数理解析研究所講究録
826巻 1993年 42-54

Plancherel formula for line bundles on Hermitian symmetric spaces

東大数理 示野 信一 (Nobukazu Shimeno)

§1 Introduction

目標 非コンパクト型のリーマン対称空間のPlancherel公式(Harish-Chandra の球函数による理論)を non-trivial line bundle の場合に一般化する。

Notations

G: connected non-compact real semisimple Lie group with finite center

K: a maximal compact subgroup of G

$G=KAN$: Iwasawa decomposition of G

$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$: G, K, A, N に対応する Lie algebra

$g\in G$ に対して, $g\in k(g)\exp H(g) N$ $(k(g)\in K, H(g)\in\mathfrak{a})$ とする。

$\mathfrak{a}^*$: $\mathfrak{a}$ の dual

$\mathfrak{g}_\alpha := \{X\in\mathfrak{g} : [H, X]=\alpha(H)X \quad \text{for } {}^\forall H\in\mathfrak{a}\}$ $\quad (\alpha\in\mathfrak{a}^*)$

$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \{\alpha \in \mathfrak{a}^* : \mathfrak{g}_\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 0\}$: restricted root 系

$\Sigma^+ \subset \Sigma$: $\mathfrak{n}$ に対応する positive system

W : Σ の Weyl 群

$m_\alpha := \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_\alpha$

$\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha \in \mathfrak{a}^*$

$\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$: Σ^+ に対応する positive Weyl chamber

$A^+ := \exp \mathfrak{a}^+$

$\mathfrak{a}^*_+ := \{\lambda \in \mathfrak{a}^* : \langle \lambda, \alpha \rangle > 0 \quad \text{for } {}^\forall \alpha \in \Sigma^+\}$

G/K は、Riemannian symmetric space of non-compact type と呼ばれ、次の様な例がある。

<u>Ex. 1</u> $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ $\quad \left(\mathfrak{a} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$

<u>Ex. 2</u> $Sp(2, \mathbb{R})/U(2)$ $\quad (\dim \mathfrak{a} = 2)$

Harish-Chandra の理論の復習

- 球函数

$\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \ (= \mathfrak{a}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ に対して

$$\phi_\lambda(g) = \int_K e^{-(\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))}\, dk \qquad (g \in G)$$

dk は K 上の normalized Haar measure

を球函数と呼ぶ。球函数は、次の3つの性質で特徴付けられる。

$$\begin{cases} \circ\ \text{両側}K\text{-不変} \\ \circ\ G/K\text{上の不変微分作用素の固有値}\chi_\lambda\text{の同時固有函数} \\ \circ\ \phi_\lambda(e)=1 \end{cases}$$

<u>Lemma</u> $\phi_\lambda = \phi_\mu \iff \lambda \in W\cdot\mu$

Ex 1. の場合、$\phi_\lambda|_A$ は Gauss の超幾何函数で表せる。

∘ Harish-Chandra series

λ: generic の時、A^+上

$$\phi_\lambda = \sum_{w\in W} c(w\lambda)\Phi_{w\lambda}$$

と展開できる。ここで、$c(\lambda)$ は Harish-Chandra の c-函数と呼ばれるもので Γ函数の積、商で具体的に書ける。また、Φ_λ は A^+上定義される不変微分作用素の動径成分の固有函数で、$\Phi_\lambda \sim a^{\lambda-\rho}$ ($a\to\infty$ in A^+) という漸近挙動を持つものである。この展開を ϕ_λ の Harish-Chandra series と呼ぶ。

Ex. 1 の場合、$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \ni \lambda \mapsto \lambda\left(\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\right) \in \mathbb{C}$ により、$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ と $\mathbb{C}$ を同一視すると、超幾何函数の接続公式で、H-C series は

$$c(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}$$ となる。

∘ Harish-Chandra 変換

$f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ に対して

$$\hat{f}(\lambda) := \int_G f(g)\,\phi_{-\lambda}(g)\,dg$$

(dg: G上の Haar measure を適当に normalize したもの)

と定義し、これを f の Harish-Chandra 変換と呼ぶ。この逆変換は次で与えられる。

<u>Theorem</u> (Harish-Chandra)

$$f(g) = \frac{1}{|W|}\int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} \hat{f}(\lambda)\,\phi_\lambda(g)\,|c(\lambda)|^{-2}\,d\lambda$$

