

## 浅水における過剰反射とシア不安定

東大理学部 竹広 真一 (Shin-ichi Takehiro)

### 1. イントロダクション

19 世紀後半の Reynolds の実験, あるいは Rayleigh による理論的な取扱以来, 様々な平行シア一流について線型安定性を調べることが行われてきた. 中でも 2 次元平行シア一流は基本場の簡潔さ, 数学的な取扱が簡単であることと, 結果が有用であることから数多く研究されてきた.

流れの線型安定性は常微分方程式の固有値問題として解かれる. 得られた固有値 (位相速度  $c$ ) のうち一つでも  $\text{Im}[c] > 0$  のものが存在すれば, 流れの場は不安定であると判定される. しかしながら, 固有値問題という数学的手法では流れの場が不安定であることの直観的イメージを得ることができない. 流れの場を見ただけではその安定性を判定することができず, 流れごとにいちいち固有値問題を解かねばならない. 固有値問題を解いたとしても, 不安定モードは成長するべく特定の構造をもつ

ているだけで、なぜ擾乱が成長するかといったことに対する因果関係を与えない。しかも、具体的な流れの場について安定性を調べると、基本場・境界条件を少し変えただけで安定性が大きく変わってしまい、時としてその結果が直観に反する場合もある。例えば外力のない非圧縮流体のリニアースhear流には不安定モードは存在しない。しかし、同じリニアースhear流でも成層が存在すると不安定になり得る。このことは成層が流体を安定させる方向に働くであろうという偏見に反する。また、浅水においてもリニアースhear流は不安定になりうる。固有値問題を解くだけではリニアースhear流がこのように多様な安定性を示す理由を考えることはできないのである。

また、具体的な流れの場について固有値問題を解いて安定性を判定するほかに、積分定理と呼ばれる一般的な流れの場についての不安定であるための条件を導出できる場合がある。しかし、固有値問題として解く場合と同じく、積分定理も直観的なイメージを与えない。例えば Rayleigh の変曲点定理において変曲点の存在が不安定であることになぜ必要なのか積分定理の表式は直接的には答えてくれない。

このように我々が流れの不安定を直観的に理解できない理由には、不安定問題を固有値問題を解くことでしか扱ったことがなく、初期値問題としての経験に乏しいことにある。例えば逆

さまに立てられた鉛筆が不安定であることを、われわれは固有値問題など解くことなく容易に理解できる。鉛筆をつっついたら(つっつかなくても)すぐに倒れてしまうことを我々はしばしば経験している。そのため加えた擾乱の振舞いを想像することができ、すぐに不安定であると理解できるのである。しかし、流れの不安定の場合はシア一流をつっついた経験に乏しいために擾乱をシア一流に加えた後にどの様に振舞うか想像できず、不安定であることの直観的なイメージを持ってないのである。

そこで本講では、不安定なシア一流に加えられた擾乱がどのように振舞うかを調べ、流れの不安定を直観的に理解することを目指す。以降では、浅水系のリニアースシア一流を例としてシア一流中を伝播する擾乱(波)の性質を調べ、シア一流の不安定を波で記述することを行なう。

## 2. 波による不安定の記述

### 2.1. 波伝播状況～WKBJ 近似

浅水系のリニアースシア一流の安定性は Satomura(1981) により調べられており、十分シアーが強ければ流れは不安定である結果が得られている。最初に WKBJ 近似を用いて、このリニアースシア一流中の波の伝播性質を調べる。

回転のない 2 次元浅水波方程式において、リニアースシア一流  $U(y)$  に対する擾乱方程式を構成する。  $x$  方向に波数  $k$  , 位相速

度  $c$  を持つ擾乱を仮定し、変位だけの式に変形することにより

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 h' - gH\nabla^2 h' \right\} + 2gH\frac{dU}{dy}\frac{\partial^2 h'}{\partial x\partial y} = 0.$$

が得られる ( Satomura 1981 ). この方程式に対して WKBJ 近似の方法を適用することにより局所分散関係が次のように求まる.

$$\omega = U(y)k \pm \sqrt{gH\{k^2 + l(y)^2\}}$$

$y$  方向の局所波数  $l$  が実数である領域は波として  $y$  方向に伝播可能な波領域 (wavy) である.  $l$  が虚数となる領域は波として伝播できない領域 (evanescent) である. 局所分散関係から求めた波伝播性質を表わしたのが図 1 である. 基本流と波の位相速度が等しくなる critical level 付近が波伝播不可能な領域になっている.

