数理解析研究所講究録
第 826 巻 1993 年 55-67

指標の幾何的計算方法

立教大 理 落合啓之 (HIROYUKI OCHIAI) 述
東大 数理 示野信一 (NOBUKAZU SHIMENO) 記

実半単純リー群の表現の指標を, 対応する複素リー群の flag variety の 2 種類の orbits, $K_{\mathbb{C}}$-orbits と Schubert cells の交わりの Euler 標数という幾何的な言葉で表す公式 (定理 3) を用いて, $SL(2,\mathbb{R})$ 及び $Sp(2,\mathbb{R})$ の場合に指標を計算する.

§1. Invariant eigendistributions.

この節では表現の指標について簡単にまとめておく. 詳しくは, 文献[H], [Kn], [N] 等を参照されたい.

G を連結実半単純線型 Lie 群, $\mathfrak{g}_0$ をその Lie 環, $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}_0$ の複素化とする. K を G の極大コンパクト部分群, $\mathfrak{k}_0$ をその Lie 環, θ を対応する G, $\mathfrak{g}_0$ の Cartan involution とする. $\mathfrak{g}_0$ の subalgebra u_0 に対して, その複素化を u で表す. $Z(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の展開環 $U(\mathfrak{g})$ の中心とする. G 上の distribution Θ が *invariant eigendistribution* (IED) であるとは, ある algebra homomorphism $\mu : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ が存在して,

$$D\Theta = \mu(D)\Theta, \quad \forall D \in Z(\mathfrak{g})$$

および

$$\Theta(gxg^{-1}) = \Theta(x) \quad \forall g, x \in G$$

をみたすことをいう. μ を Θ の *infinitesimal character* と呼ぶ.

以下 admissible な有限生成 $(\mathfrak{g}, K)$-module を *Harish-Chandra module* (HC-module) と呼ぶ. V を HC-module, (π, H) を G の admissible Hilbert 表現で, その K-finite vectors 全体が V と同型になるものとする. このとき $f \to \operatorname{tr} \int_G f(g)\pi(g)dg \quad (f \in C_0^\infty(G))$ は V にしかよらない G 上の distribution を定める. これを V の *character* と呼び, Θ_V で表す. V が infinitesimal character を持つとき, Θ_V は IED になる. 以下本稿では, V の infinitesimal character は $\mathfrak{g}$ の自明な 1 次元表現の infinitesimal character であると仮定する. (これは regular integral infinitesimal character の特別な場合になっている.)

定理 1 (Harish-Chandra). $G_{\rm reg}$ を G の正則元全体とすると, G 上の IED は G 上局所可積分であって, $G_{\rm reg}$ 上実解析的である.

G の θ-stable Cartan subgroups の共役類の代表系を $T_1, \cdots, T_n$ とすると

$$G_{\rm reg} = \bigcup_{x \in G, 1 \le i \le n} x T_{i,reg} x^{-1} \ (T_{i,\rm reg} = T_i \cap G_{\rm reg})$$

が成立している. 従って IED Θ は$\Theta|_{T_{i,\rm reg}}$ $(i = 1, \cdots, n)$ によって決定される.

T を G の Cartan subgroup とし, $\mathfrak{t}_0$ をその Lie 環とする. $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ を ルート系とし, 正ルート系Δ^+ を固定する. $W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ を Δ の Weyl 群, ρ を正ルートの和の半分とする. $\alpha \in \Delta$ に対して $\mathfrak{g}_\alpha$ をルート空間,

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \bar{\mathfrak{n}} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

とおく.

$T_{\rm reg} = T \cap G_{\rm reg}$ 上の関数 D を

$$D = e^\rho \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})$$

で定める. ここで integral weight η に対して, e^η は $T_{\mathbb{C}}$ の 1 次元表現で, その微分表現が η になるものとする. D を *Weyl denominator* と呼ぶ.

定理 2 Θ を infinitesimal character ρ を持つ IED とする. このとき

$$\Theta|_{T_{\rm reg}} = \frac{\sum_{\sigma \in W} p_\sigma e^{\sigma\rho}}{D}$$

と表せる. ここで p_σ は $T_{\rm reg}$ 上の locally constant function である.

指標は既約 HC-modules を分類しており, trivial infinitesimal character を持つ IED 全体は, trivial infinitesimal character を持つ HC-modules の category の Grothendieck 群と同型になっている. trivial infinitesimal character を持つ standard module V の指標 Θ_V に対して p_σ $(\sigma \in W)$ を計算するのが本稿の目的である.

