

Minimization Theorems and Fixed Point Theorems

東工大 理 高橋 渉 (Wataru Takahashi)

Caristi [2] は 1976 年に完備距離空間における有用な不動点定理を証明した。それと前後して, Ekeland [4] はその空間における凸性を仮定しない最小値定理を証明し, その有用性をいくつかの例をもって示した。その後高橋 [16] は完備距離空間における次の最小値定理を証明し, これを用いて, Caristi や Ekeland の定理の簡単な別証明を与えた。

定理 [16] X を完備距離空間とし, $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ を proper で下に有界な下半連続関数とする。このとき, $\inf_{x \in X} f(x) < f(u)$ となる $u \in X$ に対して, $f(v) + d(u, v) \leq f(u)$ となる u と異なる $v \in X$ が存在するならば

$$f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)$$

となる $x_0 \in X$ が存在する。

しかしながら, この定理は $f(x) = x^2$ のような関数にはあてはまらず, この定理の改良が問題となった。ここではまず初めにこの問題を解決するような定理を証明する。つぎに一樣

凸な Banach 空間上で 2 つの実数値関数を考える。1 つは, E を一様凸な Banach 空間とし, \mathcal{B} を有界集合を少なくとも 1 つ含むような E 上の filterbase とする。このときの $D(CE)$ 上の実数値関数

$$r(x, \mathcal{B}) = \inf_{A \in \mathcal{B}} \sup_{y \in A} \|x - y\|, \quad \forall x \in D$$

である。他の 1 つは, $m(S)$ をある集合 S 上の有界実数値関数の全体とし, X を $m(S)$ の 1 を含む部分空間とする。 μ を X 上の submean とし, $\{x_t : t \in S\}$ を E の有界集合とする。このときの D 上の実数値関数

$$g(x) = \mu_t \|x_t - x\|^2, \quad \forall x \in D$$

である。 $r(x, \mathcal{B})$, $g(x)$ はともに D 上の連続関数であり, D を閉凸集合とすると凸関数となり, $\|x_n\| \rightarrow \infty$ ならば,

$$r(x_n, \mathcal{B}) \rightarrow \infty, \quad g(x_n) \rightarrow \infty$$

をも満たす。そこで, $r(x, \mathcal{B})$, $g(x)$ とともに D 上で最小値をとる。さらに一様凸性を使うとこの最小値に達する点は一意的である。このことを使って前者の case では, nonexpansive な集合値写像の不動点定理を得, 後者の case では, nonexpansive 半群に対する非線形, 非可換な不動点定理を得る。前者は Lim [6] の定理の別証明にもなっており, 後者は Lau-Takahashi [5] の拡張定理になっている。最小値定理と不動点定理の関わりを見ていただければ幸いである。

1. 完備距離空間における最小値定理

X を位相空間とし, $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ とする. このとき, f が下半連続であるとは, 任意の実数 α に対して, 集合

$$\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$$

が常に閉集合となることである.

定理1 X を完備距離空間とし, $\alpha > 0$ とする. T を X から X への連続写像とし, $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ を proper で下に有界な下半連続関数とする. このとき, もし $\inf_{x \in X} f(x) < f(u)$ となる $u \in X$ に対して

$$f(v) + \alpha \max\{d(v, Tu), d(Tv, Tu)\} \leq f(u)$$

となる $v \neq Tu$ または $Tv \neq Tu$ となる $v \in X$ が存在するならば $f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)$ となる $x_0 \in X$ が存在する.

証明 すべての $u \in X$ に対して

$$\inf_{x \in X} f(x) < f(u)$$

であるとしよう. $f(u) < \infty$ となる $u \in X$ を固定し, $u_0 = u$ とする. $u_{n-1} \in X$ が知られてくるものとし, u_n を帰納的に次のように定義しよう. まず

$$S_n = \{w \in X : f(w) + \alpha \max[d(w, Tu_{n-1}), d(Tw, Tu_{n-1})] \leq f(u_{n-1})\}$$

とし, $u_n \in S_n$ を

$$f(u_n) \leq \inf_{w \in S_n} f(w) + \frac{1}{2} \{f(u_{n-1}) - \inf_{w \in S_n} f(w)\} \quad \dots \quad (1)$$

