用素と

呼ぶ。さらに、このϕをこれらの作用素のシンボルという。また、H^2の正規直交基底$\{z^i\}_{i\geq 0}$に関する行列は各々、

$$T_\phi = \begin{pmatrix} \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \cdots \\ \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \cdots \\ \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

$$H_\phi = \begin{pmatrix} \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \cdots \\ \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \cdots \\ \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \hat{\phi}(-4) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

となる。ここで$\hat{\phi}(i)$は$\{z^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$に関するフーリエ係数を表わすものとする。また、これらの作用素を特徴付ける性質を挙げておく。Sを$S:=T_z$，すなわちH^2上のシフト作用素とすると，TがToeplitz作用素であるための必要十分条件は、$S^*TS=T$となることであり，またHがHankel作用素であるための必要十分条件は$S^*H=HS$となることである。さらに各々のノルムについてはToeplitz作用素が明らかに$\|T_\phi\|=\|\phi\|_\infty$となっているのに対し、Hankel作用素においては$\|H_\phi\|=\|\phi+zH^\infty\|$となることが知られている[5]。

T^+をToeplitz作用素全体から生成されるBanach環とし、

これをToeplitz環と呼ぶ。さらに$[T_\phi, T_\psi]=T_\phi T_\psi - T_\psi T_\phi$をT$_\phi$とT$_\psi$の交換子といい，これらの全体で生成される$\mathcal{T}^+$の閉イデアルを$\mathcal{T}^+$の交換子イデアルと呼ぶ。Douglasは商空間$\mathcal{T}^+/\mathcal{Q}$と$L^\infty$との間に積、およびadjointを保存する等長な同型対応が存在することを示し(c.f.[3;p179])，さらにBarríaとHalmosは$\mathcal{T}^+$よりも広いBanach環において上のような同型対応が存在するかどうかについて考察するため，asymptotic Toeplitz作用素を定義した[1]。

§2.ではBarríaとHalmosの定義した概念をL^2上の作用素に拡張し，それから得られる作用素の距離公式を提示する。

§3.，§4.においては上の公式を用いてDouglasの示したような同型対応が、実際はBarríaとHalmosの考察したBanach環よりもさらに広いクラスで成立することを示す。また、この結果をBarría－Halmosの示した結果と対比させ，その違いについても述べる。さらに，Douglasの結果との関連についても考察し，前述の結果がDouglasの結果を含んでいることについて触れる。

§5.では§2.で提示された距離公式のもう１つの発展として，一般化されたToeplitz，およびHankel作用素のノルムを与える公式を導く。これらの作用素は通常，$\phi\in L^\infty$というシンボルによって決定されるが，このϕをL^2上の作用素M_ϕ

と同一視すると T_ϕ, H_ϕ は M_ϕによって決定されると換言することができる。この考え方をさらに一般的にとらえ, L^2上の作用素 A により決定されるToeplitz, Hankel作用素, T_A, H_A を定義し, それらのノルムがどのように与えられるかを考察する。

§2. <u>L^2上の作用素に対するdistance formula</u>　$U=M_z$, P_nをL^2から$[z^i; |i|\leq n]$ $(n\geq 0)$ への直交射影とする。また, 以下 $\mathbb{B}(L^2)$, $\mathbb{B}(H^2)$ を各々L^2, H^2上の有界線型作用素の全体, $\|\cdot\|$ をL^2ノルムを表わすとする。さらに,

$$\sigma_n(A) := P_n U^{*n} A U^n \quad (A\in\mathbb{B}(L^2),\ n\geq 0),$$

と定義し、$\sigma_n(A)$ が弱収束するときにその極限を$\sigma(A)$ と書くこととする。また, $\{a_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ を A のL^2上の正規直交基底 $\{z^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ に関する行列成分を表わすものとする。§1.においてH_ϕ をHankel作用素と呼んだのに対して, VM_ϕを特に"L^2上のHankel作用素"と呼ぶことにする。

<u>命題 2.1.</u>　$A\in\mathbb{B}(L^2)$とする。$\{\sigma_n(A)\}$ が弱収束することと, すべての$k\in\mathbb{Z}$ について$\{a_{-l\,l+k}\}_{l=0}^{\infty}$ が収束することは同値であり, このとき$\sigma(A)$ はL^2上のHankel 作用素となる。

