

## トーラス内熱対流の非線形反転

東海大学教養学部 三村 和男 ( Kazuo Mimura )  
東海大学教養学部 須田 不二夫 ( Fujio Suda )

### § 1. はじめに

トーラス内の熱対流実験を行い、その主流のカオス的反転現象に注目し、非線形力学系のモデルを立てて、線形不安定論及び非線形数値シミュレーションの手法で考察を加えた。他のグループによっても、同様の実験は行なわれたが、主流のカオス的反転は必ずしも、実現するとは限らなかった ( Osamu Sano; 1991a,b )。実験装置の形状や動作流体の物性に関して、微妙な条件が満たされる必要があるらしい。我々の実験結果及び一次元モデルによる予備的な考察はすでに1990年度の研究集会 ( 流体中の非線形波動の数理的側面 ) で報告したので ( 三村・須田; 1991 ) 以下にその概要を整理する。

実験装置は図1のように、鉛直設置されたトーラス内に水を満たし、このトーラスの下半分を管壁温度  $T_h$  で加熱し、上半分を管壁温度  $T_c$  で冷却し、この加熱冷却部の温度差  $\Delta T$  をパラメーターとして、トーラス内の熱対流の変動を比較した。観察された定常対流パターンは図2の模式図のように、主流 ( 管壁に沿ったポアズイユ流的な熱対流 ) と4つの局所対流 ( 4つの象限の各々の内部で閉じた熱対流 ) の重なった状態と見なせた。そして主流が時計廻りの時には第2、第4象限の局所対流が第1、第3象限のそれらに比べて相対的に強く、主流が反時計廻りの時にはその逆であった。また、管断面内平均温度が最も高い場所は加熱部の最下流部 ( すなわち、冷却部の最上流部 ) であり、最も低い場所は冷却部の最下流部 ( すなわち、加熱部の最上流部 ) であった。そして、 $10^\circ\text{C} \leq \Delta T \leq 20^\circ\text{C}$

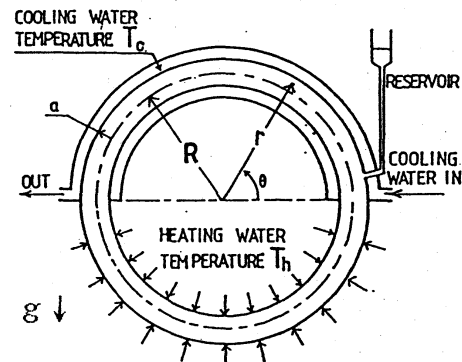


図1. 実験装置模式図

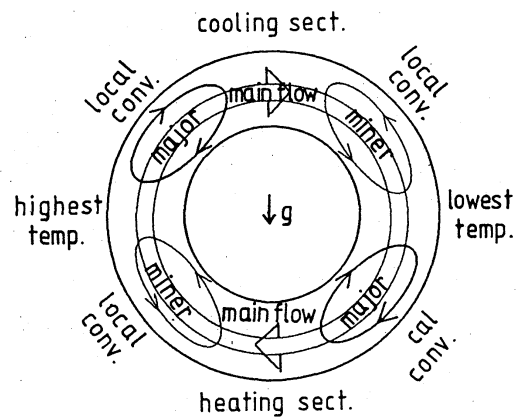


図2. 定常対流パターン模式図

の条件下では、トーラス左端及び右端における管断面内平均温度の差カオス的反転が記録された。この水平温度差の符合の変動は、主流の向きの変動にほぼ対応していると考えられた。また、主流の大きさや向きが時間的に変動する際にも、基本的には4つの局所対流というパターン自体は維持されて、それらの強弱が変化するだけであるように見えた。従って、これらの局所対流は主流の変動に対して従属的なものであると仮定して、主流のみを含み、局所対流を無視した一次元モデルを構築し、線形不安定性を調査して、実験と比較した。図3はその結果を示すレジーム・ダイアグラムである。図のように、動作流体の粘性係数を実際の約1.6倍に見積った場合には、主流の反転が見られなかった $\Delta T$ が1℃、3℃、5℃の3通りの実験は線形不安定性解析の安定対流領域に属し、主流の反転現象が見られた $\Delta T$ が10℃、15℃、20℃の3通りの実験は不安定対流領域に属していることが確認された。この粘性係数に掛けるファクターは現実の実験では4細胞の局所対流が存在することの反映であるかも知れない。さらに、上記一次元モデルの非線形時間発展を数値的に解いた。弱い不安定領域において定常状態から始めたシミュレーションの結果、管壁に沿って主流とほぼ同じ速さで伝播する線形不安定温度波動が次第にその振幅を増大させ、定常解の温度振幅と同じ程度になったとき、初めて主流の反転が起こり、その後、カオス的に反転が繰り返された。また、強い不安定領域の中には主流が周期的に反転を繰り返す例もあり、実験パラメータ空間のカオス領域の中に周期領域の窓の存在を示唆していた。