を満たすようにとろう。実際, $S_m \neq \emptyset$ なので, $x \in S_m$ とすると

$$\begin{aligned} 0 < \alpha \max \{ d(x, Tu_{n-1}), d(Tx, Tu_{n-1}) \} &\leq f(u_{n-1}) - f(x) \\ &\leq f(u_{n-1}) - \inf_{x \in S_m} f(x) \end{aligned}$$

が成立し, より (1) を満たすような $u_n \in S_m$ がとれる。ここでこの点列 $\{u_n\}$ が Cauchy 列であることを証明しよう。実際, $m > n$ とすると, まず次の3つの不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \alpha d(Tu_n, Tu_m) &\leq \alpha d(Tu_n, Tu_{n+1}) + \alpha d(Tu_{n+1}, Tu_{n+2}) + \dots \\ &\quad \dots + \alpha d(Tu_{m-1}, Tu_m) \\ &\leq f(u_n) - f(u_{n+1}) + f(u_{n+1}) - f(u_{n+2}) + \dots \\ &\quad \dots + f(u_{m-1}) - f(u_m) \\ &= f(u_n) - f(u_m) \quad \dots \quad (2) \end{aligned}$$

$$\alpha d(u_m, Tu_{m-1}) \leq f(u_{m-1}) - f(u_m) \quad \dots \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \alpha d(u_n, Tu_{m-1}) &\leq \alpha d(u_n, Tu_{n+1}) + \alpha d(Tu_{n+1}, Tu_n) \\ &\quad + \alpha d(Tu_n, Tu_{n+1}) + \dots + \alpha d(Tu_{m-2}, Tu_{m-1}) \\ &\leq f(u_{n-1}) - f(u_n) + f(u_{n-1}) - f(u_n) \\ &\quad + f(u_n) - f(u_{n+1}) + \dots + f(u_{m-2}) - f(u_{m-1}) \\ &= f(u_{n-1}) - f(u_n) + f(u_{n-1}) - f(u_{m-1}) \quad \dots \quad (4) \end{aligned}$$

(3), (4) を使えば

$$\begin{aligned} \alpha d(u_n, u_m) &\leq \alpha d(u_n, Tu_{m-1}) + \alpha d(Tu_{m-1}, u_m) \\ &\leq f(u_{n-1}) - f(u_n) + f(u_{n-1}) - f(u_{m-1}) \\ &\quad + f(u_{m-1}) - f(u_m) \end{aligned}$$

となり

$$d(u_n, u_m) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

となることがわかる。よって $\{u_n\}$ は Cauchy列である。そこで $u_n \rightarrow v$ となる $v \in X$ が存在する。(2)式において, $m \rightarrow \infty$ とすると

$$\alpha d(Tu_n, Tv) \leq f(u_n) - f(v)$$

を得る。また仮定より

$$f(z) + \alpha \max\{d(z, Tv), d(Tz, Tv)\} \leq f(v)$$

となる $z \in X$ ($z \neq Tv$ または $Tz \neq Tv$) が存在するので

$$\begin{aligned} f(z) &\leq f(v) - \alpha d(z, Tv) \\ &\leq f(u_n) - f(v) - \alpha d(Tu_n, Tv) + f(v) - \alpha d(z, Tv) \\ &\leq f(u_n) - \alpha d(Tu_n, z) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} f(z) &\leq f(v) - \alpha d(Tz, Tv) \\ &\leq f(v) - \alpha d(Tz, Tv) + f(u_n) - f(v) + \alpha d(Tu_n, Tv) \\ &= f(u_n) - \alpha d(Tz, Tu_n) \end{aligned}$$

を得る。よって

$$f(z) + \alpha \max\{d(z, Tu_n), d(Tz, Tu_n)\} \leq f(u_n)$$

である。これは $z \in S_{n+1}$ (n は任意) を意味する。これと (1)より

$$z f(u_n) - f(u_{n-1}) \leq \inf_{w \in S_n} f(w) \leq f(z)$$

を得る。よって

$$f(z) < f(u) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \leq f(z)$$

となり, これは矛盾である. これで証明は完了する.

定理1と同様の証明方法によって, 次の定理も証明することができる.

定理2 X を完備距離空間とし, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を下に有界な下半連続関数とする. T を X から X への連続写像とする. このとき, $\inf_{x \in X} f(x) < f(u)$ となる $u \in X$ に対して

$$f(Tv) + d(u, v) \leq f(Tu)$$

となるような u と異なる $v \in X$ が存在するならば

$$f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)$$

となる $x_0 \in X$ が存在する.