(証明)　$\sigma(A)$が存在すると仮定する。任意のi, $j\in\mathbb{Z}$を固定し, n_0を$n_0=|i|$とすると, $n\geq n_0$なるすべてのnに対

して，$l=m-i$ とおくと $l\geq 0$ であり，$\{(\sigma_m(A)z^j, z^i)=a_{-l\ l+i+j}\}$ は $(\sigma_m(A)z^j, z^i)$ に収束する。よって $\sigma(A)$ の行列成分は $i+j$ のみに依存するから，$\sigma(A)$ は L^2 上の Hankel 作用素となることがわかる。

逆に，もし $\{a_{-l\ l+k}\}_{l=0}^{\infty}$ が、すべての $k\in\mathbb{Z}$ について収束すると仮定すると，上の計算から $(\sigma(A)z^j, z^i)=\lim_{l} a_{-l\ l+i+j}$ と定義することにより，$\sigma_m(A)$ は $\sigma(A)$ に弱収束することがわかる。さらにこのとき，$\|\sigma_m(A)\|\leq\|A\|\ (m\geq 0)$ だから，一様有界性の原理より $\sigma(A)$ が有界な作用素となることも示される。

上の命題2.1.の証明において主要な部分は Feintuch [4] によるものである。また、命題2.1.で考えた $\sigma(A)$ は L^2 上の Hankel 作用素となったが，A 自身が L^2 上の Hankel 作用素のとき $\sigma(A)=A$ であることがわかる。実際，A が L^2 上の Hankel 作用素であれば $AU=U^*A$ が成立し，このことから $\sigma_m(A)=P_mU^{*m}AU^m$ $=P_mU^mU^{*m}A=P_mA$ となり，$\sigma_m(A)$ は A に強収束することが示される。

AH を $AH=\{A\in\mathbb{B}(L^2);\ \{\sigma_m(A)\}$ が強収束$\}$ とする。命題2.1.は $A\in AH$ が L^2 上の Hankel 作用素でないときにも，$\sigma_m(A)$ を考えることにより，L^2 上の Hankel 作用素が定義できることを示している。また，先のことから A が L^2 上の Hankel 作用素で

あるときには，Aから定義された$\sigma(A)$がA自身と一致し，従ってAHという作用素のクラスはL^2上のHankel作用素という概念をさらに拡張した作用素の集合であると捉えることができる。このような見方により，AHに属する作用素をL^2上のasymptotic Hankel作用素と呼ぶことにする。また，AHに対して，その極限が零作用素となるクラスを$\mathfrak{L}$，すなわち，$\mathfrak{L}=\{L\in AH : \sigma(L)=0\}$と書くことにする。

命題 2.2. AHと$\mathfrak{L}$はともに$\mathbb{B}(L^2)$の閉部分空間である。

(証明) 証明はFeintch [4]と同様であり，AHについて示す。$\mathfrak{L}$についてもAHの場合に従うので省略する。

$\{A_k\}\subset AH$，$\|A_k-A\|\to 0$ $(k\to\infty)$とする。このとき，任意の$f\in L^2$に対して，$\{\sigma_m(A)f\}$が収束することを示せばよいが，このためには$\{\sigma_m(A)f\}$がCauchy列となることをいえば十分である。なぜなら，これが示されれば$\sigma(A)f=\lim_m \sigma_m(A)f$と$\sigma(A)$を定義したとき，$\|\sigma_m(A)\|\le\|A\|$の関係より$\sigma(A)$が有界となるからである。$f\in L^2$を固定する。仮定より任意の$\varepsilon>0$に対して，ある$k\ge 1$が存在して$\|A-A_k\|<\varepsilon/4\cdot\|f\|$である。このとき三角不等式より，

$$\|\sigma_m(A)f-\sigma_m(A)f\|$$

$$\leq \|\sigma_n(A-A_k)f\| + \|\{\sigma_n(A_k)-\sigma_m(A_k)\}f\| + \|\sigma_m(A_k-A)f\|$$

