

## 2次元 Rossby 波における揺動散逸定理と渦粘性係数

九大・理・物理 岩山隆寛 (Takahiro IWAYAMA)

九大・理・物理 岡本寿夫 (Hisao OKAMOTO)

### 要旨

Mori [1]の理論にしたがって、 $\beta$ 平面上2次元非粘性順圧流体のスペクトル形式の渦度方程式(2次元Rossby波の従う方程式)を拡張されたLangevin方程式に書き直す。このLangevin方程式中の減衰項は、注目する渦度の成分とmemory functionとの畳み込みによって表され、memory functionはLangevin方程式のrandom forceの相関関数によって表現される(第2種揺動散逸定理)。random forceは、渦度方程式の非線形項の初期値が隠れた変数で張られる空間内で時間発展していくものとして記述される。それ故、Langevin方程式の減衰項は乱流から生じた非線形効果から起こり、渦粘性による減衰項と解釈できる。注目する渦度のモードについての自己相関関数の運動方程式も求める。相関関数は渦粘性によって減衰する。幾つかの近似のもとでmemory functionを具体的に計算し、相関関数を求める。

等方的に20変数までで切断した渦度方程式を用いて数値シミュレーションを行ない、理論とシミュレーションとを比較する。地球の中緯度総観規模条件のもとで、相関関数の減衰率の大きさ、即ち、渦粘性係数が空気分子粘性係数よりも約9桁大きな値になることが理論から導かれる。

### §1. はじめに

地球規模の大気の流れを考える場合には、空気の分子粘性が及ぼす効果は無視してよく、大気を非粘性流体として扱える。しかし、濟州島の風下に見えるカルマン渦は、大規模な大気の流れには空気の分子粘性よりも8桁程度大きな粘性が働いている、と考えなくては説明できない。このような異常に大きな粘性は、大気中の乱流が原因と考えられ、Reynolds stressによって定性的説明がなされている(例えば[2])。しかしながら、定量的に説明した例はほとんど見当たらない。

Kraichnan [3]は、乱流の速度場についてのモデル方程式を提唱している。そのモデル方程式は、Navier-Stokes方程式の非線形項を速度場と同じcovarianceを持ったrandomな変数で置き換え、さらに、記憶を持った力学的

減衰項を付け加えたものである。減衰項は、randomな変数との間でエネルギーバランスが保たれるように選ばれる。これは、direct interaction approximation (DIA) と呼ばれるものである。DIAからは、本稿と似た構造を持った幾つかの近似が導かれる。DIAモデルにおいて、randomな変数を時間に関するwhite noiseで置き換えたとき、力学的減衰項の記憶はなくなる。このような近似を行なって得られたモデル方程式は、test field model (TFM) 方程式と呼ばれる[4]。Kraichnan [5]は、sub-grid scaleの現象がlarge scaleの現象に及ぼす効果的な渦粘性をTFMを用いて研究し、2次元流の場合、エネルギー慣性領域で負の渦粘性を得た。この負の渦粘性は、エネルギーのupward cascadeにより起こるものである。

本研究では、統計物理学が可逆のミクロな基礎方程式から非可逆のマクロな方程式(Langevin方程式)を導くこととの対応から、非粘性流体中の乱流が原因となって働く効果的な粘性、即ち渦粘性を具体的に計算してみた。ここでは問題を簡単化して、 $\beta$ 平面上の2次元非粘性順圧流体のスペクトル形式の渦度方程式(2次元Rossby波の従う方程式)を扱う。Mori [1]の理論に従って、注目する渦度の成分について拡張されたLangevin方程式を導く。拡張されたLangevin方程式に現われる減衰項は、注目する渦度の成分とmemory functionとの畳み込みによって表され、memory functionは、Langevin方程式のrandom forceの相関関数により表現できる(第2種揺動散逸定理)。random forceは、渦度方程式の非線形項の初期値が隠れた変数で張られる空間内で時間発展していくものとして記述される。基礎方程式が非粘性流体の渦度方程式だったので、従ってこの減衰項は、渦粘性による減衰項と解釈できる。

注目する渦度の成分の自己相関関数についての運動方程式も求める。相関関数は、渦粘性によって減衰する。長時間近似、短時間近似のもとで、揺動散逸定理からmemory functionを具体的に計算し、相関関数を求める。

Kells & Orszag [6]の20変数までで切断した渦度方程式を数値的に解き、理論から得られた相関関数と、数値シミュレーションから得られた相関関数とを比較する。

Mori [1]の拡張されたLangevin方程式は、DIAのモデル方程式と同じ形を持つ。しかしながら、拡張されたLangevin方程式は注目する変数についての正確な線形運動方程式であり[7]、モデル方程式ではないことを注意しておく。さらに、Moriの理論は量子力学において減衰理論と呼ばれる形式論

と同等で、Moriの理論からは負の渦粘性は導かれぬことも注意しておく [8, 9].