2. 集合値写像の不動点定理

X を空でない集合とし, \mathcal{F} を X の部分集合からなる空でない族とする. このとき, \mathcal{F} が X 上の filter であるとは,

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$; (2) $A \subset B, A \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in \mathcal{F}$; (3) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow$

$A \cap B \in \mathcal{F}$; を満たすことである. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ が X 上の filters で,

$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ を満たすならば, \mathcal{F}_2 は \mathcal{F}_1 より finer であるといわれる.

X 上の filter \mathcal{U} は

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{F}, \mathcal{F} \text{ は } X \text{ 上の filter} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{F}$$

を満たすならば ultrafilter であるといわれる. X の部分集合

からなる空でない族 \mathcal{B} が X 上の filter base であるとは,

(1) $\emptyset \notin \mathcal{B}$; (2) $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ に対して, $A_3 \subset A_1 \cap A_2$ となる $A_3 \in \mathcal{B}$ が存在する; を満たすことである。 \mathcal{B} が X 上の filterbase であるとき, $\mathcal{A} = \{A \subset X : B \subset A, B \in \mathcal{B}\}$ は X の filter になる。このとき, \mathcal{B} は \mathcal{A} の base であるといわれる。 X を位相空間とし, \mathcal{B} を X 上の filterbase としよう。 \mathcal{B} が X の点 x に収束するとは, x の任意の近傍 V に対して, $A \subset V$ となる \mathcal{B} の元 A が存在することである。 \mathcal{U} がコンパクト集合 X 上の ultrafilter であるとき, \mathcal{U} は X のある点に収束することが知られている。 また \mathcal{U} が集合 X 上の ultrafilter で, f が X から D への写像であるなら, $f(\mathcal{U})$ は D 上の filterbase になる。 さらに, この $f(\mathcal{U})$ は D 上の ultrafilter を生成する。 実際, \mathcal{U} が X 上の ultrafilter であるから, $f(\mathcal{U})$ が D 上の filterbase となることは明らかである。

$$\mathcal{B} = \{B \subset D : f(A) \subset B \text{ for some } A \in \mathcal{U}\}$$

とし, $K \in K \cap \mathcal{B}$ となる D 上の filter としよう。 $K \in K$ なら $f^{-1}K \in \mathcal{U}$ または $f^{-1}K^c \in \mathcal{U}$ である。 $A = f^{-1}K^c \in \mathcal{U}$ とすると, $f(A) = f(f^{-1}K^c) \subset K^c$ であるから $K^c \in \mathcal{B}$ となる。 これは矛盾である。 よって $f^{-1}K \in \mathcal{U}$ である。 $f(f^{-1}K) \subset K$ なので, $K \in \mathcal{B}$ を得る。 だから $K = \mathcal{B}$ となる。 これは \mathcal{B} が D 上の ultrafilter であることを意味する。

E を一様凸な Banach 空間とし, \mathcal{B} を有界集合を少なくとも一つ含むような E 上の filterbase とする。 ここで $D(\subset E)$ 上の

実数値関数

$$r(x, B) = \inf_{A \in B} \sup_{y \in A} \|x - y\|, \quad \forall x \in D$$

を考えると,

$$|r(x, B) - r(y, B)| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in D$$

を満たすから, D 上で連続となる. また D を閉凸集合とすると, $r(\cdot, B)$ は凸関数となり, $\|x_n\| \rightarrow \infty$ ならば $r(x_n, B) \rightarrow \infty$ を満たすから,

$$r(u_0, B) = \min_{x \in D} r(x, B)$$

となる $u_0 \in D$ が存在する. ここで空間 E の一様凸性を使うとこのような u_0 が一意であることがわかる. この結果を用いて次の定理を証明しよう.

定理 3 [6] X を一様凸 Banach 空間 E の有界閉凸集合とする. T を X から X への集合値 nonexpansive 写像で, 任意の $x \in X$ に対して, Tx が空でないコンパクト集合であるとする. このとき, X の中に T の不動点が存在する.

