数理解析研究所講究録
第 829 巻 1993 年 98-106


# Arbitrage Opportunity と Transaction Cost

京大・数理研 楠岡成雄 （Shigeo Kusuoka）

１９９３年１月

## 1 はじめに

Contingent Claim の価格を Arbitrage の考え方を用いて定めるという考え方は Black-Scholes によりはじめて用いられ、成功をおさめた。その理論は、Harrison-Kreps 等の研究により明確になったが、常に手数料ゼロが大前提となっている。もちろん、理論が手数料というパラメータに対して安定であれば、第１次近似として手数料をゼロとするのは問題がない。しかし、理論の基礎には常に確率測度の絶対連続性があり、無限次元空間上の確率測度の絶対連続性の不安定性を知るものにはかなりの不安がつきまとう。この小論では手数料のある場合には Arbitrage という観点だけでは Black-Scholes のモデルに対してすら価格体系は一意には定まらない事を示す。

この小論は 1992 年 11 月の講演の際に頂いたコメント及びその後ご教示頂いたいろいろな事を参考に大幅に修正したもので、講演とは大幅に内容が異なっている。また、未熟な点も多いようで、さらに書き直していく予定でもある。現時点での報告と考えて頂きたい。参考になる意見を聞かせて頂いた、慶応大学の丸山氏、一橋大学の山崎氏、東京大学の国友氏に感謝いたします。

## 2 Harrison, Kreps, Pliska らの理論体系

no arbitrage または no free lunch を原理として条件付き債券（contingent claim）の価格を決定するという考え方では次にあげる三つの点が主要な問題点とされる（ただし、もちろん取引手数料無し（transaction cost free）が大前提である)。

この章と次の章では簡単のため risk free rate がゼロであると仮定する。

（１）裁定の機会が存在しないこと (no arbitrage) と equivalent martingale measure の存在の関係

（２）整合的価格体系（consistent price system）と martingale measure による期待値との関係

（３）完備性（completeness）と整合的価格体系の一意性の関係

（１）は有価証券の価格の作る確率過程を特定化するために効力を発揮するがこの講演では必要ではないのでふれない。ここでは主に、（２）（３）が問題となるのでまず、手数料のない場合の理論を Black-Sholes のモデルに対して概観する。

## 3 Black-Scholes のモデル

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間とし、$z(t)$ は Brown 運動、$\sigma, \mu \in \mathbf{R}$ とする。そして、株価の作る確率過程 $\{P^1(t)\ ;\ \mathrm{t}\ \geq 0\}$ は

$$P^1(t) = \exp(\sigma z(t) + \mu t)$$

で与えられるとする。時刻 $t$ までの情報を表す $\sigma$ 集合族 $\mathcal{F}_t$ は

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{P^1(s); s \in [0,t]\}, \quad t > 0$$

で与えられるとする。この章では簡単のために risk free rate はゼロとする。従って、債券の価格は常に 1 であるとしてよい。

今時刻 0 から時刻 $T$ まで株の取引をし、時刻 $T$ にすべて債券に換える事にする。手数料はゼロなので損することなく株を債券に（あるいは債券を株に）換えることができる。

戦略として時刻 $t$ に $\xi(t)$ $(t \in [0,T])$ の量を保有することにすると人間に可能な戦略であるためには$\xi(t)$ は $\mathcal{F}_t$ 可測である事が要請される。この時、この戦略の下での時刻 $T$ までの capital gain は確率積分

$$\int_0^T \xi(t) dP^1(t)$$

で与えられる事になる。

さて、時刻 $T$ での条件付請求権 (contingent claim) およびその価格体系 (price system) は次のように定義される。

**定義 1** (1) 時刻 $T$ での条件付請求権とは有界で $\mathcal{F}_T$ 可測な非負値確率変数のこと
(2) $\pi$ が価格体系とは $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, dP)$ 上の線形汎関数で、$P(X > 0) = 1$ を満たす任意の有界な確率変数に対して$\pi(X) > 0$ が成り立つもの

整合的な価格体系とは元手 $a$ から実現できる条件付請求権の価格は $a$（あるいはそれ以下）であるような価格体系の事である。整合的価格体系の数学的定義も確定したものではないが、次のような定義が標準的である。