なお、大規模な大気現象では、準地衡流渦度方程式がBrown運動におけるLangevin方程式として取り扱えることがGambo [10]により示されている。

## § 2. 拡張されたLangevin方程式としての渦度方程式

領域が長さ $2\pi$ の正方形で、 $x, y$ の各方向に周期的境界条件を持つ $\beta$ 平面上の2次元非粘性順圧流体のスペクトル形式の渦度方程式（2次元Rossby波の従う方程式）は、

$$\frac{d}{dt} \zeta_t(m, n) = i\omega_{m,n} \zeta_t(m, n) + \sum_{p, q = -\infty}^{\infty} D(m, n, p, q) \zeta_t(m-p, n-q) \zeta_t(p, q), \quad (2.1)$$

である。ここで、 $m, n, p, q$ は整数、 $\zeta_t(m, n)$ は $x$ 方向の波数 $m$ 、 $y$ 方向の波数 $n$ の渦度のFourier成分であり、かつ、 $D(m, n, p, q)$ は非線形項の相互作用係数、 $\alpha^2(p, q)$ は波数の二乗の和、 $\omega_{m,n}$ はRossby振動数、

$$D(m, n, p, q) = \frac{1}{2}(mq - np) \left\{ \frac{1}{\alpha^2(p, q)} - \frac{1}{\alpha^2(m-p, n-q)} \right\}, \quad (2.2)$$

$$\alpha^2(p, q) = p^2 + q^2, \quad \omega_{m,n} = \frac{\beta m}{\alpha^2(m, n)}, \quad (2.3), (2.4)$$

である。射影演算子法 [1]を用いて、(2.1)の渦度方程式は拡張されたLangevin方程式

$$\frac{d}{dt} \zeta_t(m, n) = i\omega_{m,n} \zeta_t(m, n) - \int_0^t d\tau \gamma_{m,n}(t-\tau) \zeta_\tau(m, n) + R_t(m, n), \quad (2.5)$$

に書き直せる。右辺第一項は $\beta$ 効果による渦度の固有振動、右辺第二項は非線形効果による渦度の減衰、即ち、渦粘性減衰を表している。右辺第三項はrandom forceで、非線形項の初期値が隠れた変数で張られる空間内で時間発展していくものとして記述される；

$$R_t(m, n) = e^{t\hat{Q}\Gamma} \hat{Q} \sum_{p, q = -\infty}^{\infty} D(m, n, p, q) \zeta(p, q) \zeta(m-p, n-q). \quad (2.6)$$

ここで $\zeta(m, n) = \zeta_{t=0}(m, n)$ 、またLiouville operator  $\Gamma$ は、ここで考察する系(2.1)では以下のように定義される [11, 12]；

$$\Gamma = \sum_{k, l = -\infty}^{\infty} \left\{ i\omega_{k,l} \zeta(k, l) + \sum_{p, q = -\infty}^{\infty} D(k, l, p, q) \zeta(k-p, l-q) \zeta(p, q) \right\} \frac{\partial}{\partial \zeta(k, l)}. \quad (2.7)$$

$\widehat{P}$ と $\widehat{Q}$ はそれぞれ、ある関数を観測される変数で張られる空間内と、それに直交した隠れた変数で張られる空間内へと射影する射影演算子である。今回の研究では、 $\widehat{P}$ と $\widehat{Q}$ を以下のように選んだ；

$$\widehat{P} = \frac{|\zeta(m, n)\rangle\langle\zeta(m, n)|}{\langle\zeta(m, n)|\zeta(m, n)\rangle}, \quad \widehat{Q} = 1 - \widehat{P} \quad (2.8)$$