証明 $x_0 \in X$ とする. $n=2, 3, \dots$ に対して

$$T_n x = \frac{1}{n} x_0 + (1 - \frac{1}{n}) Tx, \quad \forall x \in X$$

を定義する. このとき, Nadler の不動点定理 [9] を用いると $T_n x_n \ni x_n$ となる T_n の不動点 x_n が存在する. この点列 $\{x_n\}$ は $d(x_n, Tx_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を満たす. ここで

$$A_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$$

を定義する. このとき, $\{A_n\}$ は X 上の filterbase となる. \mathcal{F} は $\{A_n\}$ により生成される filter とし, \mathcal{U} は \mathcal{F} より finer な ultrafilter とする. 明らかに

$$\inf_{A \in \mathcal{U}} \sup_{x \in A} d(x, Tx) = 0$$

である. ここで $u_0 \in X$ を $r(u_0, \mathcal{U}) = \inf_{x \in X} r(x, \mathcal{U})$ を満たす一意の元とすると, 任意の元 $x \in X$ に対し, Tx が空でないコンパクト集合であることより,

$$\|x - Sx\| = d(x, Tx), \quad \|Sx - Px\| = d(Sx, Tu_0)$$

を満たすような $Sx \in Tx$, $Px \in Tu_0$ を得ることが出来る. X から Tu_0 への写像 P に対し, $P(\mathcal{U})$ は Tu_0 上の filterbase になり, さらに $P(\mathcal{U})$ により生成される filter は ultrafilter になる.

Tu_0 はコンパクトなので, $P(\mathcal{U})$ は Tu_0 の中に極限 p_0 をもつ.

この p_0 に対し, H は Hausdorff metric とすると,

$$\begin{aligned} r(p_0, \mathcal{U}) &= \inf_{A \in \mathcal{U}} \sup_{x \in A} \|p_0 - x\| \\ &\leq \inf_{A \in \mathcal{U}} \sup_{x \in A} \{ \|p_0 - Px\| + \|Px - Sx\| + \|Sx - x\| \} \\ &= \inf_{x \in \mathcal{U}} \sup_{x \in A} \{ \|p_0 - Px\| + d(Sx, Tu_0) + d(x, Tx) \} \\ &\leq \inf_{A \in \mathcal{U}} \sup_{x \in A} \{ \|p_0 - Px\| + H(Tx, Tu_0) + d(x, Tx) \} \\ &\leq \inf_{A \in \mathcal{U}} \sup_{x \in A} \{ \|p_0 - Px\| + \|x - u_0\| + d(x, Tx) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \inf_{A \in \mathcal{U}} \sup_{x \in A} \|x - u_0\| \\
&= r(u_0, \mathcal{U})
\end{aligned}$$

を得る。だから $u_0 = p_0 \in T u_0$ を得る。これで証明は完了する。

3. nonexpansive 半群に対する共通不動点定理

S をある集合とし, $m(S)$ を S 上の有界実数値関数のつくる Banach 空間とする。 X を 1 を含む $m(S)$ の部分空間とする。このとき, X 上の実数値関数 μ は次の4つの条件を満たすなら X 上の submean と呼ばれる [8]。

- (1) すべての $f, g \in X$ に対して, $\mu(f+g) \leq \mu(f) + \mu(g)$ である;
- (2) すべての $f \in X$ と $\alpha \geq 0$ に対して, $\mu(\alpha f) = \alpha \mu(f)$ である;
- (3) $f \leq g$ ならば $\mu(f) \leq \mu(g)$ である;
- (4) すべての定数 c に対して, $\mu(c) = c$ である。

μ を X 上の submean とするとき, $f \in X$ に対して, 時と場合によつては $\mu(f)$ を $\mu_t(f(t))$ と書くこともある。

次の命題は一様凸な Banach 空間上の存在定理を証明する上で大切なものである ([18], [19])。

補助定理 $p > 1, b > 0$ とする。このとき, Banach 空間 E が一様凸となるための必要十分条件は, $g(0) = 0,$

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^p &\leq \lambda \|x\|^p + (1-\lambda) \|y\|^p - W_p(\lambda) g(\|x-y\|), \\
&\forall x, y \in B_b, 0 \leq \lambda \leq 1
\end{aligned}$$

を満たす関数 $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ で, 連続かつ, 狭義に増加,

凸であるものが存在することである。ここで、

$$W_p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)P + \lambda P(1-\lambda)$$

であり、 B_b は中心が 0 、半径 b の閉球である。

定理 4 C を一様凸な Banach 空間の空でない閉凸集合とし、 S もある集合とする。 $\{x_t : t \in S\}$ を E の有界集合とし、 X を E を含む $m(S)$ の部分空間とする。 μ を X 上の submean とし、任意の $x \in C$ に対し、 S 上の関数

$$f(t) = \|x_t - x\|^2, \quad \forall t \in S$$

が X に属するものとする。このとき、

$$r(x) = \int_t \|x_t - x\|^2, \quad \forall x \in C, \quad r = \inf \{r(x) : x \in C\}$$