以上の基礎の上に、考察を深めていこう。§2では、加熱冷却領域をトーラス軸を中心に回転させ、左右の対象性を減じた場合について、線形不安定性を調べる。§3では、再び対称モデルについて、この線形不安定波動の果たす役割を調べ、§4では、数値シミュレーションにより上記周期領域の窓を描き出し、最後に§5では、主流の反転現象を起こさせるための条件について考察する。

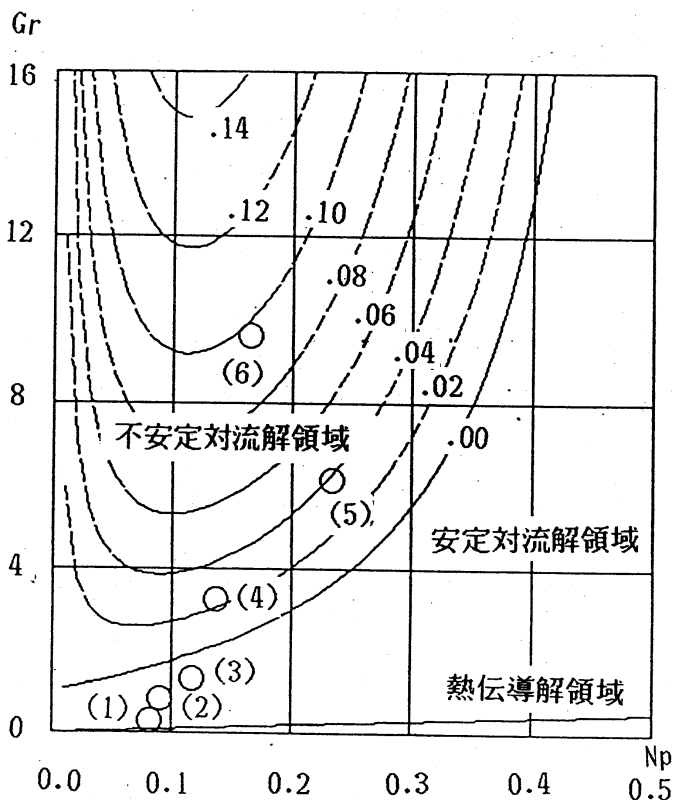


図3. 対流のレジーム・ダイアグラム  
定常対流解に対する線形不安定波動の成長率を等値線を使って表わした。実験番号(1)~(6)は各々 $\Delta T=1, 3, 5, 10, 15, 20^\circ\text{C}$ に対応した $(Gr, Np)$ の座標をプロットした。

## § 2. 線形不安定論

図1の装置をトーラス軸を中心に $\delta$ だけ回転させて加熱冷却条件を左右非対称にした場合について、ブジネスク流体とポアズイユ流を仮定した一次元モデルでは、 $v(t)$ 及び $\phi(\theta, t)$ を各々、トーラスの管軸方向無次元流速及び温度とすると、運動方程式及び熱の式は、 $Gr$ と $N_p$ の2つの無次元パラメーターを使って次のように表わされる。

$$dv/dt = -v + Gr/4 \int_0^{2\pi} \phi \cos(\theta - \delta) d\theta \quad (\text{式 1 a})$$

$$\partial\phi/\partial t = -v\partial\phi/\partial\theta - N_p \begin{cases} \phi + 1 & (\delta \leq \theta \leq \pi + \delta) \\ \phi - 1 & (\pi + \delta \leq \theta \leq 2\pi + \delta) \end{cases} \quad (\text{式 1 b})$$