$$\leq 2\|A-A_k\|\cdot\|f\| + \|\{\sigma_n(A_k)-\sigma_m(A_k)\}f\|$$

$$< \varepsilon/2 + \|\{\sigma_n(A_k)-\sigma_m(A_k)\}f\|$$

が成立する。さらに，$A_k \in AH$ であることから，ある $N \in \mathbb{N}$ があって，$n, m \geq N$ ならば

$$\|\sigma_n(A_k)f - \sigma_m(A_k)f\| < \varepsilon/2$$

とできるから，$\{\sigma_n(A)f\}$ が Cauchy 列となることがわかる。

次に，AH と $\mathcal{L}$ の構造と距離公式について述べる。

<u>定理　2.3.</u>　任意の $A \in AH$ に対して，一意に $L \in \mathcal{L}$ が存在して，$A = \sigma(A) + L$ とかける。すなわち，AH は L^2 上の Hankel 作用素と $\mathcal{L}$ との部分に直和分解できる。さらに，このとき $\|\sigma(A)\| = \|A + \mathcal{L}\|$ である。

(証明)　$A \in AH$ とする。このとき明らかに $A - \sigma(A) \in \mathcal{L}$ である。よって，ある $L \in \mathcal{L}$ が存在して $A = \sigma(A) + L$ とかける。次に一意性について示す。もし，$A = H + B$ とかけたとする。ここで H は L^2 上の Hankel 作用素，B は $\mathcal{L}$ の元とする。このとき，$\sigma(A) - H = B - L$ であり，σ により Hankel 作用素が不変なことから，

$$\sigma(A) - H = \sigma[\sigma(A) - H]$$

$$= \sigma(B-L)$$
$$= 0$$

である。よって $\sigma(A)=H$, $B=L$ がいえた。

最後に $\|\sigma(A)\|=\|A+\mathcal{L}\|$ を示す。任意の $L\in\mathcal{L}$ に対して，$\sigma(L)=0$ であることから，$\|A+L\| \geq \|\sigma(A+L)\|=\|\sigma(A)\|$ が成立する。逆に上の議論から，$\sigma(A)=A-L$ となる $L\in\mathcal{L}$ が存在するから $\|A+\mathcal{L}\|\leq\|A+L\|=\|\sigma(A)\|$ も得られる。

§3. <u>distance formula の応用について</u>　$P_{r,0}$ を L^2 から zH^2 への直交射影とする。$AH_r=\{A\in\mathbb{B}(H^2);\ VAP\in AH\}$，$\mathcal{L}_r=\{L\in\mathbb{B}(H^2);\ VLP\in\mathcal{L}\}$ とする。さらに，L^∞ から L^2 上の Hankel 作用素全体への等長かつ同型な写像 Γ を $\Gamma(\phi):=VH_\phi$ ($\phi\in L^\infty$) によって定義する。このとき次が成立する。

<u>定理3.1.</u>　商空間 $AH_r/\mathcal{L}_r$ と L^∞ は次の等長な写像

$$A+\mathcal{L}_r \to \sigma(VAP) \xrightarrow{\Gamma^{-1}} \phi$$

により同型である。

(証明)　Φ を $\Phi(A+\mathcal{L}_r):=\sigma(VAP)$ ($A\in AH_r$) としたとき，Φ が $AH_r/\mathcal{L}_r$ から L^2 上の Hankel 作用素全体への同型写像となっていることをいえば十分である。$\mathcal{L}_r$ の性質から Φ の定義が整合的であり，線型となっていることは明らかである。まず，Φ が全射であることを示す。任意の L^2 上の Hankel 作用素 H に対して，$\phi\in L^\infty$ が存在して H は $H=VH_\phi$ とかける。このとき，

ϕにより定義されるToeplitz作用素T_ϕは$T_\phi \in AH_r$であり，$\Xi(T_\phi+\mathcal{K}_r) = VH_\phi$である。なぜなら，任意に$i\in\mathbb{Z}$を固定したとき，$n$を$n\geq |i|$なるよう十分大とすると，$VU=U^*V$と$VP=(I-P_{+,0})V$から

$$\begin{aligned}\sigma_n(VT_\phi P)z^i &= P_n U^n V P H_\phi U^n z^i\\ &= P_n U^n (I-P_{+,0}) U^{*n}(VH_\phi z^i)\\ &= P_n(VH_\phi z^i)\\ &\quad - P_n U^n P_{+,0} U^{*n}(VH_\phi z^i)\\ &= P_n(VH_\phi z^i)\end{aligned}$$

となる。よって$\sigma_n(VT_\phi P)z^i$は$VH_\phi z^i$に収束する。さらに，$\{\sigma_n(VT_\phi P)\}$は一様有界だから，ゆえにVH_ϕに強収束し$\sigma(VT_\phi P)=VH_\phi$，すなわち$\Xi(T_\phi+\mathcal{K}_r)=VH_\phi=H$となることがわかる。

