数理解析研究所講究録
第826巻 1993年 68-74

Character of a singular unitary highest weight representation of $Sp(n,\mathbb{R})$.

述: 西山 享 (京都大学・総合人間学部)
記: 志村 弘之 (京都大学・理学部)

1 設定

シンプレクティックリー群のリー環[1]を

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})\cong\left\{X=\begin{bmatrix}A & B\\ C & -{}^tA\end{bmatrix}\middle|\ A\in\mathfrak{gl}(n),\ B,C:\text{symmetric}\right\}$$

その極大コンパクト部分環 $\mathfrak{k}=\mathfrak{u}(n)$ とする[2]。極く普通に対角行列の所で考えてルート系を考える。非コンパクトルートの全体 $\Delta_n=\{\pm(\varepsilon_i+\varepsilon_j)\}$ 、コンパクトルート全体 $\Delta_c=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j|i\neq j\}$ と書く $(1\leq i,j\leq n)$ 。ルートベクトルを $X_{ij}=X_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}$ と書く (以降 $(\varepsilon_i+\varepsilon_j)$ のルートベクトルを主に扱うので只 X_{ij} と記す) 。具体的には、

$$X_{ij}=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c}E_{i,j}+E_{j,i} & \sqrt{-1}(E_{i,j}+E_{j,i})\\ \hline \sqrt{-1}(E_{i,j}+E_{j,i}) & -E_{i,j}-E_{j,i}\end{array}\right].$$

2 特異ユニタリ表現について

斉藤 (正彦)[Sa] 、柏原-Vergne[KV] の結果として次が有る。

事実 2.1 全ての特異ユニタリ最高ウェイト表現は、オシレイター (oscillator) 表現のテンソル積表現の部分表現である。

[1] この集会では $Sp(2,\mathbb{R})$ についての詳しい講演があって本来は西山の講演でも $Sp(2,\mathbb{R})$ について話をすべきであるが、ここではリー群 $Sp(n,\mathbb{R})$ (一般の n) について議論する。実は $n=2$ ではよく知られた結果しか出てこない。

[2] ここではコンパクトカルタン部分群が対角行列になるように $Sp(n,\mathbb{R})$ を実現することにする。詳しくは本講究録の三上氏の講演録を参考にされたい。

ここで注意しておくと、特異とは限らず全てのユニタリ最高ウェイト表現がオシレイター表現のテンソル積の中に実現する [Sa, KV] 。特に、正則離散系列表現、及びその極限もである (証明はユニタリ最高ウェイト表現の分類等を検討することによる)。それら以外を、特異と言う。兎に角、オシレイター表現は扱い易い物なので、これは良いことであった。

3 オシレイター表現

オシレイター表現とそのテンソル積を定義する。

$$V_{osc} = P[z_i|1 \leq i \leq n] = (z_i\text{達の多項式})$$

がオシレイター表現の K-有限ベクトルの全体である。コンパクトな所は普通に作用し ($U(n)$ の自然表現の対称テンソル積への表現) 、非コンパクトな所では次の様に作用する。

$$X_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} = z_i z_j, \qquad X_{-(\varepsilon_i+\varepsilon_j)} = \partial z_i \partial z_j.$$

その m 階のテンソル積は次の様に実現できる。やはり K-有限ベクトルは

$$V_{osc}^{\otimes m} = P[z_{i,j}|1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m]$$

であって作用は

$$X_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} = \sum_{k=1}^{m} z_{i,k} z_{j,k}, \qquad X_{-(\varepsilon_i+\varepsilon_j)} = \sum_{k=1}^{m} \partial_{i,k} \partial_{j,k}.$$

特にコンパクトな所は、

$$X_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} = \sum_{k=1}^{m} z_{i,k} \partial_{j,k} + \frac{m}{2}\delta_{i,j}.$$