但し、 $t$ は無次元時間、 $\theta$ はトーラス管軸方向偏角、 $Gr = a^4 \beta g(T_h - T_c)/(64 \pi R \nu^2)$ 、 $N_p = ah/(4 \rho_0 C \nu^2)$ 、 $a$ は管半径、 $\beta$ は動作流体の熱膨張率、 $g$ は重力加速度の大きさ、 $R$ は環半径、 $\nu$ は動作流体の動粘性係数、 $h$ は管壁から動作流体への熱伝達係数、 $\rho_0$ は動作流体の平均密度、 $C$ は動作流体の比熱である。また、有次元の時間、流速、温度は各々、 $t^* = ta^2/(8\nu)$ 、 $v^* = 8v\nu R/a^2$ 、 $T^* = T_0 + \phi(T_h - T_c)/2$ で与えられる。

定常解は $\phi_s$ 、 $V_s$ を各々、定常温度分布、定常流速とすると、

$$\phi_s = \begin{cases} 2\exp(-(\theta - \delta)/S)/(1 + \exp(-\pi/S)) - 1 & (\delta \leq \theta \leq \pi + \delta) \\ -2\exp(-(\theta - \delta - \pi)/S)/(1 + \exp(-\pi/S)) + 1 & (\pi + \delta \leq \theta \leq 2\pi + \delta) \end{cases} \quad (\text{式 2 a})$$

ただし、 $S = V_s/N_p$ であり、 $V_s$ は次の3次方程式の解である；

$$V_s^3 + N_p(N_p - Gr \cos \delta)V_s - Gr N_p 2 \sin \delta = 0 \quad (\text{式 2 b})$$

式1 a, bに $v = V_s + v'$ 、 $\phi = \phi_s + \phi'$ を代入し、線形化し、さらに、 $v' = v_0 \exp(-i\omega t)$ 、 $\phi = \phi_0(\theta) \exp(-i\omega t)$ を代入して、線形化方程式を解くと、

$$\phi_0 = \begin{cases} B \exp(-(\theta - \delta)/S) [1 - \text{Dexp}(i\omega(\theta - \delta)/V_s)] & (\delta \leq \theta \leq \pi + \delta) \\ -B \exp(-(\theta - \delta - \pi)/S) [1 - \text{Dexp}(i\omega(\theta - \delta - \pi)/V_s)] & (\pi + \delta \leq \theta \leq 2\pi + \delta) \end{cases} \quad (\text{式 3})$$

ただし、 $B=iv_0\beta/\omega$ 、 $D=[1+\exp(-\pi/S)]/[1+\exp(-\pi(1/S-i\omega/V_s))]$ 、しかも、 $\omega$  は次の特性方程式を満たさなければならない；

$$i\omega^3 - (1+2N_p)\omega^2 - iN_p[1+Gr(V_s\cos\delta+(N_p+1)\sin\delta)/V_s]\omega + N_p[Gr(2V_s\cos\delta+3N_p\sin\delta)/V_s - 2N_p] = 0 \quad (式4)$$

$Gr$ 、 $N_p$ 、 $\delta$  の値が与えられると、式2 bより、最大で3通りの  $V_s$  が求められる。それらに対応した定常温度分布が式2 aにより、決定される。そして、各々の  $V_s$  に対して、式4より、最大3個の複素数解  $\omega$  が求められる。これら3個の解  $\omega$  の内、ひとつでも正の虚数部を持つ解が存在すれば、式3より決定される線形不安定温度波動  $\text{Re}[\phi_0\exp(-i\omega t)]$  が位相速度  $\text{Re}(\omega)$

で伝播しながら、成長率  $\text{Im}(\omega)$  で指数関数的に増大する。また、流速については、 $\text{Re}[v_0\exp(-i\omega t)]$  に従い振動しながら増大する。図4 a, b, cは  $N_p=0.2$  として、 $\delta=2\pi/1000$ 、 $2\pi/10$ 、 $2\pi/3$  の3通りについて、 $Gr$  が0から50まで変化するときの  $V_s$  の分岐図を示したものである。太い実線は安定な定常流速を示し、太い破線は不安定な定常流速を示している。 $\delta$  が大きくなるにつれて、定常流速解の対称性が崩れていく様子が解る。 $\delta$  が小さくなった極限では、三村・須田(1991)の分岐図に漸近し、 $Gr$  の増加に伴って、熱伝導解が2つの安定対流解に分岐し、さらに大きな  $Gr$  の値に対してはすべての定常解が不安定化する様子が解る。また、図4 b