§2. Formula for p_σ.

この節では, 指標の計算のもとになる公式を与える. 詳しくは文献[O1,2], [Ka] を参照されたい. また D 加群については, 例えば文献[S], [T] を挙げておく.

T を G の Cartan subgroup, $\mathfrak{t}$ を対応する $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra とする. 群 U に対してその単位元の連結成分を U° で表す. $\Delta_{\mathbb{R}} = \{\alpha \in \Delta; \theta\alpha = -\alpha\}$ を実ルートの集合とする. 任意の $t \in T_{\mathrm{reg}}$ に対して,

$$-1 < e^{\alpha}(t) < 1, \quad \forall\alpha \in \Delta_{\mathbb{R}} \cap \Delta^{+}$$

となるような, 正ルート系$\Delta^{+} = \Delta^{+}(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \subset \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ が存在する. 以下このような正ルート系を固定して考える.

$$T^{--} = \{t \in T; e^{\alpha}(t) \notin \{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\} \ \forall\alpha \in \Delta^{+}\}$$
$$T^{-} = \{t \in T; e^{\alpha}(t) < 1 \ \forall\alpha \in \Delta_{\mathbb{R}} \cap \Delta^{+}\}$$

とおく. このとき $T^{--} \subset T^{-} \cap G_{\mathrm{reg}}$ となる.

$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} + \mathfrak{n}$: $\mathfrak{g}$ の Borel subalgebra

$B = N_{G_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{b})$: $G_{\mathbb{C}}$ の Borel subgroup

$X \simeq G_{\mathbb{C}}/B$: flag variety

$\sigma \in W$ に対して, $l(\sigma)$ を σ の長さとし, $w_0 \in W$ を最長元とする. $\sigma \in W \simeq N_{G_{\mathbb{C}}}(T_{\mathbb{C}})/T_{\mathbb{C}}$ に対して $X_{\sigma} = B\sigma B/B$ を *Schubert cell* と呼ぶ. このとき $X_{\sigma} \simeq \mathbb{C}^{l(\sigma)}$ で分解 $X = \bigsqcup_{\sigma \in W} X_{\sigma}$ が成立する.

$\mathcal{D}_X$ を X 上の線型微分作用素の層とする. $M(\mathfrak{g}, K)$ を trivial infinitesimal character を持つ HC-modules の category, $M(\mathcal{D}_X, K_{\mathbb{C}})$ を $K_{\mathbb{C}}$-equivariant coherent $\mathcal{D}_X$-modules の category とする. 自然な写像

$$U(\mathfrak{g}) \to \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$$

は全射である. 関手

$$\Delta : M(\mathfrak{g}, K) \to M(\mathcal{D}_X, K_{\mathbb{C}}), \quad \Delta(V) = \mathcal{D}_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} V$$

は category の同値を与え, 逆関手は $\mathcal{M} \to \Gamma(X, \mathcal{M})$ により与えられる (Beilinson-Bernstein 対応). 更に Riemann-Hilbert 対応により

$$\mathcal{F} = DR(\Delta(V)) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \Delta(V))$$

は $K_{\mathbb{C}}$-equivariant perverse sheaf になる. ここで $\mathcal{O}_X$ は X の構造層を表す.

定理 3 (落合) V を自明な infinitesimal character を持つ HC-module, $\mathcal{F}$ を対応する $K_{\mathbb{C}}$-equivariant perverse sheaf の複体とする. このときΘ_V の係数 p_{σ} は T^{--} 上

$$p_{\sigma} = (-1)^{l(\sigma)}\mathrm{Tr}(t; R\Gamma_{X_{\sigma w_0}}(X, \mathcal{F}))$$

で与えられる.

<u>系 4</u>　X の $K_{\mathbb{C}}$-orbit S 上の $K_{\mathbb{C}}$-equivariant な局所系 E に対応する standard module の指標の係数 p_σ は $t \in T^{--}$ において

$$p_\sigma = (-1)^{l(\sigma)+\mathrm{codim}_{\mathbb{C}} S} \alpha_E(t) \chi(X_{\sigma w_0} \cap S)$$

で与えられる. ここで $\alpha_E : T/T^\circ \to \mathbb{Z}$ はある準同型写像で, 特に E が既約なときは $\alpha_E : T/T^\circ \to \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ となる.