§2 Harish-Chandra 変換の一般化とその Inversion formula (1-st form)

Gに次の仮定をつける。

$\boxed{\text{仮定}}$ Gは simple, connected Lie group で、G/K は Hermitian symmetric space ($\Rightarrow$ Kは1次元の center をもつ)。Gの center を $Z(G)$ と書く。

この時、τをKの1次元表現 ($\tau: K \to \mathbb{C}^\times$, alg. hom.) とすれば、$\tau$は τ_ℓ ($\ell \in \mathbb{Z}$) と parametrize される。

Ex.1、Ex.2 は共に上の仮定を満たし、Kの1次元表現は、次の様になる。

<u>Ex.1の場合</u> $K = SO(2) \ni \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \overset{\tau_\ell}{\longmapsto} e^{i\ell\theta} \in \mathbb{C}^\times$

<u>Ex.2の場合</u> $K = \left\{ \begin{bmatrix} u & \\ & \bar{u} \end{bmatrix} : u \in U(2) \right\} \ni \begin{bmatrix} u & \\ & \bar{u} \end{bmatrix} \overset{\tau_\ell}{\longmapsto} (\det u)^\ell \in \mathbb{C}^\times$

更に、Gが simply connected と仮定する。

(Ex.1 では、$G = \widetilde{SL}(2.\mathbb{R})$ (universal cover), $K = \mathbb{R}$ となる。)

すると、parameter ℓ は $\mathbb{R}$ (unitary), 又は $\mathbb{C}$ (non-unitary) にまでのびる。

こうする理由は

1° 連続parameter は離散 parameter より一般的

2° 解析をするので parameter は連続な方がよい

◦ type $\tau_{-\ell}$ の球函数

まず、Harish-Chandra の球函数の一般化として、type $\tau_{-\ell}$ の球函数を次で定義する。

$$\Phi_{\lambda.\ell}(g) := \int_{K/Z(G)} \tau_\ell(k^{-1}k(g^{-1}k))\, e^{-(\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))}\, dk \quad (g \in G)$$

$$\lambda \in \mathfrak{a}_c^*,\ \ell \in \mathbb{C}$$

これは、次の3つの性質で特徴付けられる。

$$\begin{cases} \circ\ \Phi_{\lambda.\ell}(k_1 g k_2) = \tau_\ell(k_1 k_2)^{-1}\Phi_{\lambda.\ell}(g) \quad (k_1.k_2 \in K,\ g \in G) \\ \circ\ G/K \text{ の } \tau_\ell \text{ に同伴した line bundle 上の不変微分作用素の固有値 } \chi_{\lambda.\ell} \text{ の同時固有函数} \\ \circ\ \Phi_{\lambda.\ell}(e) = 1 \end{cases}$$

<u>Lemma</u> $\Phi_{\lambda.\ell} = \Phi_{\mu.\ell} \iff \lambda \in W\cdot\mu$

$\Phi_{\lambda.0} = \Phi_\lambda$ が成り立つ。

Ex.1 の場合、$\Phi_{\lambda.\ell}|_A$ はやはり Gauss の超幾何函数で表せる。

・Harish-Chandra series

$\Phi_{\lambda,\ell}$ についても Harish-Chandra series が得られて次の様になる。

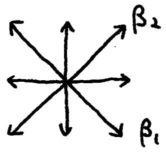
λ: generic な時、A^+ 上

$$\Phi_{\lambda,\ell} = \sum_{w\in W} c(w\lambda,\ell)\,\Phi_{w\lambda,\ell}$$

$$\begin{cases} c(\lambda,\ell) : c\text{-関数}（\text{具体的に計算できる}） \\ \qquad c(\lambda,0)=c(\lambda)\ (\text{Harish-Chandra の } c\text{-関数}) \\ \Phi_{\lambda,\ell} : \text{不変微分作用素の動径成分の固有函数} \\ \qquad \Phi_{\lambda,\ell} \sim a^{\lambda-\rho}\quad (a\to\infty \text{ in } A^+) \end{cases}$$

<u>Ex.1 の場合</u>　$c(\lambda,\ell) = \dfrac{2^{1-\lambda}\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac12(\lambda+1+\ell))\,\Gamma(\frac12(\lambda+1-\ell))}$