但し $\partial_{i,j} = \partial z_{i,k}$ と書いた。最後の$\frac{m}{2}\delta_{i,j}$の項は重要である。$i=j$の時、カルタン部分環の作用を記述している。この $V_{osc}^{\otimes m}$は無限個のユニタリ表現の直和に分れる。これはバーマ加群 (Verma module) とは違って完全可約でありながら、一方ではそれと同様に最高 (最低) ウェイトベクトルによってその直和分解が記述される。即ち、

事実 3.1 $V_{osc}^{\otimes m}$ の最低ウェイトベクトル v に対し、$U(\mathfrak{g})v(\subset V_{osc}^{\otimes m})$ は既約ユニタリ表現になる。

全ての最低ウェイトベクトルを持ってくれば、全体の既約ユニタリ分解が得られるわけである。

4 最低ウェイト表現

ここで $1 \in V_{osc}^{\otimes m}$ という最低ウェイトベクトルにたいして、$U(\mathfrak{g}) \cdot 1$ を考えよう。その最低ウェイトは (作用をみれば明らかに)$(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}, \cdots, \frac{m}{2})$ である。(以下ウェイトは $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$ と書く。)

$m > 2n$ のとき正則離散系列表現、

$m = 2n$ のとき正則離散系列表現の極限、

$m = 1$ のときオシレイター表現、

である。前二者はよく知られている表現である。オシレイター表現も、その指標は Torasso により計算されている [T] 。したがってこの講演では $m < 2n$ ($\frac{m}{2} < n$) の場合に注目したい。(ほかにこのような研究をしてる人はいるのだろうか?)

5 $U(\mathfrak{p}^+)$

カルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}^- \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}^+$ とする (以下リー環は全て複素リー環とする)。$U(\mathfrak{g})\cdot 1$ は、$\mathrm{Ind}\,{}_{\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}^-}^{\mathfrak{g}} 1$ の (既約) 剰余加群であり、その $\mathrm{Ind}\,{}_{\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}^-}^{\mathfrak{g}} 1$ は $U(\mathfrak{p}^+)$ とベクトル空間としては同型であるから、次のような K-準同型 (equivariant map) が存在する。

$$\psi : U(\mathfrak{p}^+) \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \cdot 1$$

ここで $\mathfrak{p}^+$ は可換だから、$U(\mathfrak{p}^+) \simeq S(\mathfrak{p}^+)$ であることに注意する。これで問題は $S(\mathfrak{p}^+)$ のイデアル $\ker\psi$ が何か、と言う所に帰着した。これに対し次が成り立つ。

定理 5.1 $m \geq n$ であれば $\ker\psi = 0$ が成り立つ。

$m \geq 2n$ で ker が無いことはよく知られている。次の事実の応用である。

事実 5.2 正則離散系列表現の最低 K-タイプを τ とする時

$$\text{正則離散系列表現} \simeq \mathrm{Ind}\,{}_{\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}^-}^{\mathfrak{g}} \tau = U(\mathfrak{p}^+) \otimes_{\mathbb{C}} \tau.$$

これはプリミティブには Harish-Chandra [Ha] の結果である[3]。一次元表現からの誘導と思って、最後の等号が定理の主張と同等である。

系 5.3 $m \geq n$ のときコンパクトカルタン部分群上で指標が次のように与えられる。

$$\mathrm{Char}(U(\mathfrak{g})1) = \frac{e^{(\frac{m}{2},\cdots,\frac{m}{2})}}{\prod_{\alpha\in\Delta_n^+}(1-e^{\alpha})} = \frac{\sum_{w\in W_{cpt}} \det w e^{w\rho_{cpt}}}{D}$$

ここで、W_{cpt}はコンパクトワイル群 (今の場合 $\mathfrak{S}_n$)、Dは Weyl denominator。W_{cpt}はコンパクトワイル群だったが、Dは群全体の denominator な事に注意する。また $\rho_{cpt} = (\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \cdots, \frac{1-n}{2})$ である。

この系により $m \geq n$ では指標の形は正則離散系列表現と同じであることが分かる (つまり同じ coherent family に属する)。無限小指標 (infinitesimal character) は、$\lambda + \rho_{cpt} = (\frac{m+n-1}{2}, \cdots, \frac{m+1-n}{2})$ である。