**定義 2** 価格体系 $\pi$ が整合的であるとは

$$\pi(1) = 1$$

であり、任意の 可能な戦略 $\xi$ に対して

$$ess.sup \sup_{t \in [0,T]} \left| \int_0^t \xi(s) dP^1(s) \right| < \infty$$

ならば

$$\pi\left(\int_0^T \xi(t) dP^1(t)\right) = 0$$

となること。

確率解析の諸結果（国田-渡辺の理論）から次のことがわかる。

**定理 1 (マルチンゲールの表現定理)** 任意の $X \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}_T, dP)$ に対して実数 $x$ 及び

$$ess.sup \sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t \xi(s)dP^1(s)| < \infty$$

を満たす戦略 $\xi$ が存在して

$$X = x + \int_0^T \xi(t)dP^1(t)$$

となる。

この定理より次の事がわかる。

**定理 2** 整合的な価格体系はただ一つ存在する。しかも、それは可算加法的な確率測度による期待値でその確率測度の下で、$P^1(t),\ t \in [0,T]$ はマルチンゲールとなる。

確実にもうける事はできないという単純な仮定だけから価格体系が決まってしまうというのは奇跡である。

さらに、マルチンゲールの表現定理から、市場での売買を通じて contingent claim を実現できることがわかる。

数学的な議論を単純にするためさらに $\mu = -\frac{\sigma^2}{2}$ とする。この時、整合的な価格は確率測度 $P$ での期待値に一致する。

例えば、$X = \max\{S(T) - a, 0\}$ とすると、$X$ の価格は $E^P[X]$ で与えられる。

# 4 手数料のある場合：離散時間の場合

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を $\#(\mathcal{F}) < \infty$ を満たす確率空間とする。$n \geq 1$ とし、$\{\mathcal{F}_k\}_{k=0,\ldots,n}$ を $\mathcal{F}$ の部分 $\sigma$-集合族の増加列とする。$\mathcal{F}_0$ は trivial, すなわち $P(B) = 0\ or\ 1,\ B \in \mathcal{F}_0$ と仮定する。設定として、2 種類の有価証券、債券と株、があるという状況を考える。security 0 が債券、security 1 が株であるとする。security $i$ $(i = 0,1)$ の時刻 k における価格 $P^i(k)$ $(k = 0,\ldots,n)$ は $\mathcal{F}_k$-可測な正値確率変数であると仮定する。また、security 1 の売却手数料は $100c_0\%$ 購入手数料は $100c_1\%$ であるとする $(c_0 \in [0,1),\quad c_1 \geq 0)$。$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は

$$f(z) = \begin{cases} (1-c_0)z & if z \leq 0 \\ (1+c_1)z & if z > 0 \end{cases}$$

で与えられる関数とする。すると、時刻 $k$ において security 1 を $-z$ $(z \leq 0)$ 単位売却すると $-f(z)P^1(k)$ の金額の金を得、$z$ $(z > 0)$ 単位購入すると $f(z)P^1(k)$ の金額を支払うことになる。$\mathcal{I}$ を適合した確率過程 $\{I(k)\}_{k=0,\ldots,n}$ 全体の集合とし、その要素を（投資）戦略と呼ぶ。ここで戦略とは、時刻 $k$ において $I(k) > 0$ ならば $I(k)$ 単位の security 1 を購入し、$I(k) < 0$ ならば $-I(k)$ 単位の security 1 を売却することを表す。

$$\tilde{P}(k;\omega) = P^0(k;\omega)^{-1}P^1(k;\omega), \quad k = 0,1,...,n,\ \omega \in \Omega$$

とかくことにする。

$x=(x^0,x^1)\in\mathbf{R}^2$ 及び $I\in\mathcal{I}$ に対し適合した $\mathbf{R}^2$-値確率過程 $X(k;x,I)=(X^0(k;x,I),X^1(k;x,I))\quad k=0,1,\ldots,n$ を

$$X^0(k;x,I)=x^0-\sum_{\ell=0}^{k}f(I(\ell))\tilde{P}(\ell)$$

$$X^1(k;x,I)=x^1+\sum_{\ell=0}^{k}I(\ell)$$

で定義する。$X(k;x,I)$ は初期ポートフォリオが $x$ で戦略が $I$ のときの時刻 $k$ における事後ポートフォリオである。

**定義 3** *contingent claim* $Y\in L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^2,\mathcal{F}_n,dP)$ に対して
ヘッジ価格 $\pi^*(Y)=\pi^*(Y;c_0,c_1)$ を

$$\begin{aligned}&\pi^*(Y)\\ =\;&\inf\{x^0P^0(0);\ x^0\in\mathbf{R},\ \exists I\in\mathcal{I}\ Y^i\le X^i(n;(x^0,0),I),\ i=1,2,\quad P-a.s.\}\end{aligned}$$