E が S 上の既約な局所系 (すなわち S 上の $K_{\mathbb{C}}$-equivariant algebraic line bundle) であるとする. $x \in S$ における stabilizer を $K_{\mathbb{C},x}$ とおくと, $S \simeq K_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C},x}$ である. τ を E の x における fibre に作用する $K_{\mathbb{C},x}$ の指標とすると, τ は $K_{\mathbb{C},x}$ の単位元の連結成分 $(K_{\mathbb{C},x})^\circ$ 上自明でなければならない. inclusion $j : S \hookrightarrow X$ とする. $H^0(X, j_+ \mathcal{O}_S(E))$ は自明な infinitesimal character を持つ HC-module になる. これを data S, E に付随した *standard module* と呼ぶ. $H^0(X, j_+ \mathcal{O}_S(E))$ は unique な既約 HC-submodule を持つ. また, $M(\mathfrak{g}, K)$ の既約な objects はすべてこのようにして得られる.

上の系を用いて, $G = Sp(1, \mathbb{R})$, $Sp(2, \mathbb{R})$ の場合に, $M(\mathfrak{g}, K)$ の standard modules について, p_σ $(\sigma \in W)$ を計算する. 以下の計算では $\alpha_E(t)$ については, 次のことを使う.

- $t \in T^\circ$ ならば $\alpha_E(t) = 1$.
- E が自明ならば $\alpha_E(t) = 1$.
- flag variety X の $K_{\mathbb{C}}$-orbits は θ-stable Cartan subalgebra $\mathfrak{t}'_0$ と root 系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}')$ の正ルート系 $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}')$ の組 $(\mathfrak{t}'_0, \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}'))$ の K-共役類により parametrize される. T' を $\mathfrak{t}'_0$ に対応する G の Cartan 部分群, $T'_{\mathbb{C}}$ をその複素化とすると,

$$K_{\mathbb{C},x}/K^\circ_{\mathbb{C},x} \simeq (T'_{\mathbb{C}} \cap K_{\mathbb{C}})/(T'_{\mathbb{C}} \cap K_{\mathbb{C}})^\circ \simeq (T' \cap K)/(T' \cap K)^\circ \simeq T'/T'^\circ$$

より $\tau \in (K_{\mathbb{C},x}/K^\circ_{\mathbb{C},x})^\wedge = (T'/T'^\circ)^\wedge$ となる. このとき $T' \cap K$ 上

$$\alpha_E(t) = \tau(t)$$

で与えられる.

§3. $SL(2, \mathbb{R})$.

$G = Sp(1, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})$ の場合, flag variety X は 1 次元の複素射影空間 $P^1_{\mathbb{C}}$ (Riemann 球面) と同一視できる. また G の Cartan subgroups の共役類の代表系と

して

$$T^1 = K = \left\{ k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right\}, \quad T^0 = \left\{ \pm a_t = \pm \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \; ; \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

がとれる. T^0 は連結, T^1 は2つの連結成分を持つ. Weyl 群を $W = \{e, w_0\}$ と表す.

X の $K_{\mathbb{C}}$-orbits S は3個あり, $\{0\}$, $\{\infty\}$, $X \setminus \{0,\infty\}$ である. また, Schubert cells $X_\sigma = B\sigma B/B\,(\sigma = e, w_0)$ は B が T^1 に対応する場合には, それぞれ $\{\infty\}$, $X \setminus \{\infty\}$ となり, B が T^0 に対応する場合にはそれぞれ $\{pt\}$, $X \setminus \{pt\}$ (pt は赤道上の一点) となる. 従って $S \cap X_\sigma$ 及びその Euler 標数 (括弧内) は次の表のようになる.

$S \cap X_\sigma$ (and its Euler characteristic)

	$S = \{\infty\}$	$S = \{0\}$	$S = X \setminus \{0,\infty\}$
$X_e = \{\infty\}$ $X_{w_0} = X \setminus \{\infty\}$ (T^1)	$\{\infty\}$ (1) $\varnothing$ (0)	$\varnothing$ (0) $\{0\}$ (1)	$\varnothing$ (0) $X \setminus \{0,\infty\}$ (0)
$X_e = \{pt\}$ $X_{w_0} = X \setminus \{pt\}$ (T^0)	$\varnothing$ (0) $\{\infty\}$ (1)	$\varnothing$ (0) $\{0\}$ (1)	pt (1) $X \setminus \{0,\infty,pt\}$ (-1)