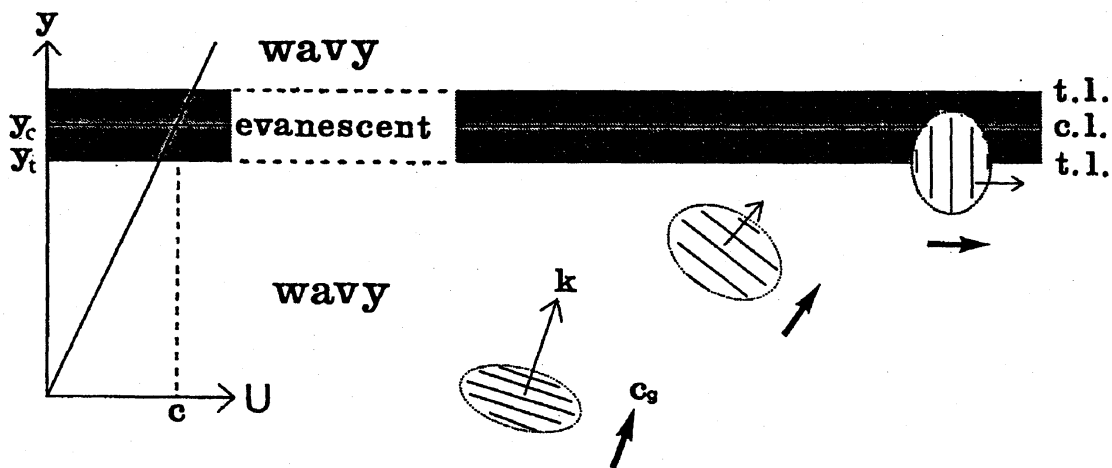


図 1. リニアースhear流中の浅水波の伝播性質

## 2.2. 初期値問題～波束の過剰反射

図1のように  $y \rightarrow -\infty$  から  $k, c$  一定の波束を与えると波束は次第に  $l=0$  となる turning level まで伝播していくことが予想される. しかし turning level に達した後波束がどうなるかは WKBJ 近似の範囲では予測できない. そこで線型方程式を数値的に解いてみた. ガウス型の振幅をもつ波束を初期値として与えて時間積分した結果が図2である. turning level に達するまでは WKBJ 近似での考察どおりであるが, turning level に達した後は波伝播不可能な領域をすり抜けていく波束と turning level で反射する波束に分かれて, それぞれ波伝播不可能な領域から遠ざかる方向に伝播していく. 注目すべきことは turning level に入射した波束に比べて反射した波束の振幅が大きくなる過剰反射となっていることである.