とするなら、 $r(z) = r$ となる $z \in C$ が一意に存在する。

証明 まず C 上の関数 $r(\cdot)$ が連続で凸となることを示す。

$x_n \rightarrow x$ とする。 $M = \sup \{ \|x_t - x_n\| + \|x_t - x\| : n=1, 2, \dots, t \in S \}$ に対し、

$$\begin{aligned} \|x_t - x_n\|^2 - \|x_t - x\|^2 &= (\|x_t - x_n\| + \|x_n - x\|)(\|x_t - x_n\| - \|x_t - x\|) \\ &\leq M |\|x_t - x_n\| - \|x_t - x\|| \\ &\leq M \|x_n - x\| \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

であるので、

$$\mu_t \|x_t - x_n\|^2 \leq \mu_t \|x_t - x\|^2 + M \|x_n - x\|$$

である。同様に、

$$\mu_t \|x_t - x\|^2 \leq \mu_t \|x_t - x_n\|^2 + M \|x_n - x\|$$

である。そこで、 $|r(x_n) - r(x)| \leq M \|x_n - x\|$ を得る。これは、 $r(\cdot)$ が C 上で連続であることを意味する。 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を $\alpha + \beta = 1$ を満たす非負な数とする。このとき、 $x, y \in C$ に対し、

$$\|x_t - (\alpha x + \beta y)\|^2 \leq \alpha \|x_t - x\|^2 + \beta \|x_t - y\|^2$$

であるので $r(\alpha x + \beta y) \leq \alpha r(x) + \beta r(y)$ である。これは $r(\cdot)$ が凸であることを意味する。つぎに $\|x_n\| \rightarrow \infty$ ならば $r(x_n) \rightarrow \infty$ となることを示す。実際

$$\|x_n\|^2 \leq 2 \|x_n - x_t\|^2 + 2 \|x_t\|^2$$

なので、 $\|x_n\|^2 \leq 2r(x_n) + 2M'$ (ただし、 $M' = \sup\{\|x_t\|^2 : t \in S\}$)

となり、 $\|x_n\| \rightarrow \infty$ ならば $r(x_n) \rightarrow \infty$ を得る。ここで、[1, p. 79]

を使うと、 $r(z) = r$ となる $z \in C$ の存在がわかる。

$$K = \{z \in C : r(z) = r\}$$

とする。このとき、 K は空でない閉凸集合となる。また K は有界でもある。実際 $z \in K$ として、

$$\|z\|^2 \leq 2 \|z - x_t\|^2 + 2 \|x_t\|^2$$

なので、 $\|z\|^2 \leq 2r(z) + 2M' = 2r + 2M'$ を得る。

$\{x_t : t \in S\} \cup K \subset B_a$ となるように $a > 0$ をとり、 $b = 2a$

とする。このとき、 $x_t - z_1, x_t - z_2 \in B_b$ ($\forall t \in S, \forall z_1, z_2 \in K$)

なので、補助定理から、

$$\|x_t - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\|^2 \leq \frac{1}{2} \|x_t - z_1\|^2 + \frac{1}{2} \|x_t - z_2\|^2 - \frac{1}{4} g(\|z_1 - z_2\|)$$

を得る。いま $z_1 \neq z_2$ とすると

$$r\left(\frac{1}{2}(z_1+z_2)\right) \leq \frac{1}{2}r(z_1) + \frac{1}{2}r(z_2) - \frac{1}{4}g(\|z_1-z_2\|) < r$$

を得、これは矛盾である。よって $r(z)=r$ となる $z \in C$ は一意に存在する。

S を semitopological な半群とし、 $s \in S, f \in m(S)$ とする。このとき、 $(l_s f)(t) = f(st), (r_s f)(t) = f(ts)$ で $m(S)$ 上の作用素 l_s, r_s を定義しよう。 $X \in m(S)$ の部分空間で、 1 を含むものとする。そして、 $l_s(X) \subset X$ ($\forall s \in S$) を満たすものとする。 X 上の submean μ が left invariant であるとは

$$\mu(f) = \mu(l_s f), \forall s \in S, f \in X$$

となるときである。 $C(S)$ を S 上の有界連続実数値関数の全体とし、 $RVC(S)$ を S 上の有界な右一様連続関数の全体とする。すなわち、 $RVC(S) = \{f \in C(S) : s \rightarrow r_s f \text{ が連続}\}$ である。このとき、 $RVC(S)$ は 1 を含み、 l_s か r_s 不変な $C(S)$ の閉な部分空間になる [7]。