系4より, 次の指標公式を得る. これはよく知られている公式(例えば [Kn, Proposition 10.12, 10.14]) と一致する. ($(T^0)^{--} = \{\pm a_t \,;\, t < 0\}$ に注意する.)
$S = \{\infty\}$ の場合 (holomorphic discrete series),

$$\Theta(k_\theta) = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$
$$\Theta(\pm a_t) = \frac{-e^t}{e^t - e^{-t}} \; (t < 0),$$

$S = \{0\}$ の場合 (anti-holomorphic discrete series),

$$\Theta(k_\theta) = \frac{-e^{i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$
$$\Theta(\pm a_t) = \frac{-e^t}{e^t - e^{-t}} \; (t < 0),$$

$S = X \setminus \{0,\infty\}$ の場合 (principal series),

$$\Theta(k_\theta) = 0$$
$$\Theta(\pm a_t) = \tau(\pm)\frac{-e^t - e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \; (t < 0).$$

ここで, $\tau : T^0/(T^0)^\circ \to \{\pm 1\}$ は S 上の line bundle を定める character である.

§4. $Sp(2,\mathbb{R})$.

4.1. Cartan subgroups. 以下

$$G = Sp(2,\mathbb{R}) = \left\{ g \in SL(4,\mathbb{R});\ {}^t gJg = J \ \text{ for } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$K = Sp(n,\mathbb{R}) \cap O(n).$$

とする. G は適当なユニタリ行列により

$$G_1 = \{ g \in SU(2,2);\ {}^t gJg = J \}$$
$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix}\ ;\ u \in U(2) \right\}$$

と同型になる. G のリー環は

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}) = \{ X \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R});\ {}^t XJ + JX = 0 \}$$

により与えられる. 次の 4 つの algebra は互いに共役でないθ-stable な $\mathfrak{g}_0$ の Cartan subalgebra の完全代表系になる.

$$\mathfrak{t}_0^{20}: \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_2 \\ -\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{t}_0^{01}: \quad \begin{pmatrix} t & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & \theta \\ 0 & 0 & -\theta & -t \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{t}_0^{10}: \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{t}_0^{00}: \quad \begin{pmatrix} s & & & \\ & t & & \\ & & -s & \\ & & & -t \end{pmatrix}$$

T^{20}, T^{01}, T^{10}, T^{00} をそれぞれ対応する G の Cartan 部分群とする. 以下 $\mathfrak{t}^{20}$ に関するルート系を基準にして考え, その他の Cartan subalgebra に関するルート系および正ルート系は Cayley 変換 (4.5 節参照) を介して考えることにする.

$$\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^{20}) = \{ \pm e_1 \pm e_2,\ \pm 2e_1,\ \pm 2e_2 \}$$
$$\Delta^+ = \{ e_1 \pm e_2,\ 2e_1,\ 2e_2 \}$$

とおく. ここで e_j は 4 次対角行列の j 番目の成分を取り出す linear form である. 今の場合, $\Delta_{\mathbb{R}} = \Delta$ であることに注意する.

$T = T^{ij}$ について T^{--} を与えておく.

$$T^{00} = \{ \mathrm{diag}(x_1, x_2, x_2^{-1}, x_1^{-1}) | x_i \in \mathbb{R}^\times \}.$$

また, $T^{00}/(T^{00})^\circ \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ である. $(T^{00})^{--}$ は $-1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1, x_2(x_2 - x_1) > 0$ により与えられる.

$$T^{10} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & & \sin\varphi & \\ & \varepsilon e^t & & \\ -\sin\varphi & & \cos\varphi & \\ & & & \varepsilon e^{-t} \end{pmatrix} ; \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \varepsilon = \pm 1 \right\}.$$

また, $T^{10}/(T^{10})^\circ \simeq \mathbb{Z}_2$ である. $(T^{10})^{--}$ は $-1 < \varepsilon e^t < 1, 0 < \varphi < 2\pi, \varphi \ne \pi$ により与えられる.

$$T^{01} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & & \\ -\sin\theta & \cos\theta & & \\ & & \cos\theta & \sin\theta \\ & & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & & & \\ & e^t & & \\ & & e^{-t} & \\ & & & e^{-t} \end{pmatrix} \right\}.$$

T^{01} は連結である. $(T^{01})^{--}$ は $e^t < 1, 0 < \theta < 2\pi, \theta \ne \pi$ により与えられる.

$$T^{20} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & & \sin\theta_1 & \\ & \cos\theta_2 & & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_1 & & \cos\theta_1 & \\ & -\sin\theta_2 & & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

T^{20} は連結である. $(T^{20})^{--}$ は $0 < \theta_i < 2\pi, \theta_i \ne \pi\,(i = 1, 2), \theta_1 \ne \theta_2, \theta_1 + \theta_2 \ne 2\pi$ で与えられる.