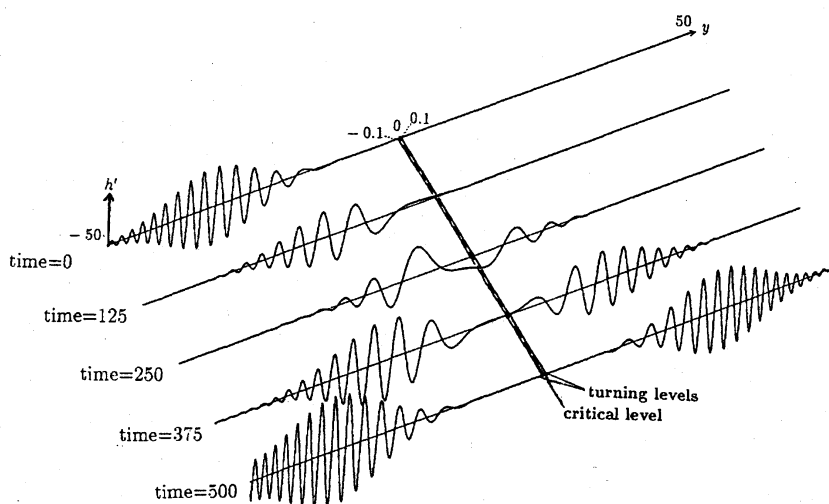


図2. リニアースhear流中を伝播する浅水波

### 2.3. 運動量保存則と過剰反射

過剰反射が生じることは  $x$  方向の運動量保存則から説明することができる (Takehiro and Hayashi 1992). 非線形の浅水波方程式を変形, 領域積分することにより  $x$  方向の全運動量保存則が得られる.

$$\frac{dM}{dt} = 0, \quad M \equiv \int \overline{h} u dy.$$

各物理量を  $u = U(y) + u' + u^{(2)}$ ,  $v = v' + v^{(2)}$ ,  $h = H + h' + h^{(2)}$  と, 基本場と擾乱量, さらに擾乱によって引き起こされる高次の微小擾乱量に展開することにより, 運動量保存則を

$$M = M_0 + M_1 + M_2,$$

$$M_0 = \int H U dy, \quad M_1 = \int (H \overline{u^{(2)}} + U \overline{h^{(2)}}) dy, \quad M_2 = \int \overline{h' u'} dy$$

と表現することができる.  $M_2$  は擾乱の持つ運動量,  $M_1$  は擾乱によって引き起こされる高次の微小擾乱の持つ運動量である.  $M_d \equiv M_1 + M_2$  は擾乱の存在するときと存在しないときの運動量の差である. これを difference momentum と呼ぶことにする.  $M_0$  は基本場の持つ運動量であり時間変化しないので difference momentum は保存しなければならない. さらにポテンシャル渦度保存則を用いて  $M_1$  を  $y$  方向変位  $\eta'$  で表わすことができ,  $M_1 = \int \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dy^2} H^2 \overline{\eta'^2} dy$  となる. したがって difference

momentum 保存則を

$$\frac{dM_d}{dt} = 0, \quad M_d = \int (\overline{h'u'} + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dy^2} H^2 \overline{\eta'^2}) dy,$$

と表わすことができる。リニアースター流の場合には  $d^2U/dy^2 = 0$  であるから  $M_d = \int \overline{h'u'} dy$  である。さらに difference momentum を WKBJ 近似を用いて書き直すと

$$M_d \sim \int \left( -\frac{g}{U-c} \right) \overline{h'^2} dy.$$

となる。この式は、入射波束と波伝播不可能な領域を透過した波束の difference momentum が反対符号であることを示している。全 difference momentum が保存することから反射する波束の持つ difference momentum は入射波束に比べて大きくならねばならない (図 3)。

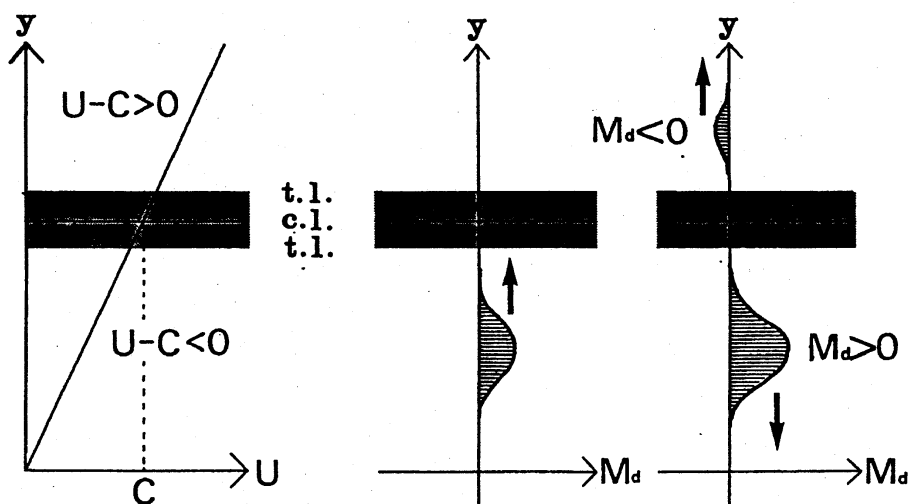


図 3. 過剰反射の模式図

すなわち過剰反射とは, 入射波が自分の持つ difference momentum と逆符号の momentum を透過波に与えた結果, 反射波の difference momentum が増加する現象であることがわかる.