これらの射影演算子により、唯一の変数 $\zeta(m, n)$ が観測される変数、それ以外の変数は全て隠れた変数と見なされる。angular bracketはあるensemble  $\rho$  についての平均を表す；

$$\langle F|G \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\{\zeta\} \rho F^* G, \quad (2.9)$$

$$\{\zeta\} = \{\dots, \zeta(m, n), \dots\}.$$

ここで\*は複素共役を表す。

random forceとmemory function  $\gamma_{m,n}(t)$ との関係（第2種揺動散逸定理）は以下のように与えられる；

$$\gamma_{m,n}(t) = \frac{\langle R(m, n)|R_t(m, n)\rangle}{\langle\zeta(m, n)|\zeta(m, n)\rangle}. \quad (2.10)$$

$\zeta_t(m, n)$ の自己相関関数 $\Xi_{m,n}(t)$ についての運動方程式は、(2.5)から得られる；

$$\frac{d}{dt} \Xi_{m,n}(t) = i\omega_{m,n}\Xi_{m,n}(t) - \int_0^t d\tau \gamma_{m,n}(t-\tau) \Xi_{m,n}(\tau), \quad (2.11)$$

$$\Xi_{m,n}(t) \equiv \langle\zeta(m, n)|\zeta_t(m, n)\rangle. \quad (2.12)$$

即ち、 $\Xi_{m,n}(t)$ は渦粘性によって減衰する。方程式(2.11)が、我々の扱う問題に対する基礎方程式である。

### § 3. memory functionの具体的表現

次に、memory functionを揺動散逸定理から具体的に計算する。

memory functionを具体的に計算するには、渦度の分布関数  $\rho$  が必要である。この研究では、渦度の分布関数はKraichnan [13]の仮説（渦度空間内の代表点はエネルギーとエンストロフィーが一定の超曲面上でエルゴード的である。）より、エネルギー  $E$  とエンストロフィー  $Z$  を二つの不変量とする canonical ensembleを用いる。即ち、

$$\rho = C \prod_{m, n = -\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{A\alpha^2(m, n) + B}{AB\alpha^2(m, n)} \times \frac{|\zeta(m, n)|^2}{2} \right] . \quad (3.1)$$

ここで、 $C$ は規格化定数、 $A$ 、 $B$ は全エネルギーと全エントロピーにより決まる定数である。 $B$ はBose-Einstein分布における温度パラメーターに、 $\frac{B}{A}$ は化学ポテンシャルに相当する[13].

$\beta$ 効果が大きいとき、渦度空間内の代表点はエネルギーとエントロピーが一定の超曲面上でエルゴード的でなくなる十分条件が存在することが、Shepherd [14]により指摘されている。しかし、 $\beta$ 効果を含んだ場合の渦度の分布関数が現在のところ知られていないので、今回の研究では、(3.1)の分布関数を用いた。

memory functionに現われる propagator  $e^{i\hat{Q}\Gamma}$  を Taylor級数に展開する；

$$e^{i\hat{Q}\Gamma} = 1 + i\hat{Q}\Gamma + \frac{1}{2}(i\hat{Q}\Gamma)^2 + \dots . \quad (3.2)$$

このとき、memory functionも同様に時間に関して展開される；

$$\gamma_{m,n}(t) = \gamma_{m,n}^{(0)} + t\gamma_{m,n}^{(1)} - \frac{1}{2}t^2\gamma_{m,n}^{(2)} + \dots , \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{m,n}^{(0)} &= \sum_{p, q = -\infty}^{\infty} 2D(m, n, p, q) \frac{\langle |\zeta(p, q)|^2 \rangle \langle |\zeta(m-p, n-q)|^2 \rangle}{\langle |\zeta(m, n)|^2 \rangle} \\ &\equiv \sum_{p, q = -\infty}^{\infty} \gamma_{m,n}^{p,q} , \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\gamma_{m,n}^{(1)} = \sum_{p, q = -\infty}^{\infty} \gamma_{m,n}^{p,q} \times (\omega_{m,n} + \omega_{m-p, n-q}) , \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{m,n}^{(2)} &= \sum_{p, q = -\infty}^{\infty} \gamma_{m,n}^{p,q} \times (\omega_{m,n} + \omega_{m-p, n-q})^2 + \sum_{p, q, k, l = -\infty}^{\infty} 2\gamma_{m,n}^{p,q} \gamma_{p,q}^{k,l} \\ &+ \sum_{p, q, k, l = -\infty}^{\infty} \frac{\langle |\zeta(p, q)|^2 \rangle \langle |\zeta(k, l)|^2 \rangle \langle |\zeta(m-p-k, n-q-l)|^2 \rangle}{\langle |\zeta(m, n)|^2 \rangle} \\ &\times 16D(m, n, p, q)D(m-p, n-q, k, l)D(m, n, k, l)D(m-k, n-l, p, q) \\ &+ \sum_{p, q = -\infty}^{\infty} 4\gamma_{m,n}^{p,q} \gamma_{p,q}^{m-p, n-q} \frac{\langle |\zeta(m-p, n-q)|^4 \rangle}{(\langle |\zeta(m-p, n-q)|^2 \rangle)^2} . \end{aligned} \quad (3.6)$$