これらのことと §2 の最後の考察より, T' に対応する $K_{\mathbb{C}}$-orbit 上のある line bundle E に対して $\alpha_E(t)\,(t \in T)$ が自明でないものが存在するのは, $(T, T') = (T^{10}, T^{00})$ または (T^{00}, T^{10}) の場合だけであることが判る.

4.2. the flag variety. $\mathfrak{g}$ の Borel subalgebra

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t}^{00} + \mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} s & a & b & d \\ 0 & t & d & c \\ 0 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & -a & -t \end{pmatrix} \right\}$$

に対応する $G_{\mathbb{C}}$ の Borel subgroup $B \subset G_{\mathbb{C}}$ を固定する. また $SL(4, \mathbb{C})$ の Borel subgroup

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}$$

をとると, $B = B_1 \cap Sp(2, \mathbb{C})$ となり, $X = G_{\mathbb{C}}/B$ は $SL(4, \mathbb{C})$ の flag variety $SL(4, \mathbb{C})/B_1$ の閉部分集合と見なせる. $SL(4, \mathbb{C})/B_1$ は $V = \mathbb{C}^4$ の部分空間の列

(flag) $\mathbb{V}: 0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq V_3 \subsetneq V_4 = V$ 全体の空間と同一視される．ベクトル $\boldsymbol{e}_i (1 \leq i \leq 4)$ を

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

で定めれば，$0 \subsetneq \mathbb{C}\boldsymbol{e}_1 \subsetneq \mathbb{C}\boldsymbol{e}_1 + \mathbb{C}\boldsymbol{e}_2 \subsetneq \mathbb{C}\boldsymbol{e}_1 + \mathbb{C}\boldsymbol{e}_2 + \mathbb{C}\boldsymbol{e}_4 \subsetneq V$ における isotropy subgroup が B' になっている．この同一視のもとで $G_{\mathbb{C}}$ の flag variety は $X = \{\mathbb{V}; \langle V_1, V_3 \rangle = 0, \langle V_2, V_2 \rangle = 0\}$ で与えられる．ここで $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対して $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = {}^t\boldsymbol{v} J \boldsymbol{w} = v_1 w_3 + v_2 w_4 - v_3 w_1 - v_4 w_2$ とおいた．$\langle V_2, V_2 \rangle = 0$ は $\langle V_1, V_3 \rangle = 0$ から従うことに注意する．

4.3. $K_{\mathbb{C}}$-orbits on the flag variety. $V = \mathbb{C}^4$ は $K_{\mathbb{C}}$-module として，$V = V_+ + V_-$ と既約表現の直和に分解される．$V_+ \times V_-$ 上の $K_{\mathbb{C}}$-invariant nondegenerate pairing $(\ ,\ )$ を $V_+ \times V_+$, $V_- \times V_-$ 上 0 であるような, symmetric bilinear form に拡張して，これも同じ記号で表す．(K_1 の方の実現をしておけば，$V_+ = \mathbb{C}\boldsymbol{e}_1 + \mathbb{C}\boldsymbol{e}_2$, $V_- = \mathbb{C}\boldsymbol{e}_3 + \mathbb{C}\boldsymbol{e}_4$, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = v_1 w_3 + v_2 w_4 + v_3 w_1 + v_4 w_2$ で与えられる.) このとき，X の $K_{\mathbb{C}}$-orbits は 11 個あり，次の条件で特徴付けられる X の部分集合である．

compact orbits (codimension 3)