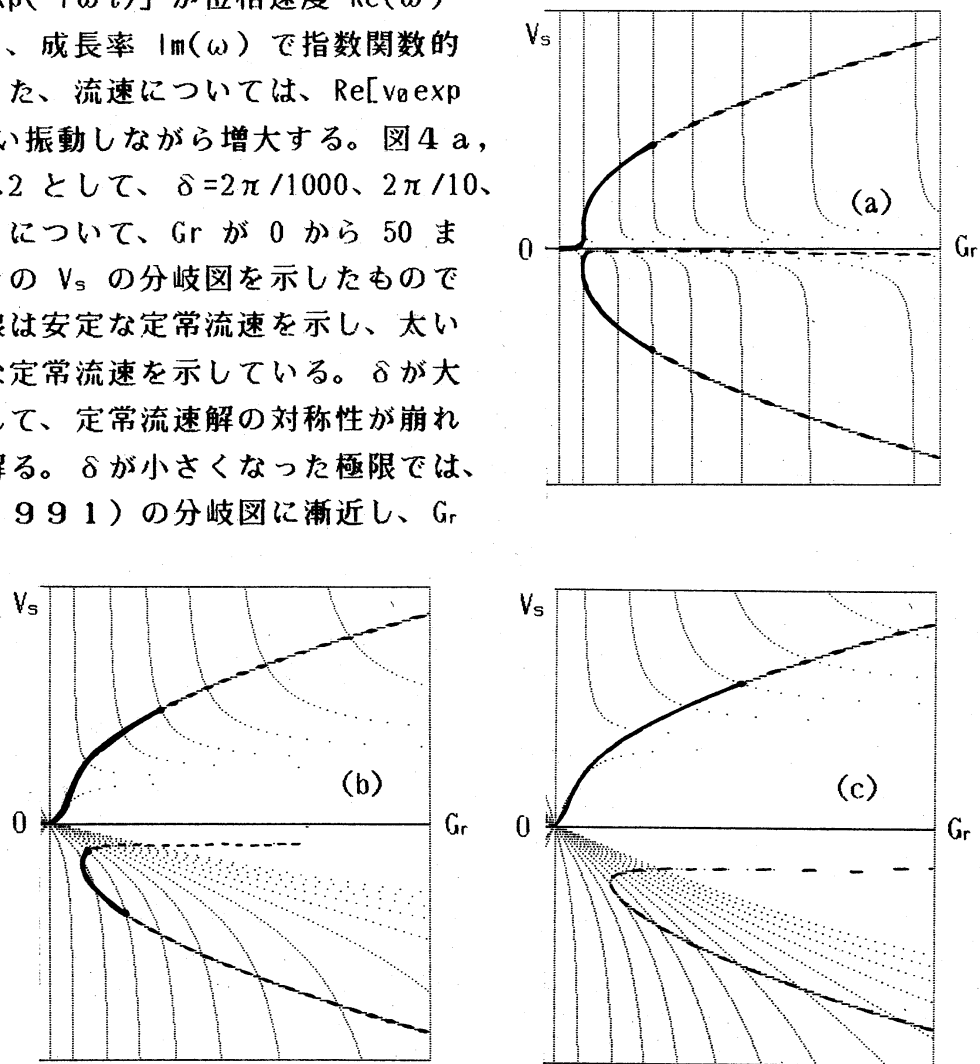


図4.  $V_s$  の分岐図

の例では、熱伝導解と対流解の境界は定かでない、正負の対称性も悪いが、2つあるいは3つの多重安定平衡解の存在が見られる。ところが、図4cでは、もはや負の定常解はすべて不安定化しており、実現可能な定常流は反時計廻りのみとなっている。

図5は、実際に実験用トラスを任意の角度 $\delta$ だけ回転させることが出来るようにした実験装置の模式図であり、それによる実験結果を図6に示している。2重に斜線が施されている部分が時計廻り、反時計廻りの2種類の定常対流が確認されたパラメータ領域である。上の線形不安定論と定性的には良く一致している。