$\gamma_{m,n}^{p,q}$ は正の量である。2次のモーメントと4次のモーメントは(2.9)と(3.1)に従って、計算される；

$$\langle |\zeta(m, n)|^2 \rangle = \frac{AB\alpha^2(m, n)}{A\alpha^2(m, n) + B} , \quad (3.7)$$

$$\langle |\zeta(m, n)|^4 \rangle = 3 \langle \langle |\zeta(m, n)|^2 \rangle \rangle^2 . \quad (3.8)$$

パラメータ  $A, B$  が数値的に決定されれば, memory function も任意の桁まで数値的に求められる. このとき  $\zeta(m, n)$  の自己相関関数  $\Xi_{m, n}(t)$  も (2.11) より計算される.

#### § 4. 長時間近似, 短時間近似のもとでの自己相関関数

memory function を次のように近似する (長時間近似) ;

$$\gamma_{m, n}(t) \approx 2\gamma_{m, n}^{(0)}\delta(t) \quad (4.1)$$

ここで  $\delta(t)$  は Dirac のデルタ関数である. このとき自己相関関数  $\Xi_{m, n}(t)$  は,

$$\Xi_{m, n}(t) = \exp\left[i(\omega_{m, n} - \gamma_{m, n}^{(0)})t\right], \quad (4.2)$$

即ち, Rossby 振動数で振動しながら渦粘性により減衰する.  $\gamma_{m, n}^{(0)}$  は Kubo [15] 公式の輸送係数に相当する. この近似は,  $\gamma_{m, n}(t)$  が  $\tau_m$  で減衰するとき, 注目する時間が  $\tau_m$  よりも十分長い場合に有効な近似である. このとき, 拡張された Langevin 方程式は Brown 運動における Langevin 方程式に還元される.

次に (3.3) を第 3 項までで切断しそれを Gauss 関数で近似する. さらに, 輸送係数 [15] が等しくなるように Gauss 関数を指数関数で近似する;

$$\gamma_{m, n}(t) \approx \gamma_{m, n}^{(0)} \exp\left[i(\omega_{m, n}^{(1)} - \varepsilon_{m, n})t\right], \quad (4.3)$$

$$\omega_{m, n}^{(1)} = \frac{\gamma_{m, n}^{(1)}}{\gamma_{m, n}^{(0)}}, \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_{m, n} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\gamma_{m, n}^{(2)}}{\gamma_{m, n}^{(0)}} - (\omega_{m, n}^{(1)})^2 \right\}}. \quad (4.5)$$

この近似 (短時間近似) のもとで自己相関関数は Laplace 変換された形式で, 次のように与えられる.

$$\Xi_{m, n}[s] = \frac{1}{s - i\omega_{m, n} + \frac{\gamma_{m, n}^{(0)}}{s + \varepsilon_{m, n} - i\omega_{m, n}^{(1)}}}, \quad (4.6)$$

$$\Xi_{m, n}[s] = \int_0^{\infty} \exp[-st] \Xi_{m, n}(t) dt \quad (4.7)$$

#### § 5. 数値シミュレーションとの比較

数値シミュレーションを行ない, 公式 (4.2) と (4.6) の正当性を確かめた. Kells & Orszag [6] の Model C をシミュレーションに用いた. このモデルは, 波数の二乗の和が 5 まで ( $\alpha^2(m, n) \leq 5$ ) で等方的に切断されたもので, 従って 20 個の実数の独立変数を持つ. さらに, これは時間的な平均量と (3.1)