<u>Ex.2 の場合</u>　$\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$ に対して、$\Sigma^+=\{\beta_1,\beta_2,\frac12(\beta_2\pm\beta_1)\}$ とする。



$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \ni \lambda = \frac{x}{2}\beta_1+\frac{y}{2}\beta_2 \longrightarrow (x,y)\in\mathbb{C}^2$ によって

$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ と $\mathbb{C}^2$ を同一視すると、

$$\begin{cases} c_1(z) = \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac12 z)}{\Gamma(\frac12(z+1))} \\ c_2(z,\ell) = \dfrac{2^{1-z}\,\Gamma(z)}{\Gamma(\frac12(z+1+\ell))\,\Gamma(\frac12(z+1-\ell))} \end{cases}$$

として、

$$c(\lambda,\ell) = c_1(x+y)\,c_1(y-x)\,c_2(x,\ell)\,c_2(y,\ell)$$

と書ける。

・Harish-Chandra 変換

$\mathcal{D}_\ell(G) := \{ f \in C^\infty(G) : f(k_1 g k_2) = \tau_\ell(k_1 k_2)^{-1} f(g),\ k_1, k_2 \in K,\ g \in G$

fは modulo $Z(G)$ で compact support $\}$

とおき、$f \in \mathcal{D}_\ell(G)$ に対して

$$f_\ell^\wedge(\lambda) := \int_{G/Z(G)} f(g)\,\Phi_{-\lambda,-\ell}(g)\,dg$$

(dg：適当に normalize した Haar measure)

と定める。

<u>問題</u>　$f \longmapsto f_\ell^\wedge(\lambda)$ の逆変換を具体的に求めよ。

以下、この問題を考察する。

$c(\lambda, \ell)$ を具体的に書いてみると

(☆) $\left\{ {}^\exists \eta \in -\mathcal{C}\ell(\mathfrak{a}_+^*) \right.$ s.t. $c(-\lambda, \ell)^{-1}$が $\mathrm{Re}\,\lambda \in \eta - \mathcal{C}\ell(\mathfrak{a}_+^*)$ で pole を持たない。

が分かる。例えば、Ex.1 では $\eta < -|\mathrm{Re}\,\ell| + 1$ とすればよい。

<u>Lemma</u>　一般に $|\mathrm{Re}\,\ell|$ が十分小さければ $\eta = 0$ としてよい。

$\cdots (*)$

<u>Theorem A.</u> (Inversion formula, 1st form)

$$f(a) = \int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^* + \eta} f_\ell^\wedge(\lambda)\,\Phi_{\lambda,\ell}(a)\,c(-\lambda, \ell)^{-1}\,d\lambda \qquad (a \in A^+)$$

右辺は (☆) を満たす η の取り方に依らぬ。

<u>Remark</u>　(*) が成り立つ場合、$\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ が Weyl 群不変だから、変数変換と Harish-Chandra 展開により、上の式は

$$f(a) = \frac{1}{|W|}\int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} f_\ell^\wedge(\lambda)\,\Phi_{\lambda,\ell}(a)\,c(\lambda, \ell)^{-1} c(-\lambda, \ell)^{-1}\,d\lambda$$

となって定義域をG上にのばせる。

Th.A の証明の方針

1°) $\ell\in\mathbb{R}$, $|\ell|$ が十分小の時は、$\ell=0$ の時の Rosenberg の証明([1])が一般化できる。

2°) ℓ: 一般の時は、statement の右辺が ℓ に holomorphic に depend することを示して、解析接続する。

§3 Inversion formula (2nd form)

以下、$\ell\in\mathbb{R}$ とする。Th.A の積分路を $\eta+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ から $\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ に移動して、留数を計算し、それらを $\Phi_{\lambda,\ell}$ を用いて表す。積分路の移動の際に必要な、被積分函数の無限遠($\mathrm{Im}\,\lambda$ に関して)の近傍での評価は出来るが、ここでは省略する。以下では、Ex.1 ($\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$)、Ex.2 ($\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$) の場合を説明するが、その議論は、一般の場合にも通用する。

<u>Ex.1 の場合</u>

§2で書いた $c(\lambda,\ell)$ の形から、$c(-\lambda,\ell)^{-1}$ の $\mathrm{Re}\,\lambda\leq 0$ における poles の集合は、