$++:\quad V_2 = V_+$

$--:\quad V_2 = V_-$

$+-:\quad V_1 \subset V_+,\ \dim(V_2 \cap V_-) = 1$

$-+:\quad V_1 \subset V_-,\ \dim(V_2 \cap V_+) = 1$

orbits of codimension 2

$+\circ:\quad V_1 \subset V_+,\ \dim(V_2 \cap V_+) = 1,\ V_2 \cap V_- = \{0\}$

$-\circ:\quad V_1 \subset V_-,\ \dim(V_2 \cap V_-) = 1,\ V_2 \cap V_+ = \{0\}$

$a\,a:\quad V_1 \not\subset V_+,\ V_1 \not\subset V_-,\ \dim(V_2 \cap V_+) = \dim(V_2 \cap V_-) = 1$

orbits of codimension 1

$\circ +:\quad V_1 \not\subset V_+,\ V_1 \not\subset V_-,\ \dim(V_2 \cap V_+) = 1,\ V_2 \cap V_- = \{0\}$

$\circ -:\quad V_1 \not\subset V_+,\ V_1 \not\subset V_-,\ \dim(V_2 \cap V_-) = 1,\ V_2 \cap V_+ = \{0\}$

$A\,A:\quad V_1 \not\subset V_+,\ V_1 \not\subset V_-,\ V_2 \cap V_+ = V_2 \cap V_- = \{0\},\ (\ ,\ )|_{V_1 \times V_1} = 0$

open orbit

$\circ\circ:\quad V_1 \not\subset V_+,\ V_1 \not\subset V_-,\ V_2 \cap V_+ = V_2 \cap V_- = \{0\},\ (\ ,\ )|_{V_1 \times V_1} \neq 0$

orbits の名前の付け方は [MO] に従った. (これらの $K_{\mathbb{C}}$-orbits の closure relation は[MO, Fig. 12] で与えられる.)

4.4. Schubert cells. simple roots $e_1 - e_2$, $2e_2$ に関する reflections をそれぞれ s_1, s_2 とおく. このとき, $W = \{e, s_1, s_2, s_1s_2, s_2s_1, s_1s_2s_1, s_2s_1s_2, (s_1s_2)^2\}$ で与えられる. X の Schubert cells $X_\sigma\,(\sigma \in W)$ は, 次の条件で特徴付けられる X の部分集合である. 但し $\langle \boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_j\rangle$ で $\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_j$ により生成される V の部分空間を表す.

$$
\begin{aligned}
\sigma = e : V_1 &= \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle, \\
V_2 &= \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle, \\
V_3 &= \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4 \rangle \\
\sigma = s_1 : V_1 &= \langle \boldsymbol{e}_2 + \lambda \boldsymbol{e}_1 \rangle, \\
V_2 &= \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle, \\
V_3 &= \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 + \lambda \boldsymbol{e}_4 \rangle \ (\lambda \in \mathbb{C}) \\
\sigma = s_2 : V_1 &= \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle, \\
V_2 &= \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4 + \lambda \boldsymbol{e}_2 \rangle, \\
V_3 &= \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4 \rangle \ (\lambda \in \mathbb{C}) \\
\sigma = s_1s_2 : V_1 &= \langle \boldsymbol{e}_2 + \lambda \boldsymbol{e}_1 \rangle, \\
V_2 &= \langle \boldsymbol{e}_2 + \lambda \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3 + \lambda \boldsymbol{e}_4 + \mu \boldsymbol{e}_1 \rangle, \\
V_3 &= \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 + \lambda \boldsymbol{e}_4 \rangle \ (\lambda, \mu \in \mathbb{C}) \\
\sigma = s_2s_1 : V_1 &= \langle \boldsymbol{e}_4 + \lambda \boldsymbol{e}_1 + \mu \boldsymbol{e}_2 \rangle, \\
V_2 &= \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4 + \mu \boldsymbol{e}_2 \rangle, \\
V_3 &= \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3 + \lambda \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4 + \mu \boldsymbol{e}_2 \rangle \ (\lambda, \mu \in \mathbb{C}) \\
\sigma = s_1s_2s_1 : V_1 &= \langle \boldsymbol{e}_3 + \lambda \boldsymbol{e}_1 + \mu \boldsymbol{e}_2 + \nu \boldsymbol{e}_4 \rangle, \\
V_2 &= \langle \boldsymbol{e}_2 + \nu \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3 + \lambda \boldsymbol{e}_1 + \mu \boldsymbol{e}_2 + \nu \boldsymbol{e}_4 \rangle, \\
V_3 &= \langle \boldsymbol{e}_2 + \nu \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3 + \lambda \boldsymbol{e}_1 + \mu \boldsymbol{e}_2 + \nu \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_4 + \lambda \boldsymbol{e}_1 \rangle \ (\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}) \\
\sigma = s_2s_1s_2 : V_1 &= \langle \boldsymbol{e}_4 + \lambda \boldsymbol{e}_1 + \mu \boldsymbol{e}_2 \rangle, \\
V_2 &= \langle \boldsymbol{e}_4 + \lambda \boldsymbol{e}_1 + \mu \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 + \nu \boldsymbol{e}_1 + \lambda \boldsymbol{e}_2 \rangle, \\
V_3 &= \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4 + \mu \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 + \lambda \boldsymbol{e}_2 \rangle \ (\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}) \\
\sigma = (s_1s_2)^2 : V_1 &= \langle \boldsymbol{e}_3 + \lambda \boldsymbol{e}_1 + \mu \boldsymbol{e}_2 + \nu \boldsymbol{e}_4 \rangle, \\
V_2 &= \langle \boldsymbol{e}_3 + \lambda \boldsymbol{e}_1 + \mu \boldsymbol{e}_2 + \nu \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_4 + \mu \boldsymbol{e}_1 + \tau(\boldsymbol{e}_2 - \nu \boldsymbol{e}_1) \rangle, \\
V_3 &= \langle \boldsymbol{e}_3 + \lambda \boldsymbol{e}_1 + \mu \boldsymbol{e}_2 + \nu \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_4 + \mu \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 - \nu \boldsymbol{e}_1 \rangle \ (\lambda, \mu, \nu, \tau \in \mathbb{C})
\end{aligned}
$$