定理 5. S を semitopological 半群とし、 $\mathcal{A} = \{T_t : t \in S\}$ を一様凸 Banach 空間の開凸集合 C 上の nonexpansive 写像による S の連続表現とする。 $RVC(S)$ が left invariant な submean μ をもつとし、 C は $\{T_t u : t \in S\}$ が有界となるような元 u を含むものとする。このとき、 $T_s z = z$ ($\forall s \in S$) となる $z \in C$ が存在

する。

証明の概略 まず $y \in C$ に対し,

$$h(t) = \|T_t u - y\|^2, \quad \forall t \in S$$

で定義される関数 h が $RUC(S)$ に属することがいえる。 $\mu \in$

$RUC(S)$ 上の left invariant な submean とし,

$$K = \{z \in C : \mu_t \|T_t u - z\|^2 = \min_{y \in C} \mu_t \|T_t u - y\|^2\}$$

とする。このとき, $z \in K, s \in S$ なら

$$\begin{aligned} \mu_t \|T_t u - T_s z\|^2 &= \mu_t \|T_{st} u - T_s z\|^2 \\ &= \mu_t \|T_s T_t u - T_s z\|^2 \\ &\leq \mu_t \|T_t u - z\|^2 \end{aligned}$$

となるから, $T_s z \in K$ がいえる。これは, すべての $s \in S$ に対し, $T_s K \subset K$ を意味する。定理4によつて, K は一点集合であるから, この点が T_s の共通な不動点になる。

semitopological 半群 S が left reversible であるとは, S の任意の2つの閉右イデアルが空でない共通部分をもつことであるが, このとき

$$\mu(f) = \limsup_s f(s), \quad \forall f \in RUC(S)$$

とすることにより, $RUC(S)$ 上に left invariant な submean をつくることができる。だから定理5は S が amenable 半群の場合と reversible 半群の場合の不動点定理を同時に拡張した定理ということができる [12], [13].

References

- [1] V. Barbu and Th. Precupanu, Convexity and Optimization in Banach spaces, Editura Academiei R.S.R., Bucuresti, 1978.
- [2] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc., 215 (1976), 241-251.
- [3] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear operators, Part I, Interscience, New York, 1958.
- [4] I. Ekeland, Nonconvex minimization problems, Bull. Amer. Math. Soc., 1 (1979), 443-474.
- [5] A. T. Lau and W. Takahashi, Invariant means and semigroups of nonexpansive mappings on uniformly convex Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 153 (1990), 497-505.
- [6] T. C. Lim, A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach space, Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), 1123-1126.
- [7] T. Mitchell, Topological semigroups and fixed points, Illinois J. Math., 14 (1970), 630-641.
- [8] N. Mizoguchi and W. Takahashi, On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces, Nonlinear Analysis, TMA, 14 (1990), 69-80.

- [9] S. B. Nadler, Jr., Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.*, 30 (1969), 475-488.
- [10] A. P. Robertson and W. J. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge University Press, 1964.
- [11] T. Shimizu and W. Takahashi, Fixed point theorems in certain convex metric spaces, *Math. Japonica*, 37 (1992), 855-859.
- [12] W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 81 (1981), 253-256.
- [13] W. Takahashi, Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets, *J. Math. Soc. Japan*, 36 (1984), 543-553.
- [14] W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 97 (1986), 55-58.
- [15] W. Takahashi, Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity, *Canadian J. Math.*, 44 (1992), 880-887.
- [16] W. Takahashi, Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings, in "Fixed Point Theory and Applications", J. B. Baillon and M. Théra eds., Pitman Research

Notes in Mathematics Series 252, 1992, pp. 397-406.

[17] K.K. Tan and H.K. Xu, Continuous representation of semi-topological semigroup as nonexpansive mappings on Banach spaces, to appear.

[18] H.K. Xu, Inequalities in Banach spaces with applications, Nonlinear Analysis, TMA, 16 (1991), 1127-1138.

[19] C. Zălinescu, On uniformly convex functions, J. Math. Anal. Appl., 95 (1983), 344-374.