最後にΞが等長であることを示す。$A\in AH_r$とすると，定理2.3.から

$$\|\sigma(VAP)\| = \|VAP+\mathcal{K}\|$$

が成立する。さらに，Vがユニタリーであり，$V\mathcal{K}_rP\subset\mathcal{K}$であることから，

$$\begin{aligned}\|\sigma(VAP)\| &\leq \|VAP+V\mathcal{K}_rP\|\\ &\leq \|A+\mathcal{K}_r\|\end{aligned}$$

である。また，$\sigma(VAP)$がL^2上のHankel作用素であるから，

ある $\phi \in L^\infty$ が存在して $\sigma(\nabla A \mathcal{P}) = \nabla \mathcal{H}_\phi$ となり，さらに上のことから $\sigma(\nabla T_\phi \mathcal{P}) = \nabla \mathcal{H}_\phi$ が成立している。よって，$A + \mathcal{L}_r = T_\phi + \mathcal{L}_r$ が得られ，

$$
\begin{aligned}
\|\phi\|_\infty = \|\nabla \mathcal{H}_\phi\| &= \|\sigma(\nabla A \mathcal{P})\| \\
&\leq \|A + \mathcal{L}_r\| \\
&= \|T_\phi + \mathcal{L}_r\| \\
&\leq \|T_\phi\| \\
&= \|\phi\|_\infty
\end{aligned}
$$

となることがわかる。これにより Ξ が等長であることが示された。

§1. において Douglas の結果を述べたが，それは $\mathcal{T}^+/\mathcal{Q}$ と L^∞ との間に積および adjoint を保存する等長な同型対応が存在するということであった。Barría と Halmos は Toeplitz 環 $\mathcal{T}^+$ よりも広い Hankel 環 $\mathcal{H}^+$ を定義した。それは H^2 上の Toeplitz および Hankel 作用素の全体により生成される Banach 環であり，この $\mathcal{H}^+$ に対して Douglas の示したような対応が存在するかどうかについて考察した。その結果として，積および adjoint を保存する $\mathcal{H}^+$ から L^∞ の上への縮小写像が存在することを Barría と Halmos は得ている。しかし，Douglas の結果のような対応までは示されてはいない。これらの考察をするため，

Barría と Halmos は H^2 上の asymptotic Toeplitz 作用素を定義した。定理3.1.では、この概念を L^2 上の作用素に対して拡張し、それから得られる事実を再び H^2 上の作用素へ適用したときに $AH_r/\mathcal{I}_r \cong L^\infty$ となることを示している。また、このときの AH_r は $H^\dagger$ を含んでおり、$H^\dagger$ よりも更に広いクラスで Douglas の示したような事実が成立していることがわかる。しかし、Douglas および Barría-Halmos が扱っているのは Banach 環であるのに対して、ここで扱っている AH_r は Banach 空間でしかない。そのため、積が保存されるという条件が失われているのである。

Douglas の結果と関連した次の系が得られる。これらの関連については次のセクションで述べる。

系 3.2. 任意の $\phi \in L^\infty$ について

$$\|T_\phi\| = \|T_\phi + \mathcal{I}_r\|$$

が成立する。

(証明) 定理3.1.の証明の前半のことから、$T_\phi \in AH_r$ であり、$\Gamma^{-1} \circ \Phi(T_\phi + \mathcal{I}_r) = \phi$ である。さらに、$\Gamma^{-1} \circ \Phi$ は等長であるから $\|T_\phi\| = \|\phi\|_\infty = \|T_\phi + \mathcal{I}_r\|$ が得られる。

§4. Douglas の結果との関連について L^∞ から $\mathcal{T}/\mathcal{C}$ への写像 ξ_c を

$$\xi_c(\phi) := T_\phi + \mathcal{C} \quad (\phi \in L^\infty)$$

で定義する。Douglasはこの写像 ξ_c が積およびadjointを保存する等長な同型写像であることを示したが、その本質的な部分は $\|T_\phi\| = \|T_\phi + Q\|$ となること、すなわち ξ_c が等長となることであった。定理3.1.において定義した写像 $\Gamma^{-1}\circ$王には積とadjointを保存するという性質はないが、その系として $\|T_\phi\| = \|T_\phi + \mathcal{L}_r\|$ なる事実が得られた。ここでは、$\mathcal{L}_r$ の空間としての広さを考察し、Douglasの示した本質的な結果が§3.の系から得られることを述べる。