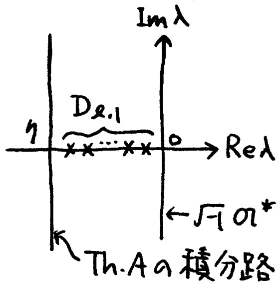
$$D_{\ell,1}:=\{x=-|\ell|+1+2j : j\in\mathbb{N},\ x<0\} \qquad \text{但し、}\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$$

となることが分かる。特に、$|\ell|\leq 1$ ならば、$c(-\lambda,\ell)^{-1}$ は $\mathrm{Re}\,\lambda\leq 0$ において regular。

Theorem B （Ex. 1の場合）

$$f(g)=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{-1}\mathbb{R}} \hat{f_\ell}(\lambda)\,\phi_{\lambda,\ell}(g)\,|c(\lambda,\ell)|^{-2}d\lambda$$
$$+\sum_{x\in D_{\ell,1}}(-2\pi\sqrt{-1})\,\hat{f_\ell}(x)\,\phi_{x,\ell}(g)\,\mathop{\mathrm{Res}}_{\lambda=x}\left[c(\lambda,\ell)^{-1}c(-\lambda,\ell)^{-1}\right],$$
$$(g\in G)$$

proof) $\mathfrak{a}_c^*\simeq\mathbb{C}$ と同一視する。



$\hat{f_\ell}(\lambda)$はλについて holomorphic、$\Phi_{\lambda,\ell}$は$\mathrm{Re}\,\lambda\leq 0$で regular なので、Th. Aの被積分函数 $\hat{f_\ell}(\lambda)\Phi_{\lambda,\ell}\,c(-\lambda,\ell)^{-1}$ の possible poles の集合は、$D_{\ell,1}$（高々一位）。そこで、Th. A の式は次の様になる。

$$f(a)=\int_{\eta+\sqrt{-1}\mathbb{R}}\hat{f_\ell}(\lambda)\,\Phi_{\lambda,\ell}(a)\,c(-\lambda,\ell)^{-1}d\lambda$$
$$=\int_{\sqrt{-1}\mathbb{R}}\hat{f_\ell}(\lambda)\,\Phi_{\lambda,\ell}(a)\,c(-\lambda,\ell)^{-1}d\lambda$$
$$+\sum_{x\in D_{\ell,1}}(-2\pi\sqrt{-1})\mathop{\mathrm{Res}}_{\lambda=x}\left\{\hat{f_\ell}(\lambda)\,\Phi_{\lambda,\ell}(a)\,c(-\lambda,\ell)^{-1}\right\}$$

右辺第1項はTh. A の Rem. と同様に$\phi_{\lambda,\ell}$で書ける。また、$\lambda\notin\mathbb{Z}$の時、A^+上

$$\phi_{\lambda,\ell}=c(\lambda,\ell)\,\Phi_{\lambda,\ell}+c(-\lambda,\ell)\,\Phi_{-\lambda,\ell}$$

であり（Harish-Chandra series）、ℓ: generic なら $D_{\ell,1}\cap\mathbb{Z}=\phi$ で、$x\in D_{\ell,1}$に対して $c(-x,\ell)=0$ だから、

$$\phi_{x,\ell}=c(x,\ell)\,\Phi_{x,\ell}$$

$\phi_{x,\ell}$はℓについて holomorphic だから解析接続によって、この式は任意のℓで成立。これを用いて上の式の右辺第2項も$\phi_{\lambda,\ell}$で書ける。

$$\therefore\ f(a) = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{-1}\mathbb{R}} \hat{f_\ell}(\lambda)\phi_{\lambda,\ell}(a)|c(\lambda,\ell)|^{-2}d\lambda$$
$$+\sum_{x\in D_{\ell,1}}(-2\pi\sqrt{-1})\hat{f_\ell}(x)\phi_{x,\ell}(a)\operatorname*{Res}_{\lambda=x}\{c(\lambda,\ell)^{-1}c(-\lambda,\ell)^{-1}\}$$
$$(a\in A^+)$$

$G=K\overline{A^+}K$ により、G上にのばせる。∎

<u>Theorem C</u>（Ex.1 の場合）

$$|\phi_{\lambda,\ell}|\in L^2(G/Z(G)) \iff \lambda\in D_{\ell,1}\ \text{or}\ -\lambda\in D_{\ell,1}$$