4.5. Cayley transformations. 4.3 節で $K_{\mathbb{C}}$-orbits を, 4.4 節で T^{00} に対応する Schubert cells を与えたが, その他の Cartan subgroups を扱うために, Cayley 変換を導入する. 次により $c^{ij} \in G_{\mathbb{C}}$ を定義すると, $\mathrm{Ad}(c^{ij})$ は $\mathfrak{t}^{00}$ から $\mathfrak{t}^{ij}$ への bijection を与える.

$$c^{00} = I, \quad c^{10} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c^{01} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

$$c^{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = (c^{20})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

各 Cartan subgroups に対応した$\chi(S \cap X_\sigma) = \chi(\{\mathbb{V} \in S \cap X_\sigma\})$ を計算するには, Schubert cells X_σ は 4.4 節で与えたものを考え, $K_{\mathbb{C}}$-orbits S は

$$V_+ = (c^{ij})^{-1} c^{-1}(\langle e_1, e_2 \rangle)$$
$$V_- = (c^{ij})^{-1} c^{-1}(\langle e_3, e_4 \rangle)$$

として, 4.3 節で与えたものを用いればよい. すなわち

$$T^{20} : V_+ = \langle e_1, e_2 \rangle,\ V_- = \langle e_3, e_4 \rangle$$
$$T^{10} : V_+ = \langle e_1, e_2 - ie_4 \rangle,\ V_- = \langle e_3, e_2 + ie_4 \rangle$$
$$T^{01} : V_+ = \langle e_1 - e_4, e_2 - e_3 \rangle,\ V_- = \langle e_1 + e_4, e_2 + e_3 \rangle$$
$$T^{00} : V_+ = \langle e_3 + ie_1, e_4 + ie_2 \rangle,\ V_- = \langle e_3 - ie_1, e_4 - ie_2 \rangle$$

として, 考えた $K_{\mathbb{C}}$-orbits Sと 4.4 節で与えた Schubert cells X_σ の交わりの Euler 標数を計算する. Schubert cells は $\mathbb{C}^{l(\sigma)}$ と同型であるから, $S \cap X_\sigma$ を $\mathbb{C}^{l(\sigma)}$ の部分集合として具体的に表して, その Euler 標数を一つ一つ計算していくことが出来る.

4.6. results for $Sp(2, \mathbb{R})$. 各 Cartan subgroups に対して Schubert cells を横軸にとり, $K_{\mathbb{C}}$-orbits を縦軸にとり, その交わりの Euler 標数を表にした. non-trivial な line bundle に対応して自明でない $\alpha_E(t)$ がある場合はそれも表に書き入れた. 空欄は交わりが空集合のときで, 0 が書き入れてあるのは, 交わりは空集合でないが, Euler 標数は 0 になる場合である.