6 証明の概略

定理の証明の面白いところを説明する、あとで条件 $m < n$ の場合にこの議論が役に立つ。

$$\det(k) \equiv \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}\,\sigma \prod_{l=1}^{k} X_{n-k+l,n-k+\sigma(l)} \in U(\mathfrak{p}^+)$$

と定義する。像は元としては $U(\mathfrak{p}^+)$ の元だが、定義 (和の取り方) が行列式によく似た写像である。積の順だが、ウェイトを低いほうに低いほうにとっていくのでこんな並べ方になる。ここで$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ ($\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) に対し、

$$v(\lambda) \equiv \det(1)^{\lambda_1} \det(2)^{\lambda_2} \cdots \det(n)^{\lambda_n}$$

と置く。(これは $U(\mathfrak{p}^+)$ の元で、$\mathfrak{p}^+$ は可換だからこのような書き方が許される。) この $v(\lambda)$ は $\mathfrak{k}$-最低ウェイトベクトルであり、これらが全てである。特に $U(\mathfrak{p}^+)$ は $\mathfrak{k}$ 加群として次の様に分解される。

$$U(\mathfrak{p}^+) = \oplus_\lambda U(\mathfrak{k})v(\lambda).$$

[3]但しきちんとまとめられたものとしては Varadarajan [V] が見易い。

これは本質的には Schmid の結果 [Sch75] である。最低ウェイト 2λの有限次元表現 $U(\mathfrak{k})v(\lambda)$ で分解されたわけだが、この $v(\lambda)$ の ψ による像を具体的に知りたい。そこで実際に計算すると $m \geq n$ では

$$\psi(\det(k))|_{z_{i,k+j}=0\ (n-k+1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m-k)} = \begin{vmatrix} z_{n-k+1,1} & z_{n-k+1,2} & \cdots & z_{n-k+1,k} \\ z_{n-k+2,1} & z_{n-k+2,2} & \cdots & z_{n-k+2,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{n,1} & z_{n,2} & \cdots & z_{n,k} \end{vmatrix}^2$$

となる。では$\psi(v(\lambda)) = 0$ となるのはいつだろうか。$m < n$ では $\psi(\det(k))$ の像は上の表示において $z_{ij} = 0$ $(j \geq m)$ とすればよいので

$$\psi(\det(k)) = 0 \Longleftrightarrow m < k.$$

これで次の、λに関する条件が分かる。

$$\psi(U(\mathfrak{p}^+)) \simeq \oplus_\lambda U(\mathfrak{k})v(\lambda) \quad (\text{但し和は } \lambda_k = 0\ (m < k) \text{ となる}\lambda \text{ にわたる}).$$

この観察から先の定理が証明されるわけであり、実際に指標を計算することができるようになる ($m < n$ への進展)。

7 指標

一般にコンパクトカルタン部分群上での指標は次のように与えられる。

定理 7.1

$$\begin{aligned}
\mathrm{Char}(U(\mathfrak{g})\cdot 1) &= \sum_{\lambda, \lambda_k=0 (k>m+1)} \mathrm{Char}(U(\mathfrak{k})\psi(v(\lambda))) \\
&= \sum_{i_1,\cdots,i_m\geq 0, \sigma\in W_{cpt}} \frac{\mathrm{sgn}\ \sigma e^{\sigma(\rho_{cpt}-2i_1\varepsilon_1-2i_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-\cdots-2i_m(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_m))}}{D_{cpt}} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \frac{\mathrm{sgn}\ \sigma e^{\sigma\rho_{cpt}}}{D_{cpt}(1-e^{\sigma 2\varepsilon_1})(1-e^{\sigma 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)})\cdots(1-e^{\sigma 2(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_m)})}.
\end{aligned}$$

これは形式的冪級数環

$$\{\sum_{i=1}^{l}\sum_{\lambda:\text{優整形式}} c^i_\lambda e^{\mu_i+\lambda} | c^i_\lambda \in \mathbb{C}\ (\text{有限個の}\mu_i\ (1 \le i \le l)\ \text{に対して})\}$$