この時、対応する $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ の relative discrete series の lowest K-type は $(|\lambda|-1)\operatorname{sgn}\ell$。

<u>Ex.2 の場合</u>

$D_{\ell,2}:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+|\ell|-1\in 2\mathbb{N},\ y-x-1\in 2\mathbb{N},\ y<0\}$ とおく。

<u>Theorem B</u>（Ex.2 の場合）

$$f(g) = \frac{1}{8}\int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} \hat{f_\ell}(\lambda)\phi_{\lambda,\ell}(g)|c(\lambda,\ell)|^{-2}d\lambda$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{x\in D_{\ell,1}}(-2\pi\sqrt{-1})\operatorname*{Res}_{z=x}(c_2(z,\ell)^{-1}c_2(-z,\ell)^{-1})$$
$$\times\int_{\sqrt{-1}\mathbb{R}}\hat{f_\ell}(\lambda)\phi_{\lambda,\ell}(g)|c_1(x+y)c_1(y-x)c_2(y,\ell)|^{-2}dy$$
$$+\sum_{(x,y)\in D_{\ell,2}}(-2\pi\sqrt{-1})^2\operatorname*{Res}_{y}\operatorname*{Res}_{x}\{c(\lambda,\ell)^{-1}c(-\lambda,\ell)^{-1}\}\hat{f_\ell}(\lambda)\phi_{\lambda,\ell}(g)$$
$$(g\in G)$$

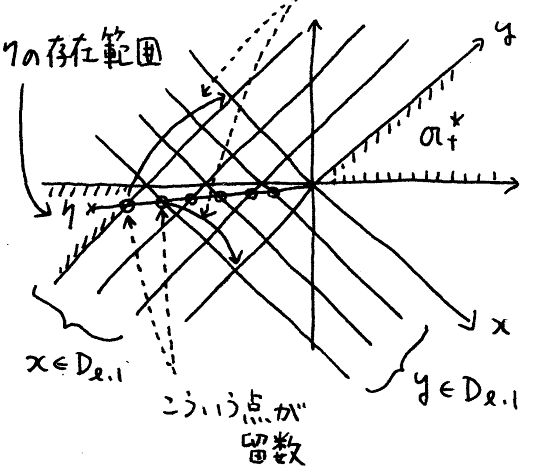
<u>Theorem C</u>（Ex.2の場合）

$$|\phi_{\lambda,\ell}|\in L^2(G/Z(G)) \iff \exists\mu\in W\cdot\lambda\ \text{s.t.}\ \mu\in D_{\ell,2}$$

対応する relative discrete series は holomorphic d.s.

（lowest K-type は 1 次元とは限らない）

proof of Th. B) 留数の計算において、更に積分路を移動する（ここでも留数が出る）



← $\lambda=(x,y)$ の実での切り口。

ηを $x=y$ という hyperplane の十分近くにとると、留数定理より、

$$\int_{\eta+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} \hat{f_\ell}(\lambda)\Phi_{\lambda,\ell}(a)\, C(-\lambda,\ell)^{-1}\, d\lambda - \int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} \hat{f_\ell}(\lambda)\Phi_{\lambda,\ell}(a)\, C(-\lambda,\ell)^{-1}\, d\lambda$$
$$=(-2\pi\sqrt{-1})\sum_{z\in D_{\ell,1}}\Big\{\int_{(z,z)+\sqrt{-1}\mathbb{R}} \operatorname*{Res}_{x=z}\left(\hat{f_\ell}(\lambda)\Phi_{\lambda,\ell}(a)\, C(-\lambda,\ell)^{-1}\right) dy + \int_{(z+z)+\sqrt{-1}\mathbb{R}} \operatorname*{Res}_{y=z}\left(\hat{f_\ell}(\lambda)\Phi_{\lambda,\ell}(a)\, C(-\lambda,\ell)^{-1}\right) dx\Big\} \cdots (1)$$

右辺の２番目の積分は、変数変換により

$$\int_{(z,z)+\sqrt{-1}\mathbb{R}} \operatorname*{Res}_{x=z}\left(\hat{f_\ell}(\bar\lambda)\Phi_{\bar\lambda,\ell}(a)\, C(-\bar\lambda,\ell)^{-1}\right) dy$$