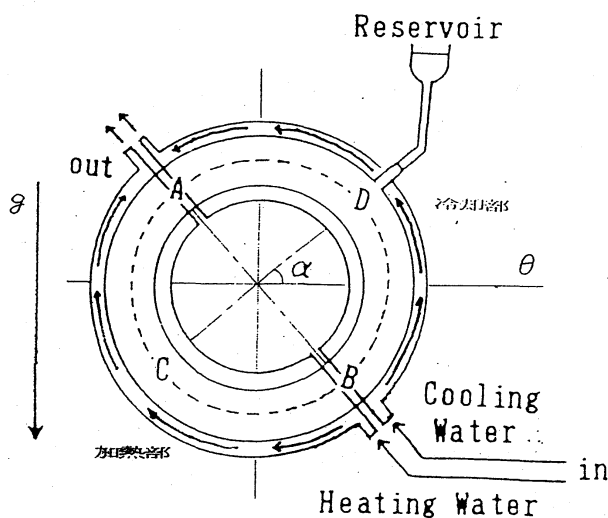


図5. 非対称実験装置模式図

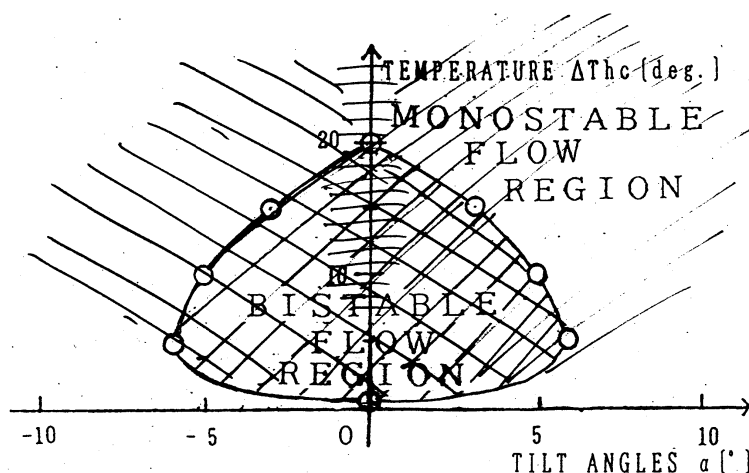


図6. 多重定常対流

### § 3. 線形不安定波動の役割

ここで、 $\delta=0$ の場合に戻って、この線形不安定波動が果たす役割について考えてみる。この実験装置全体を下部の高温管壁から上部の低温管壁への熱伝達装置のひとつと見なした場合、この不安定波動はどのような熱伝達作用を果たしているのだろうか。

まずは、定常対流の熱伝達に注目してみる。図7は、定常対流の温度分布と管壁から流体に取り込まれる熱フラックス( $Q$ )の分布を示している。上部は全領域にわたって、排熱を行なっているが、なかでも最高温部である第一象限( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ )において排熱が大きい、下部は全領域にわたって、吸熱を行なってい

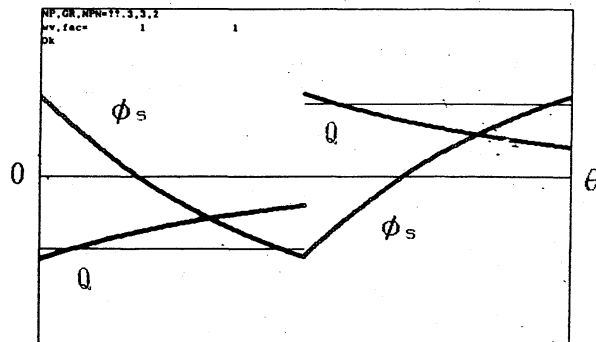


図7. 定常対流の熱伝達

るが、なかでも最低温部である第3象限において吸熱量が大きい。図8の実線は  $Gr=3$  のとき最も成長率の大きい  $Np=0.08$  を選んだ場合の、不安定温度波動が時刻とともに  $\theta$  方向に伝播していく様子を示している。途中にくびれを持つ線形不安定温度波動が定常対流流速の約 1.2 倍の速さで伝播