の中で考えている。さらに計算してもっと簡単な形にしよう。まず計算の簡単な所。
$m = n$ のとき。

$$\text{上式} = \frac{e^{(\frac{n}{2},\cdots,\frac{n}{2})}}{\prod_{\alpha\in\Delta_n^+}(1-e^\alpha)}$$

になっている筈(離散系列ではないがそれとよく似ていた指標)。
$m = n-1$ のとき。

$$\text{上式} = \frac{e^{(\frac{n}{2},\cdots,\frac{n}{2})}}{\prod_{\alpha\in\Delta_n^+}(1-e^\alpha)}(1-e^{(2,\cdots,2)})$$

これに応じて次の予想を得る[4]。

予想 7.2 ([N92, Th.6.2] を参照) 最低ウェイト $(\frac{m}{2},\cdots,\frac{m}{2})$ の最低ウェイト表現の指標は以下の通り。

$$m > n: \quad \frac{\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}\ w e^{w\lambda}}{D} \quad (\text{離散系列の場合 } m > 2n \text{ を含む})$$

$$m = n-1: \quad \frac{\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}\sum_{\tau\in\mathbb{Z}_2}\mathrm{sgn}\ (w\tau)e^{w\lambda}}{D}$$

$$\vdots$$

$$m = n-k: \quad \frac{\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}\sum_{\tau\in\mathbb{Z}_2^k}\mathrm{sgn}\ (w\tau)e^{w\lambda}}{D}$$

$$\vdots$$

但し $\mathbb{Z}_2$はワイル群を $\mathfrak{S}_n\ltimes\mathbb{Z}_2^n$と見て、$\mathbb{Z}_2 = \{1,(-1,\cdots,-1)\} \subset \mathbb{Z}_2^n$ で与えられるもの。一般の最後の式 $(m = n-k)$ における符号の部分ははっきりしていない。

8 非コンパクトカルタン部分群上での指標

以上コンパクトカルタン部分群での話だったが、[He] と同じようにすれば、他のカルタン部分群上でも指標の形は全く同じであることが分かる。

[4]はっきりしていない、とは断っているもののこれは実は誤っている。講演当時はこの誤った予想しかなかったが、その後(正しい)指標の形が [N92] により与えられている。

References.

[Ha] Harish-Chandra. Representations of semisimple Lie groups IV, V, VI. *Amer. J. Math.*, **77**(1955), 743–777: **78**(1956), 1–41, 564–628.

[He] H. Hecht. The characters of some representations of Harish-Chandra. *Math. Ann.*, **219**(1976), 213–226.

[KV] M. Kashiwara and M. Vergne. On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials. *Inv. Math.*, **44**(1978), 1–47.

[N91] K. Nishiyama. Characters and super characters of discrete series representations for orthosymplectic Lie superalgebras. *J. Alg.*, **141**(1991), 399–419.

[N92] K. Nishiyama. Global character of a singular unitary representation of lowest weight type of a metaplectic group. preprint(1992).

[Sa] M. Saito. Représentations unitaires des groupes symplectiques. *J. Math. Soc. Japan*, **24**(1972), 232–251.

[Sch70] W. Schmid. Die Randwerte holomorpher Functionen auf hermitesch symmetrischen Räumen. *Inv. Math.*, **9**(1969/70), 61–80.

[Sch75] W. Schmid. On the characters of discrete series, The Hermitian symmetric case. *Inv. Math.*, **30**(1975), 47–144.

[T] P. Torasso. Sur le caractère de la représentation de Shale-Weil de $Mp(n, \mathbb{R})$ et $Sp(n, \mathbb{C})$. *Math. Ann.*, **252**(1980), 53–86.

[V] V.S. Varadarajan. Infinitesimal theory of representations of semisimple Lie groups. In *Harmonic Analysis and Representations of Semisimple Lie Groups*, pages 131–255, Reidel, 1983.