$T = T^{20}$

	e	s_1	s_2	s_1s_2	s_2s_1	$s_1s_2s_1$	$s_2s_1s_2$	$(s_1s_2)^2$
$++$	1	1						
$--$							1	1
$+-$			1	1				
$-+$					1	1		0
$+\circ$			0	0				
$-\circ$							0	0
$a\,a$					0	0		
$\circ+$					0	0		
$\circ-$							0	0
$A\,A$							0	0
$\circ\circ$							0	0

$T = T^{10}$

orbits $+\circ$, $-\circ$, $\circ+$, $\circ-$ には, $T^{10}/(T^{10})^{\circ} \simeq \mathbb{Z}_2$ の表現 ε に対応する, line bundles がある.

	e	s_1	s_2	s_1s_2	s_2s_1	$s_1s_2s_1$	$s_2s_1s_2$	$(s_1s_2)^2$
$++$			1		1			
$--$							1	1
$+-$			1				1	
$-+$					1			1
$+\circ\begin{cases}+\\-\end{cases}$	1 ε		-1 $-\varepsilon$				0 0	
$-\circ\begin{cases}+\\-\end{cases}$						1 ε	0 0	-1 $-\varepsilon$
$a\,a$					0			0
$\circ+\begin{cases}+\\-\end{cases}$		1			-1			0
$\circ-\begin{cases}+\\-\end{cases}$				1		0	-1	0
$A\,A$						0	0	0
$\circ\circ$				0		0	0	0

T^{01}

	e	s_1	s_2	s_1s_2	s_2s_1	$s_1s_2s_1$	$s_2s_1s_2$	$(s_1s_2)^2$
$++$							1	1
$--$							1	1
$+-$					1	1		0
$-+$					1	1		0
$+\circ$						0	0	0
$-\circ$						0	0	0
$a\,a$			1	1	-1	-1	0	0
$\circ+$				0		0	0	0
$\circ-$				0		0	0	0
$A\,A$	1	1	0	0	0	0	-1	-1
$\circ\circ$		0		0	0	0	0	0

$T = T^{00}$

open orbit $\circ\circ$ は主系列表現に対応するが, この場合, 指標には, $T^{00}/(T^{00})^\circ \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の表現がつく. (M の表現のパラメータに対応する.)

	e	s_1	s_2	s_1s_2	s_2s_1	$s_1s_2s_1$	$s_2s_1s_2$	$(s_1s_2)^2$
$++$							1	1
$--$							1	1
$+-$						2	1	-1
$-+$						2	1	-1
$+\circ$					1	-1	-1	1
$-\circ$					1	-1	-1	1
$a\,a$				2		-2	-2	2
$\circ+$			1	-1	0	0	1	-1
$\circ-$			1	-1	0	0	1	-1
$A\,A$		2		0	-2	2		-2
$\circ\circ$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1

References

[H] T. Hirai, 実半単純 Lie 群の表現の指標と不変固有超函数, 数学 **23** (1971), 241–260.

[HS] H. Hecht and W. Schmid, *Characters, asymptotics, and* $\mathfrak{n}$*-homology of Harish-Chandra modules*, Acta Math. **151** (1983), 49–151.

[Ka] M. Kashiwara, *Character, character cycle, fixed point theorem and group representations*, Advanced Studies in Pure Math. 14, Kinokuniya, Tokyo, 1988, pp. 369–378.

[Kn] A. W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups: An Overview Based on Examples*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1986.

[N] K. Nishiyama, 半単純リー群の指標加群と Weyl 群およびその Hecke 環の表現, 数学 **40** (1988), 135–148.

[MO] T. Matsuki and T. Oshima, *Embeddings of discrete series into principal series*, The Orbit Method in Representation Theory, Birkhäuser, Boston Basel Berlin, 1990, pp. 147–175.

[O1] H. Ochiai, *Characters and character cycles*, preprint.

[O2] ———, *Character and character cycle*, Seminar Reports of Unitary Representations **XI** (1991), 18–24.

[S] W. Schmid, *Construction and classification of irreducible Harish-Chandra modules*, Harmonic Analysis on Reductive Groups, Birkhäuser, Boston Basel Berlin, 1991, pp. 235–275.

[T] T. Tanisaki, 半単純リー群の表現と D 加群, 数学 **41** (1989), 126–139.

[V] D. Vogan, *Irreducible characters of semisimple Lie groups* III, Invent. Math. **71** (1983), 381–417.