<u>補題 4.1.</u> $\alpha, \beta \in L^\infty$ とする。次の(1), (2)が成立する。

$$(1) \quad T_\alpha T_\beta = T_{\alpha\beta} - H_{\nabla\alpha} H_\beta$$

$$(2) \quad H_\alpha T_\beta = H_{\alpha\beta} - T_{\nabla\alpha} H_\beta$$

(証明) よく知られた事実である。

<u>補題 4.2.</u> H_r を H^2 上のHankel作用素の全体からなる集合とすると、$\mathbb{B}(H^2)\times H_r \subset \mathcal{L}_r$ である。

(証明) H をHankel作用素とすると、$HS = S^*H$ なる関係から $\{HS^n\}$ は 0 に強収束する。$i<0$ を任意に固定し、$n \geq |i|$ なるよう n を十分大とすると

$$HPU^n z^i = HPU^{n+i}\cdot 1 = HS^{n+i}\cdot 1$$

とかけるから、$\{HPU^n z^i\}$ は 0 に収束する。よって $\{HPU^n\}$

はL^2上の作用素であって、0に強収束することがわかる。ゆえに任意の$C\in\mathbb{B}(H^2)$に対してσ_mの定義から$\{\sigma_m[V(CH)P]\}$は0に強収束する。

これらの2つの補題を用いて次を示す。

<u>命題 4.3.</u>　$\mathcal{L}_r$はQを含んでいる。

(証明)　最初に$\mathcal{L}_r$が$\mathbb{B}(H^2)$の閉部分空間であることをいう。$\{L_k\}\subset\mathcal{L}_r$が$L\in\mathbb{B}(H^2)$に一様収束していると仮定する。このとき、

$$\|VLP - VL_kP\| \le \|V\|\cdot\|L-L_k\|\cdot\|P\|$$

だから$\{VL_kP\}$はVLPに収束する。$\mathcal{L}_r$の定義よりVL_kPは$\mathcal{L}$の元だから命題2.2.より$VLP\in\mathcal{L}$である。よって、Lが$\mathcal{L}_r$の元であることがいえた。

$\alpha,\beta\in L^\infty$, $D\in T^+$, さらにT_k $(1\le k\le m)$をToeplitz作用素とする。Lを

$$L := D(T_\alpha T_\beta - T_\beta T_\alpha)(\Pi\ T_k)$$

とおく。$\mathcal{L}_r$が閉であることから、このようなLが$\mathcal{L}_r$に属することを示せば証明は完了する。補題4.1.(1)から、Lの交換子の部分は

$$T_\alpha T_\beta - T_\beta T_\alpha = H_{V\beta}H_\alpha - H_{V\alpha}H_\beta$$

とかける。さらに、Barria-Halmos [1] の手法を用いて、

$$L = D(B_1H_1 + B_2H_2 + \cdots + B_\ell H_\ell)$$

とできる。ここで B_k は Toeplitz 作用素と Hankel 作用素との有限個の積，H_k は Hankel 作用素を表わす。簡単のため，Hankel 作用素を H，Toeplitz 作用素を T のようにそのシンボルを省略して書くことにすれば，L は

$$L = D(HH - HH)(\prod T_k)$$
$$= D(HHT_1 - HHT_1)(\prod_2 T_k)$$

となっている。ここで補題4.1.(2) を用いて L の HHT_1 の部分を

$$HHT_1 = H(HT_1) = H(H - TH)$$

のように変換し，Hankel 作用素が一番右に来るように操作してやる。これを他の項も含めて帰納的に繰り返せば，L は上のような形になることがわかる。よって L は $\mathbb{B}(H^2) \times \mathcal{H}_r$ の有限個の1次結合であらわされるから，補題4.2.より $L \in \mathcal{Z}_r$ となることがわかる。

上の命題4.3.と系3.2.から Douglas の結果，$\|T_\phi\| = \|T_\phi + Q\|$ が得られることがわかる。また，$\mathcal{Z}_r$ が $\mathcal{H}_r$ を含んでいるのに対して，Q に含まれない Hankel 作用素が存在することが知られており[1]，従って命題4.3.の包含関係は真に成立していることがわかる。