**定義 4** $I\in\mathcal{I}$ が *efficient* であるとは

$$P(I(k+1)\ge 0,\tilde{P}(k+1)\ge\tilde{P}(k)|\mathcal{F}_k)>0\quad P-a.s.$$

$$P(I(k+1)\le 0,\tilde{P}(k+1)\le\tilde{P}(k)|\mathcal{F}_k)>0\quad P-a.s.$$

がすべての $k=0,1,\ldots,n-1$ に対して成り立つこと

**定理 3** $I\in\mathcal{I}$ が *efficient* ならば

$$\pi^*(X(n;(x^0,0),I))=x^0P^0(0),\quad x^0\in\mathbf{R}$$

Boyle-Vorst[BoVo] では multiplicative binomial lattice model において、ヨーロピアンコールオプションは常に efficient な投資戦略で実現できることを示し、その戦略を具体的に求めている。しかし、一般の contingent claim に対して常に efficient な戦略があるとは限らない。

以下特別なモデルについて考える。

$$\Omega=\{-1,1\}^{\mathbf{N}}$$

とする。$Z(k):\Omega\to\mathbf{R},\quad k\in\mathbf{N}$ を

$$Z(k,\omega)=\omega_k,\quad \omega=(\omega_1,\omega_2,\ldots)\in\Omega$$

とおく。$\Omega$ 上の確率測度 $P$ は

$$P(Z(k)=-1)\;=\;P(Z(k)=1)\;=\;\frac{1}{2},\quad k\in\mathbf{N}$$

であるような Bernoulli 測度とする。

$$\mathcal{F}_0\;=\{\emptyset,\Omega\}$$

$$\mathcal{F}_k\;=\;\sigma\{Z(1),...,Z(k)\},\quad k=1,2,\ldots$$

とおく。

$$r, \sigma, \mu \in (0, \infty), \quad T > 0, \quad c_0, c_1 \in [0, \infty)$$

とする。また $r_n, \sigma_n, \mu_n, c_{1,n} \in (0, \infty), c_{0,n} \in (0,1), \quad n = 1, 2, \ldots$ は

$$\lim_{n\to\infty} (n^{-1}T)^{-1} r_n = r,$$

$$\lim_{n\to\infty} (n^{-1}T)^{-1} \mu_n = \mu,$$

$$\lim_{n\to\infty} (n^{-1}T)^{-1/2} \sigma_n = \sigma,$$

$$\lim_{n\to\infty} (n^{-1}T)^{-1/2} c_{0,n} = c_0$$

$$\lim_{n\to\infty} (n^{-1}T)^{-1/2} c_{1,n} = c_1$$

を満たすものとする。さらに、各 $n \geq 1$ に対し

$$P_n^0(k;\omega) = \exp(r_n k)$$

$$P_n^1(k;\omega) = \exp(\sigma_n \sum_{\ell=1}^{k} Z(\ell) + \mu_n k)$$

$(k = 0, \ldots, n, \quad \omega \in \Omega)$ とする。ここで security $i$ $(i = 0, 1)$ の時刻 $(k/n)T$ での価格が $P^i(k;\omega)$ で与えられているようなモデルを考える。そして maturity time が $T$ であるとする。このモデルは Cox-Ross-Rubinstein の n-step multiplicative binomial lattice model と同値である。

今、売買手数料は $(c_{0,n}, c_{1,n}) \in (0,1) \times (0,\infty)$ で与えられるものとする。$n \to \infty$ におけるヘッジ価格 $\pi_n^*$ の漸近挙動を調べたい。

$W_n : \mathbf{R}^{1+n} \to C([0,T];\mathbf{R})$ を

$$W_n(\{y(k)\}_{k=0}^n)(t) = ([nt/T] + 1 - nt/T)y([nt/T]) + (nt/T - [nt/T])y([nt/T]+1) \quad t \in [0,T)$$

$$W_n(\{y(k)\}_{k=0}^n)(T) = y(n)$$

(ただし $\{y(k)\}_{k=0}^n \in \mathbf{R}^{1+n}$) で定義されたものとする。$\gamma = c_0 + c_1$ とおき、$\mathcal{P}_M(\sigma,\gamma)$ を次のような条件を満たす $C([0,T];\mathbf{R})$ 上の確率測度 $Q$ の集合とする。