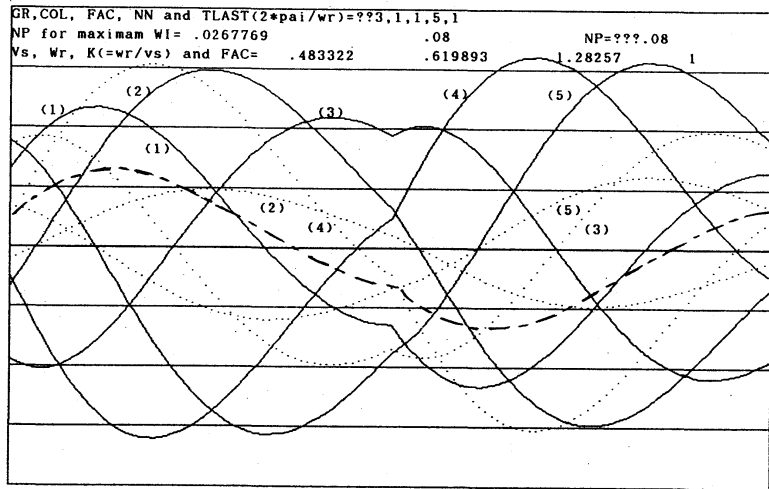


図8. 不安定波動の伝播とその熱フラックス番号(1)~(5)の順に変化していく

しながら成長率約 0.027 で成長している様子を示している。また、点線はこの波動による  $\theta$  方向の熱フラックス ( $Re(v')Re(\phi')$ ) の変動を示している。さらに、太い一点鎖線は各位置 ( $\theta$ ) における、波動による時間平均熱フラックスを示している、ただしこの計算においては、 $v'$  と  $\phi'$  の位相のズレの効果に注目するため、振幅自体の増大の効果は省いてある。この平均熱フラックスの収束を第1、2象限全体で積分した量がこの不安定波動によって冷却部全体へ運ばれる、時間平均熱伝達量であり、それは第3、4象限全体でのその発散の積分値とも等しいはずである。これを不安定波動による熱伝達効果と呼ぶことにして、ある  $Gr$  の値に対して、 $Np$  の値を変化させながら、この熱伝達効果

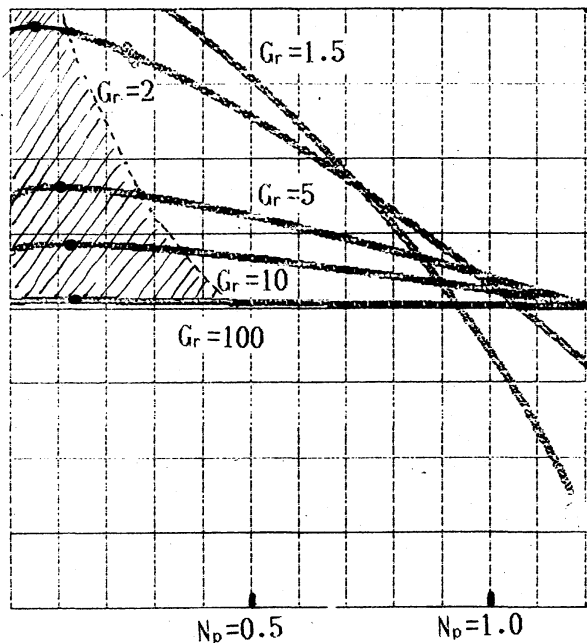


図9. 不安定波動による熱伝達効果

果 ( $\eta$ ) の変化を調べた。図9は、 $Gr=1.5, 2, 5, 10, 100$  の5通りについて、 $Np$  に対する  $\eta$  の変化を図示したものである。斜線部分は不安定対流領域にあたり、不安定波動は正の熱伝達効果を持つことが確認される。さらに各  $Gr$  の値に対して、 $\eta$  が最大値を持つ  $Np$  の値は、図3に示した最大成長率を持つ  $Np$  の値に一致することが解った。従って、この線形不安定波動はこの装置の熱伝達性能を高める役割を果たしているということが出来る。