となる（但し、$\lambda=(x,y)$ に対して $\bar\lambda=(y,x)$）。この式と、$\hat{f_\ell}$ の W-invariance、$\bar\lambda\in W\cdot\lambda$ を用いて、(1)の右辺のΣの中身は

$$\int_{(z,z)+\sqrt{-1}\mathbb{R}} \operatorname*{Res}_{x=z} \hat{f_\ell}(\lambda)\left\{\Phi_{\lambda,\ell}(a)\, C(-\lambda,\ell)^{-1} + \Phi_{\bar\lambda,\ell}(a)\, C(-\bar\lambda,\ell)^{-1}\right\} dy \cdots (2)$$

となる。ここで、$\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)$ とおいて、

$$\Phi^{(\alpha_1)}_{\lambda,\ell}(a) := c_1(y-x)\Phi_{\lambda,\ell}(a) + c_1(x-y)\Phi_{\bar\lambda,\ell}(a)$$

とおく。これは、$\mathrm{Re}\,x\le 0$, $\mathrm{Re}\,y\le 0$ で pole をもたない。また、$x+y, x, y\notin\mathbb{Z}$ の時、$c^{(\alpha_1)}(\lambda) := C(\lambda,\ell)\, c_1(y-x)^{-1}$ とおくと

$$\Phi_{\lambda,\ell}=\sum_{\overline{w}\in\{1,s_{\alpha_1}\}\backslash W} c^{\{\alpha_1\}}(w\lambda)\,\Phi^{\{\alpha_1\}}_{w\lambda,\ell}$$

と展開される(Harish-Chandra 展開)。

$c(\lambda,\ell)=c_1(y-x)c_1(y+x)c_2(x,\ell)c_2(y,\ell)$ だったので、(2)は

$$\int_{(z,z)+\sqrt{-1}\mathbb{R}} \operatorname*{Res}_{x=z} \hat{f_\ell}(\lambda)\Phi^{\{\alpha_1\}}_{\lambda,\ell}(a)\,c_1(y-x)^{-1}c(-\lambda,\ell)^{-1}dy \quad \cdots (3)$$

となる。この積分の積分路を $0\geq \mathrm{Re}\,y\geq \mathrm{Re}\,x$ 内で、$(z,z)+\sqrt{-1}\mathbb{R}$ (正確には、$(z,z)+\{0\}\times\sqrt{-1}\mathbb{R}$) から、$(z,0)+\sqrt{-1}\mathbb{R}$ に動かす。

$\hat{f_\ell}(\lambda)\Phi^{\{\alpha_1\}}_{\lambda,\ell}(a)$ は $\mathrm{Re}\,x\leq 0$, $\mathrm{Re}\,y\leq 0$ で holomorphic であり、

$\operatorname*{Res}_{x=z} c_1(y-x)^{-1}c(-\lambda,\ell)^{-1}$ の $\mathrm{Re}\,y\geq z$ における poles は、$(z,y)\in D_{\ell,2}$ となる y。したがって留数定理により、(3)は

$$\int_{(z,0)+\sqrt{-1}\mathbb{R}} \operatorname*{Res}_{x=z} \hat{f_\ell}(\lambda)\Phi^{\{\alpha_1\}}_{\lambda,\ell}(a)\,c_1(y-x)^{-1}c(-\lambda,\ell)^{-1}dy$$
$$+\sum_{(z,w)\in D_{\ell,2}}(-2\pi\sqrt{-1})\operatorname*{Res}_{y=w}\operatorname*{Res}_{x=z}\left(\hat{f_\ell}(\lambda)\Phi^{\{\alpha_1\}}_{\lambda,\ell}(a)\,c_1(y-x)^{-1}c(-\lambda,\ell)^{-1}\right)$$

となるが、これらは、$\Phi^{\{\alpha_1\}}_{\lambda,\ell}$ による展開を使って、Ex.1 の場合と同様の議論(ℓ に関する解析接続と変数変換)により、$\Phi_{\lambda,\ell}$ で表せる。∎

References

1. S. Helgason, Groups and Geometric Analysis, Academic Press, New York, 1984.

2. N. Shimeno, Eigenspaces of invariant differential operators on a homogeneous line bundle on a Riemannian symmetric space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 37 (1990) 201–234

3. ———, The Plancherel formula for spherical functions with a one-dimensional K-type on a simply connected simple Lie group of Hermitian type, preprint