(1) $\{w(t);\ t \in [0,T]\}$ は $Q(dw)$ の下で正値マルチンゲール

(2) $Q(w(0) = 1) = 1$

(3) $\{\log w(t);\ t \in [0,T]\}$ の quadraic variation $< \log w >_t$ が

$$\sigma(\sigma - \gamma)dt \ \leq\ d < \log w >_t \leq\ \sigma(\sigma + \gamma)dt \quad a.e.t \in [0,T], \qquad Q - a.s.w$$

このとき次のことが成り立つ。

**定理 4** 任意の有界連続関数 $F : C([0,T];\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \pi_n^*(F(W_n(\{P^1(k;\omega)\}_{k=0}^n))) \\ = \ &\sup\{E^Q[F_0(\{e^{rt}w(t); t \in [0,T]\}) + w(T)F_1(\{e^{rt}w(t); t \in [0,T]\})];\ Q \in \mathcal{P}_M(\sigma,\gamma)\} \end{aligned}$$

## 5 手数料のある場合：連続時間の場合

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間、$T > 0$ とし、$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ は増大する右連続な $\mathcal{F}$ の部分 $\sigma$-集合族の列とする。また $\mathcal{F}_0$ は trivial 、すなわち $P(B) = 0\ or\ 1,\quad B \in \mathcal{F}_0$ と仮定し、さらに $\mathcal{F}_T = \vee_{t\in[0,T)}\mathcal{F}_t$ と仮定する。設定として、2 種類の有価証券（債券と株）があり security 0 が債券、security 1 が株であるとする。また security $i$ $(i = 0,1)$ の 時刻 $t$ における価格 $P^i(t), t \in [0,T]$, は適合した連続な正値確率過程であるとする。

security 1 の売却手数料は $100c_0$%、購入手数料は $100c_1$% ($c_0 \in [0,1),\ c_1 \geq 0$) とする。さて、$\mathcal{I}$ は適合した左連続な増加過程 $\{I(t)\}_{t\in[0,T]}$ で $I(0) = 0$ 及び $ess.supI(T) < \infty$ を満たすものとする。$\mathcal{I}^2$ の要素 $\{I_j; j = 0,1\}$ を（投資）戦略と呼ぶことにする。ここで戦略 $\{I_j; j = 0,1\}$ は期間 $(s,t]$ の間に security 1 を $I_1(t) - I_1(s)$ 単位購入し、$I_0(t) - I_0(s)$ 単位売却するような戦略を意味する。

$$\tilde{P}(t;\omega) = P^0(t;\omega)^{-1}P^1(t;\omega), \quad t \in [0,T],\ \omega \in \Omega$$

とおくことにする。$x = (x^0, x^1) \in \mathbf{R}^2$ 及び $I_* = \{I_j; j = 0,1\} \in \mathcal{I}^2$ に対し左連続な $\mathbf{R}^2$-値確率過程 $X(t;x,I_*) = (X^0(t;m,I_*), X^1(t;m,I_*)),\quad t \in [0,T]$ を

$$\begin{aligned} & X^0(t;x,I_*) \\ = \quad & x^0 + \int_{[0,t]}(1-c_0)\tilde{P}(s)dI_0(s) - \int_{[0,t]}(1+c_1)\tilde{P}(s)dI_1(s) \end{aligned}$$

$$X^1(t;x,I_*) = x^1 + I_1(t) - I_0(t)$$

で定義する。$X(t;m,I_*)$ は初期ポートフォリオが $x$ で戦略が $I_*$ の時の時刻 $t$ におけるポートフォリオである。関数 $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$F(x) = \begin{cases} (1-c_0)x & if x \leq 0 \\ (1+c_1)x & if x > 0 \end{cases}$$

で定める。すると、$X^0P^0(t) + F(X^1)P^1(t)$ は時刻 $t$ においてポートフォリオ $X = (X^0, X^1)$ を解消したときに得る金額である。

**定義 5** $(x, I_*) \in \mathbf{R}^2 \times \mathcal{I}^2$ が *admissible* であるとは

$$X^0(t;x,I_*) + F(X^1(t;x,I_*))\tilde{P}(t) \geq 0, \quad t \in [0,T], \qquad P - a.s.$$