のensemble平均による平均量とが数パーセントの誤差の範囲内で一致する、という意味においてエルゴード性の仮定がなり立っている、最も低次元の縮退していない等方的に切断されたモデルである。このモデルを4次のRunge-Kutta法を用い、初期値は-0.5から0.5の一様乱数を与え、時間間隔は $\Delta t = 0.0025$ で $t = 3000$ まで倍精度で数値的に積分した。全エネルギーと全エンストロフィーはそれぞれ $E = 0.54825014$ ,  $Z = 1.3368235$ が選ばれた。このエネルギーとエンストロフィーの値では全てのモードが有意に励起されることが知られている[13, 16]。 $\beta$ の値は $\beta = 0$ ,  $0.05$ の2つの値についてシミュレーションを行なった。 $\beta = 0.05$ が地球の中緯度条件に相当する。

公式(3.7)から求めた2次のモーメントと数値シミュレーションにより得た2次のモーメントを表1に示す。また、シミュレーションにより求めた相関関数の結果と公式(4.2), (4.6)から得た結果のうち幾つかを図1に示す。理論によると、相関関数に与える $\beta$ 効果の影響はほとんど無視できる。一方、シミュレーションによると(0,1)成分以外では、相関関数に与える $\beta$ 効果の影響はほとんど見られない。理論とシミュレーションの結果の一致は満足いくものである(図1)。

表1 2次のモーメント

変数	理論 (3.1)	数値計算 ( $\beta = 0$ )	数値計算 ( $\beta = 0.05$ )
Re[ $\zeta(1,2)$ ]	0.140446	0.130788	0.133495
Re[ $\zeta(-1,2)$ ]	0.140446	0.135554	0.133160
Im[ $\zeta(1,2)$ ]	0.140446	0.135735	0.136432
Im[ $\zeta(-1,2)$ ]	0.140446	0.133917	0.139979
Re[ $\zeta(2,1)$ ]	0.140446	0.142123	0.128789
Re[ $\zeta(-2,1)$ ]	0.140446	0.136759	0.137059
Im[ $\zeta(2,1)$ ]	0.140446	0.133071	0.137898
Im[ $\zeta(-2,1)$ ]	0.140446	0.127676	0.132588
Re[ $\zeta(1,1)$ ]	0.130984	0.157984	0.149387
Re[ $\zeta(-1,1)$ ]	0.130984	0.149548	0.156222
Im[ $\zeta(1,1)$ ]	0.130984	0.154793	0.148040
Im[ $\zeta(-1,1)$ ]	0.130984	0.144480	0.143741

(次頁へ続く)

$\text{Re}[\zeta(2,0)]$	0.138775	0.123977	0.141316
$\text{Im}[\zeta(2,0)]$	0.138775	0.137573	0.131599
$\text{Re}[\zeta(0,2)]$	0.138775	0.146747	0.135390
$\text{Im}[\zeta(0,2)]$	0.138775	0.140343	0.142068
$\text{Re}[\zeta(1,0)]$	0.117761	0.109278	0.114917
$\text{Im}[\zeta(1,0)]$	0.117761	0.118339	0.110221
$\text{Re}[\zeta(0,1)]$	0.117761	0.103114	0.133495
$\text{Im}[\zeta(0,1)]$	0.117761	0.105862	0.136432