#### 2.4. 過剰反射とシアー不安定

シアー流中の波の過剰反射と流れの不安定であることを結びつける考え方として Laser Formula と呼ばれる思考モデルがある. この考え方に基づく一連の研究が Linzen 等 (Lindzen, 1988 など) によって行われている. Laser Formula を用いることにより, 浅水波の波束の過剰反射から流れの不安定を次のようにイメージすることができる.

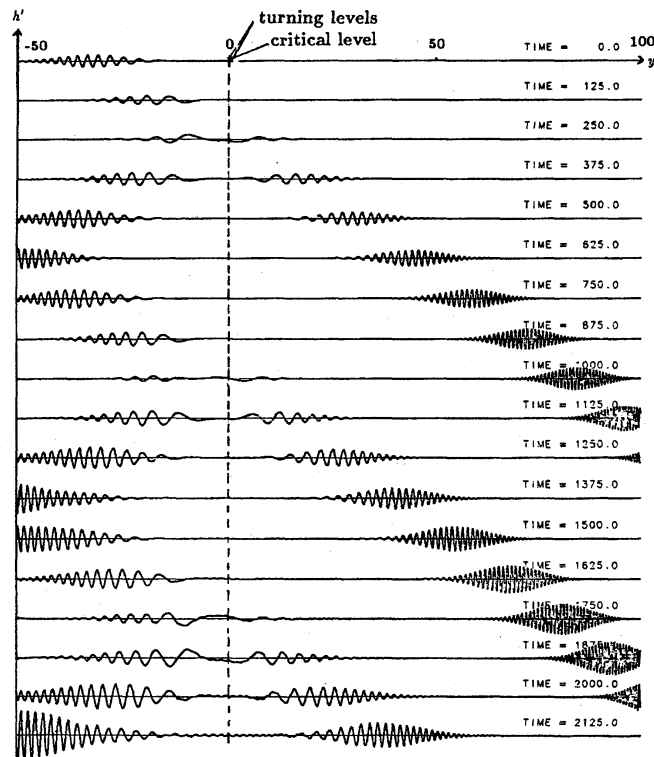


図 4. 浅水波の過剰反射が何度も生じる場合.



図 4 は入射領域の後方に反射壁をおいた場合の波束の時間発展を数値的に解いたものである. critical level において過剰反射した波束は後方の壁で反射され, 再び critical level に入射して過剰反射する. これを繰り返す, 振幅が増大して行く現象が不安定であると考えられる. あるいは, 流れの不安定とは反対符号の  $M_d$  を持った二つの擾乱の相互作用によって生じると言いかえることもできる. 例えば正の  $M_d$  を持った擾乱は負の  $M_d$  をもう一つの擾乱に捨てることによって, その振幅を増加していくのである.

### 3. 固有値問題と保存則

ここでは, 固有値問題で求められる不安定モードに関して difference momentum 保存則を適用してみる. 不安定モードは振幅が時間とともに増幅していく解である. 一方 difference momentum は振幅の 2 乗に比例する量である. しかし不安定モードについてもこの量は保存しなければならない. したがって不安定モードの difference momentum は 0 である. このことは, 不安定モードが正符号と負符号の difference momentum の擾乱から構成されており, それらの擾乱がそれぞれ増幅していくことを示す. 正の difference momentum を持つ擾乱を中心に考えると, この擾乱は負の difference momentum を持つ擾乱に負の運動量を与えて自分が増幅していくとみることができる. これ