§5. 一般化されたToeplitzおよびHankel作用素　ここでは，ToeplitzおよびHankel作用素をより拡張した形でとらえ，それらのノルムを与える公式を述べる。

$A \in AH$に対して

$$T_A := PV\sigma(A)|H^2$$
$$H_A := P\sigma(A)|H^2$$

と書くこととする。また，$\mathcal{F} := \{F \in AH ; P\sigma(F)|H^2 = 0\}$とする。明らかに上で定義した$T_A$，$H_A$は各々$H^2$上のToeplitzおよびHankel作用素となっている。なぜなら，Aにより定まる$\sigma(A)$はL^2上のHankel作用素だから，ある$\phi \in L^\infty$が存在して$\sigma(A) = V H_\phi$となっている。よって，T_A, H_Aのシンボルはともにϕであり，これらはAによって定義されるH^2上の作用素であると考えることができる。通常のToeplitzおよびHankel作用素はL^∞-関数によって定義されるがL^∞とL^2上のHankel作用素全体とを写像Γによって同一視すれば，これらはL^2上のHankel作用素によって定義されると見ることができる。ここでは，その定義を拡張し，L^∞よりもさらに広いクラス，すなわちAHにより定まるToeplitzおよびHankel作用素のノルムを考察する。

定理 5.1.　任意の$A \in AH$に対して次が成立する。

(1)　$\|T_A\| = \|A + \mathcal{F}\|$

(2) $\|H_A\| = \|A + \mathcal{F}\|$

さらに，$\mathcal{F}$は $\mathcal{F} = T(zH^\infty) + \mathcal{L}$ である。

(証明)　まず，$\mathcal{F} = T(zH^\infty) + \mathcal{L}$ であることを示す。任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{F}$の定義と定理2.3.から，ある $\phi \in L^\infty$ と $L \in \mathcal{L}$ が存在して，$F = T\Pi_\phi + L$ とかける。さらに$\mathcal{F}$の定義より，

$$0 = P\sigma(F)|H^2 = PT\Pi_\phi|H^2 = H_\phi$$

だから，$\phi \in zH^\infty$ なることがわかる．よって，$\mathcal{F} \subset T(zH^\infty) + \mathcal{L}$ であることが示された。逆の包含関係については明らかである。また，(1)については定理2.3.からただちに得られる。

(2)について示す。$\mathcal{F}$の定義より，任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して，$H_A = P\sigma(A-F)|H^2$ であるから，$\|H_A\| \leq \|A-F\|$ なる不等式は常に成立している。一方，H_A はHankel作用素だから，Nehariの定理により[5]，$P\sigma(A - T\Pi_\phi)|H^2 = 0$ かつ $\|H_A\| = \|\phi\|_\infty$ なる $\phi \in L^\infty$ が存在する。従って，$A - T\Pi_\phi \in \mathcal{F}$ であり，

$$\begin{aligned} \|A - (A - T\Pi_\phi)\| &= \|T\Pi_\phi\| \\ &= \|\phi\|_\infty \\ &= \|H_A\| \end{aligned}$$

だから確かに $\|H_A\| = \|A + \mathcal{F}\|$ が成立していることがわかる。

$T \in \mathbb{B}(H^2)$ とする。Feintuch [4] は T により作られる H^2 上

のHankel作用素H_TのノルムがTと，ある$\mathbb{B}(H^2)$の部分空間$\mathcal{L}$。との距離に等しいことを示した。定理5.1.(2)はH^2上のHankel作用素H_AのノルムがL^2上の作用素の差により表わされることを示しており，これはFeintuchの結果と比べて，本来のNehariの定理により近い形の距離公式を与えている。

参考文献

1. J. Barría and P. R. Halmos, Asymptotic Toeplitz Operators, Trans. Math. Soc. 273 (1982), 621-630.
2. A. Brown and P. R. Halmos, Algebraic properties of Toeplitz operators, J. Reine Angew. Math. 213 (1964), 89-102.
3. R. G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, New York, 1972.
4. A. Feintuch, On Hankel operators associated with a class of non-Toeplitz operators, J. Funct. Anal. 94 (1990), 1-13.
5. Z. Nehari, On bounded bilinear forms, Ann. Math. 65 (1957), 153-162.
6. J. R. Partington, An Introduction to Hankel Operators, Cambridge Univ. Press, 1988.