が成り立つことを言う。

すなわち admissibility は破産状態が確実に起こらないことを意味する。

**定義 6** *price system* とは $L^\infty(\Omega; \mathbf{R}^2, \mathcal{F}_T, dP)$ から $\mathbf{R}$ への有界な線形作用素 $\pi$ で次の条件を満たすものを言う。

$$X = (X^0, X^1) \in L^\infty(\Omega; \mathbf{R}^2, \mathcal{F}_T, dP) \text{ が}$$
$$X^0 + F(X^1)\tilde{P}(T) \geq 0 \quad P - a.s.,$$

及び

$$P(X^0 + F(X^1)P\tilde{(T)} > 0) > 0$$

を満たすならば

$$\pi(X) > 0$$

**定義 7** *price system* $\pi$ *が pre-consistent* であるとは、

$$\pi((1,0)) = P^0(0)$$

$$(1-c_0)P^1(0) \ \leq \ \pi((0,1)) \ \leq \ (1+c_1)P^1(0)$$

が成り立ち、さらに任意の *admissible* な $((x^0,0),I_*) \in \mathbf{R}^2 \times \mathcal{I}^2$ に対して

$$\pi(X(T;(x^0,0),I_*)) \ \leq \ x^0 P^0(0)$$

が成り立つことを言う。

**定義 8** *price system* $\pi$ *が countably additive* とは

$$\pi(X) = E^P[X^0\rho^0 + X^1\rho^1], \quad X = (X^0, X^1) \in L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^2,\mathcal{F}_T,dP)$$

となるような $(\rho^0,\rho^1) \in L^1(\Omega;\mathbf{R}^2,\mathcal{F}_T,dP)$ が存在することを言う。

各 $(c_0,c_1) \in [0,1) \times [0,\infty)$ に対して $\mathcal{P}(c_0,c_1)$ (resp. $\mathcal{P}_c(c_0,c_1)$) を売買手数料が $(c_0,c_1)$ である時の pre-consistent な price system (resp. countablly additive で pre-consistent な price system) 全体の集合とする。

次のことは明かであろう。

**命題 1** (1) $\mathcal{P}(c_0,c_1)$ 及び $\mathcal{P}_c(c_0,c_1)$ は凸集合（$(c_0,c_1) \in [0,1) \times [0,\infty)$）。
(2) $(c_0,c_1),(c_0',c_1') \in [0,1) \times [0,\infty)$ が $c_0 \leq c_0'$, $c_1 \leq c_1'$ を満たすならば

$$\mathcal{P}(c_0,c_1) \subset \mathcal{P}(c_0',c_1')$$

これからは、特別な場合（Black-Sholes モデル）を考えていく。
$r,\mu,\sigma > 0$ とし、$\{z(t;\omega); t \in [0,T]\}$ はスタンダードブラウン運動とする。さらに、

$$P^0(t;\omega) \ = \ \exp(rt)$$

$$P^1(t;\omega) \ = \ \exp(\sigma z(t;\omega) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t)$$

$$\mathcal{F}_t \ = \ \bigcap_{\tau>t} \sigma\{z(s); s \in [0,\tau)\}$$

$(t \in [0,T])$ とおく。

$W = C([0,T];\mathbf{R})$ とおくと、$W$ はノルム $|w|_W = \max\{|w(t)|; t \in [0,T]\}$, $\quad w \in W$ を持つバナッハ空間となる。$\mathcal{P}_\infty$ を $W$ 上の確率測度 $\nu$ で

$$E^\nu[|w|_W^p] \ < \ \infty \quad p \in (1,\infty)$$

を満たすもの全体の集合とする。$\mathcal{P}_\infty$ 上には次のような条件を満たす距離付け可能な位相がある。

$$\nu_n \to \nu, \quad n \to \infty, \quad \text{in } \mathcal{P}_\infty$$

$$\Longleftrightarrow$$

(1) $\sup_n E^{\nu_n}[|w|_W^p] < \infty, \quad p \in (1,\infty)$
(2) 任意の有界連続関数 $g : W \to \mathbf{R}$ に対して

$$E^{\nu_n}[g] \to E^{\nu}[g], \quad n \to \infty$$

が成り立つこと。

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_\infty(c_0, c_1) \\ = \quad &\{\nu \in \mathcal{P}_\infty;\ \exists \pi \in \mathcal{P}_c(c_0, c_1) \quad \pi((g(\tilde{P}(\cdot;\omega)), 0) = E^{\nu}[g] \\ &\qquad \forall\ bounded\ continuous\ functions\ g : W \to \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