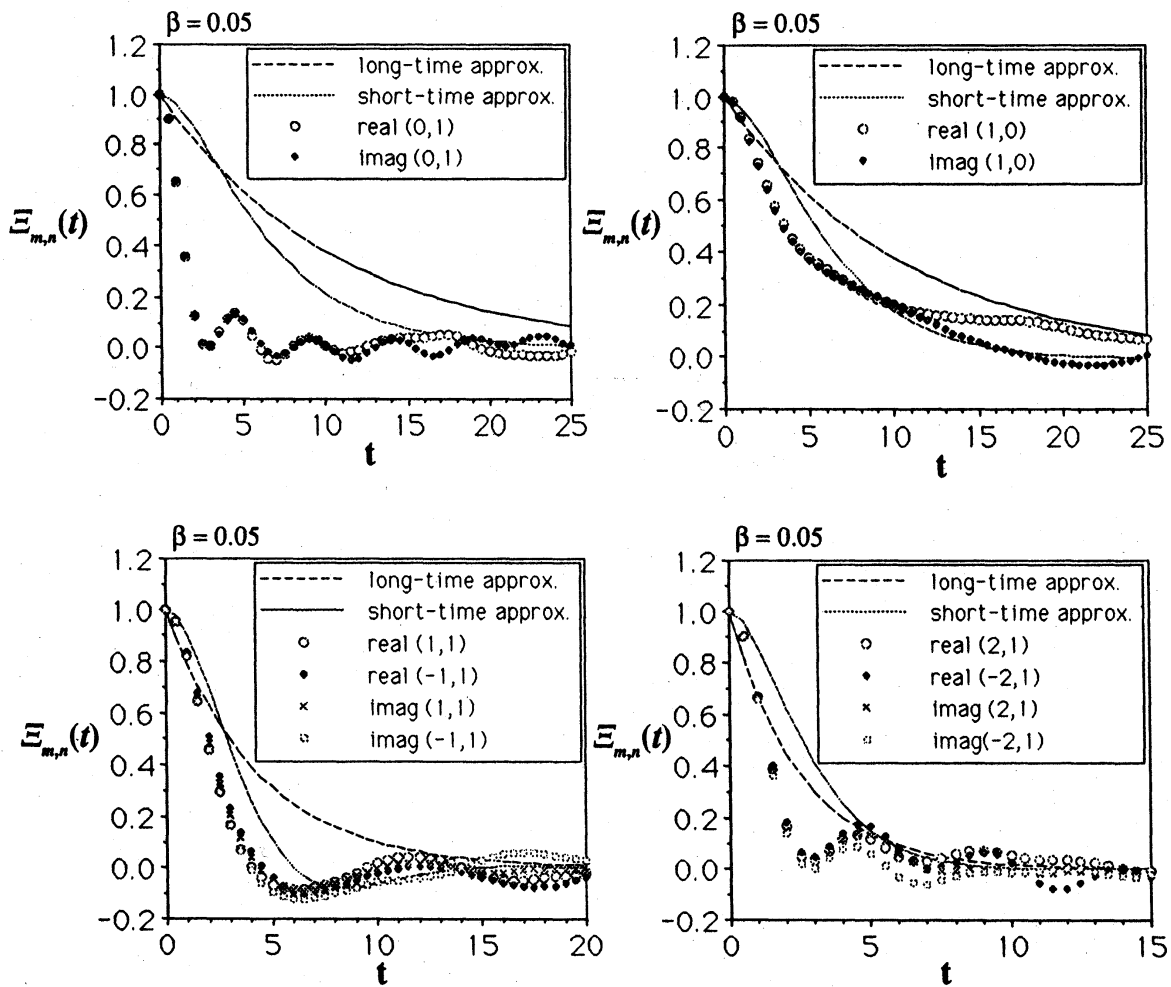


図1. 理論 (公式(4.2), (4.6)) とシミュレーションから求められた自己相関関数



相関関数の指数関数的減衰率と波数の二乗の和 $\alpha^2(m, n)$ との関係を図2に示す。長時間近似理論における減衰率は( $\alpha^2(m, n) = 4$ を除くと)  $\alpha^2(m, n)$ にほぼ比例しており、比例係数は約 $9.8 \times 10^{-2}$ である。即ち、渦粘性は拡散型で、従って空気の分子粘性と比較することができる。