は過剰反射から得られたイメージと同じである。

特に擾乱の difference momentum の符号が基本場の性質だけで決まる特別な場合には, これらの保存則から積分定理が導かれる。例えば, さきに求めた浅水での difference momentum 保存則において  $g \rightarrow \infty, h' \rightarrow 0$  の極限を取ると 2次元非圧縮流体の状況になる。そのときの difference momentum は

$$M_d = \int \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dy^2} H^2 \eta'^2 \right) dy.$$

と書ける。difference momentum の符号は基本場の流れの曲率だけで決まる。difference momentum が正である擾乱と負である擾乱がどちらも存在できるためには流れのどこかで  $\frac{d^2 U}{dy^2} = 0$  となる必要がある。これが Rayleigh の変曲点定理である。

同様の議論をエネルギー保存則について行うことにより, 表 1 に示すように種々の積分定理と保存則の対応関係がつけられる。

	運動量保存則	運動量, エネルギー保存則
非圧縮	Rayleigh(1880) Kuo(1949)	Fjørtoft(1950)
非圧縮成層	Synge(1933)	
浅水		Ripa(1983)

表 1. 保存則と積分定理

#### 4. まとめ

リニアースhear流中を伝播する浅水波を例にして、シアー流中を伝播する擾乱(波)の性質を用いて「不安定」を記述することを行った。流れの不安定とは、反対符号の difference momentum を持つ波がシアー流中に存在し、片方の波が自分の持つ difference momentum と反対符号の momentum をもう一方の波に与えて自分が増幅していく現象である。積分定理のいくつかは difference momentum, difference energy が両方の符号の波が存在する不安定となるために必要であることを主張するものであった。

流れの不安定を「波」という一般的な言葉で記述することは、擾乱の振舞いをイメージしやすいことだけでなく異なる系での安定性を同じ考え方で議論できるという利点がある。例えばイントロダクションで紹介した様々な系でのシアー流の不安定を「波」を用いて次のように解釈できる。非圧縮流体のリニアースhear流に不安定モードが存在しないのはシアー流中を伝播する波がないことによる。しかし、曲率のある流れでは基本場に渦度傾度が存在するために擾乱が渦度波(ロスビー波)として伝播でき、不安定になり得る。また、同じリニアースhear流でも成層が存在すると不安定になるのは擾乱が内部重力波としてシアー流中を伝播できることによる。浅水においてリニ

アーシアー流が不安定になりうるのも擾乱が浅水波として伝播するからである。

この浅水のリニアアーシアーの例は、過剰反射のもっとも簡単でわかりやすい描像であることを最後に強調しておく。通常 critical level は数学的には特異点である。そのためロスビー波 (Lindzen and Tung 1978), 内部重力波 (Lindzen and Barker 1985) の場合には通常 critical level で運動量流束のとびがあり, 波平均流相互作用が起こるので運動量のやり取りが複雑になってしまう。しかしリニアアーシアー流中の浅水波の場合には critical level での特異性および平均流加速がないので解釈が容易である。

### 参考文献

- Fjørtoft, R. 1950 *Geofys. Publ.* **17**, 5
- Kuo, H.L. 1949 *J. Met.* **6**, 105-122
- Lindzen, R.S. 1988 *PAGEOH* **126**, 103-121
- Lindzen, R.S. & Barker, J.W. 1985 *J. Fluid Mech.* **151**, 189-217
- Lindzen, R.S. & Tung, K.K. 1978 *J. Atmos. Sci.* **35**, 1626-1632
- Rayleigh, Lord 1880 *Proc. Lond. Math. Soc.* **11**, 57-70
- Ripa, P. 1983 *J. Fluid Mech.* **126**, 463-489
- Satomura, T. 1981 *J. Met. Soc. Japan* **59**, 148-167
- Takehiro, S. & Hayashi, Y.-Y. 1992 *J. Fluid Mech.* **236**, 259-279
- Synge, J.L. 1933 : *Trans. Roy. Soc. Can. Sec. 3* **27**, 1-18