とする。また $\bar{\mathcal{P}}_\infty(c_0, c_1)$ を $\mathcal{P}_\infty(c_0, c_1)$ の閉包とし、さらに、$\mathcal{P}_M$ を $\mathcal{P}_\infty$ に属する確率測度 $\nu$ で次の２条件を満たすもの全体の集合とする。
(1) $\nu(dw)$ の下で $\{w(t); t \in [0,T]\}$ は非負値マルチンゲールとなる。
(2) $\nu(w(0) = 1) = 1$
この時、次のような定理が証明できる。

**定理 5** (1)

$$\bigcap \{\bar{\mathcal{P}}(c_0, c_1);\ (c_0, c_1) \in (0,1) \times (0,\infty)\} = \mathcal{P}_M$$

(2) 任意の有界連続関数 $g_i : W \to \mathbf{R}, \quad i = 0, 1$ に対して、集合

$$\bigcap_{(c_0,c_1)\in(0,1)\times(0,\infty)} \{\pi((g_0(P^1(\cdot;\omega), g_1(P^1(\cdot;\omega))));\ \pi \in \mathcal{P}(c_0, c_1)\}$$

は集合

$$\{E^{\nu}[g_0(\{e^{rt}w(t); t \in [0,T]\}) + w(T)g_1(\{e^{rt}w(t);\ t \in [0,T]\})]; \nu \in \mathcal{P}_M\}$$

の内点を含む。

**Example**(European call option)
行使価格 $a$, $a > 0$ のヨーロッパコールオプションは

$$X(\omega) = \begin{cases} (0,0) & \text{if } P^1(T;\omega) \le a \\ (-ae^{-rT}, 1) & \text{if } P^1(T;\omega) > a \end{cases}$$

なる contingent claim と考えられる。

$$(g_0(w), g_1(w)) = \begin{cases} (0,0) & \text{if } w(T) \le a \\ (-ae^{-rT}, 1) & \text{if } w(T) > a \end{cases}$$

とおけば

$$X(\omega) = (g_0(P(\cdot;\omega)), g_1(P(\cdot;\omega)))$$

であることがわかる。簡単な考察により

$$\{E^{\nu}[-ae^{-rt} + w(T), e^{rT}w(T) > a]; \nu \in \mathcal{P}_M\} = [\max\{1 - ae^{-rT}, 0\}, 1)$$

であることがわかる。よって定理より

$$\bigcap_{(c_0,c_1)\in(0,1)\times(0,\infty)} \{\pi(X(\omega));\ \pi\in\mathcal{P}(c_0,c_1)\}\supset\ (\max\{1-ae^{-rT},0\},1)$$

がわかる。

すなわち、No Arbitrage の原理だけで考える限り、手数料がいかに小さくともゼロでないならば、ヨーロピアンコールオプションの価格が Black-Scholes の公式の値に近いとは言えないのである。

# 参考文献


[BoVo] Boyle, P.P., and Vorst, T., Option Replication in Discrete Time with Transaction Costs, Journal of Finance, 47(1992), 271-293.

[De] Delbaen, F., Representing martingale measures when asset prices are continuous and bounded, Mathematical Finance, 2(1992), 107-130.

[DeSch] Delbaen, F., and Schachermayer, W., Arbitrage and free lunch with bouunded risk for unbounded continuous processes, Preprint 1992.

[HK] Harrison, M., and Kreps, D., Martingales and arbitrage in multiperiod security markets, J. Econ. Theory 20(1979), 381-408.

[HP] Harrison, M., and Pliska, S., Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, Stoch. Processes and Their Appl. 11(1981), 215-260.

[HP] Harrison, M., and Pliska, S., A Stochastic calculus model of continuous trading: complete market, Stoch. Processes and Their Appl. 15(1983), 313-316.

[Le] Leland, H., Option Pricing and Replication with Transaction Costs, Journal of Finance, 40(1985), 1283-1301.

[Sch] Schachermayer, W., Martingale measures for discrete time processes with infinite horizon, Preprint 1992.

[St] Stricker C., Arbitrage et lois de martingales, Ann. Inst. H. Poincaré 26(1990), 451-460.