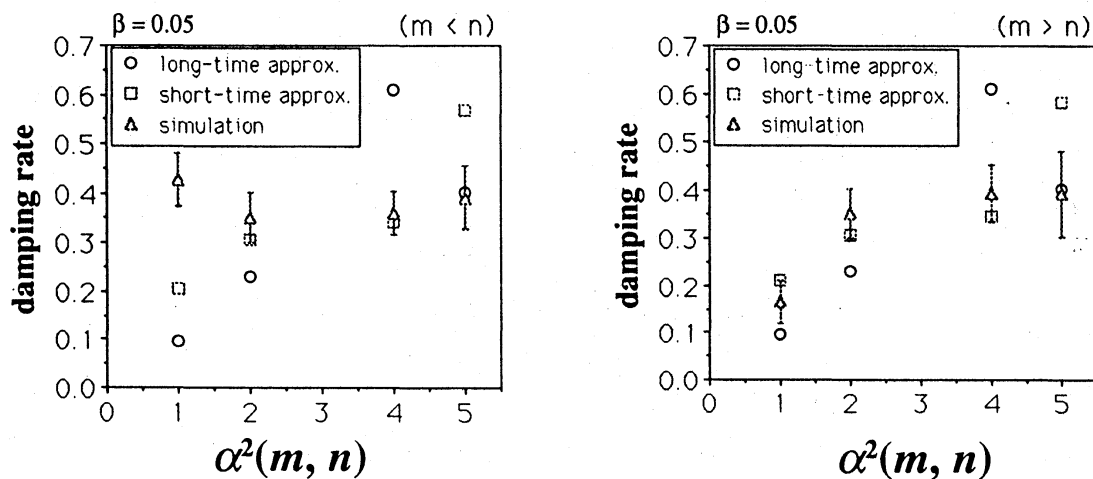


図2. 波数の二乗の和 $\alpha^2(m, n)$ に対する相関関数の指数関数的減衰率

地球の中緯度総観規模条件 (特徴的空間スケール $L \sim 1.0 \times 10^6$  m, 特徴的時間スケール $T \sim 1.2$  day) で無次元化した空気の分子粘性係数 $\nu$ は $\nu \sim 1.5 \times 10^{-12}$ である。一方、長時間近似理論において得られた渦粘性係数は、数値計算で用いた値で無次元化 ( $L \sim 2\pi, T \sim 1/\sqrt{|\zeta(m, n)|^2} \sim 3.2$ ) を行なうと、 $K \sim 7.8 \times 10^{-3}$ 。従って両者の比は、 $\frac{K}{\nu} \sim 5.2 \times 10^9$ となる。

## §6. まとめ

$\beta$ 平面上の2次元非粘性順圧流体のスペクトル形式の渦度方程式 (2次元Rossby波の従う方程式) をMori [1]の理論にしたがって、拡張されたLangevin方程式に書き直した。Langevin方程式に現われる減衰項はrandom force (渦度方程式の非線形項の初期値が隠れた変数で張られる空間内で時間発展したもの) の相関関数により表現される (第2種揺動散逸定理)。この減衰項を数値的に計算することにより、2次元Rossby波における渦粘

性係数を求めた。その結果，“長時間近似理論により求めた渦粘性係数は地球の中緯度総観規模条件で空気の分子粘性係数よりも約9桁大きな値を持つ”，という結果を得た[17].

### 謝辞

本研究を進めるにあたり，九州大学理学部宮原三郎教授，守田治助教授，に御指導と励ましのお言葉を賜りました。また，東京大学岸保勘三郎名誉教授，東京大学気候システム研究センター高橋正明助教授からは，貴重な御助言と励ましのお言葉を賜りました。ここに記して，感謝いたします。

### 参考文献

- [1] H. Mori, Prog. Theor. Phys. 33 (1965) 423.
- [2] J. R. Holton, An Introduction to Dynamic Meteorology, 2nd ed. (Academic Press, New York, 1979)
- [3] R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. 41 (1970) 189.
- [4] R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. 47 (1971) 513.
- [5] R. H. Kraichnan, J. Atmos. Sci. 33 (1976) 1521.
- [6] L. C. Kells and S. A. Orszag, Phys. Fluids 21 (1978) 162.
- [7] S. W. Lovesey, Condensed Matter Physics: Dynamic Correlations (Benjamin, Advanced Book Program, Reading, Massachusetts, 1980).
- [8] W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation, 2nd ed. (Oxford University Press, Oxford, 1944).
- [9] R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume, Statistical Physics II. Nonequilibrium Statistical Mechanics (Springer, Berlin, 1985).
- [10] K. Gambo, J. Meteor. Soc. Japan 60 (1982) 206.
- [11] J. Qian, Phys. Fluids 26 (1983) 2098.
- [12] J. Qian, Phys. Fluids 27 (1984) 2412.
- [13] R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. 67 (1975) 155.
- [14] T. G. Shepherd, J. Fluid Mech. 184 (1987) 289.
- [15] R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan 12 (1957) 570.
- [16] T. L. Bell, J. Atmos. Sci. 37 (1980) 1700.
- [17] T. Iwayama and H. Okamoto, preprint (to be submitted).