#### § 4. 数値シミュレーション

三村・須田(1991)で示唆されていた、実験パラメーター空間内のカオス領域のなかに埋め込まれた周期解領域の窓を見つけるためには、数多くの時間発展問題を解かなければならないので、支配偏微分方程式(式1 a、b)を最低次のスペクトル・モデルに書き換えた。得られた常微分方程式系は

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -X + Y \\ \dot{Y} &= -ZX + GrX - N_p Y \\ \dot{Z} &= XY - N_p Z \end{aligned} \quad (\text{式5})$$

である、ただし、 $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  は各々、主流速、水平温度差、定常解に対する鉛直温度偏差である。この最低次のスペクトル・モデルをもとにして、線形不安定性を調べて得られた特性方程式は、上記の厳密な1次元モデルの結果と比べて完全に一致した。従って、解の分類にあたってはこのスペクトル・モデルを使用した。

式5を  $N_p$  については 0.01 から 0.5 までの50通り、 $Gr$  については 1 から 40 までの40通りについて、 $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  の初期値は、各々定常解の2, 1, 1倍に固定して、4次のルンゲ・クッタ法で、時間刻みは 0.01 で 30000 ステップまで計算して、カオス解と周期

解の分類をしその分布を調べた。分類の方法は、計算結果の前半部分は捨て後半部分のみについて、

$X$  の  $n$  番目の極値  $X_n$  を横軸座標に  $n+1$  番目の極値  $X_{n+1}$  を縦軸座標にして、写像関数をプロットして、連続的な曲線が描けたものはカオス的と判断し、1点のみしか描かないものは安定解、複数個の点のみを描くものは周期解と判断した。

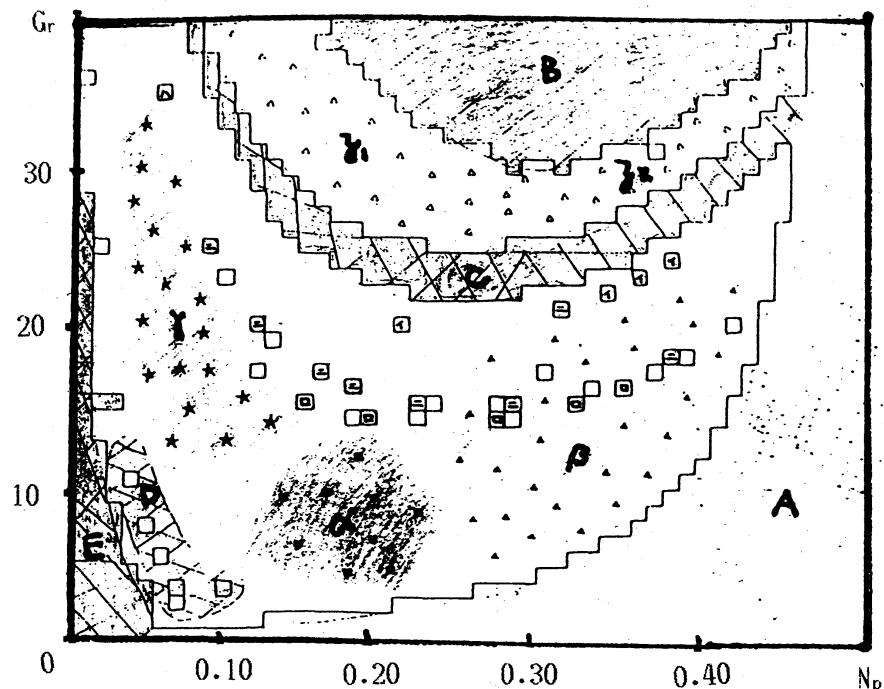


図10. 解の分類

図10は、このようにして得られた解の漸近的な振舞いの分布図である。安定解(A)の分布は線形不安定論と良く一致している。図の左上部はほとんどの領域でカオス解を示しているが、その中に、1周期毎に主流の反転を繰り返す周期解Bの窓や、2、3、4倍周期を示すいくつかの窓領域があることが解る。さらに、より複雑な周期性をもった数多くの島が多数存在することも解る。図11には典型的な周期解の解軌道の例を挙げた。図12は、カオス解を示す写像関数の典型的な例を挙げたものである。最も左の図が基本型と考えられるものであり、 $N_p=0.2$ 、 $G_r=10$  付近の領域 $\alpha$ において得られたものである。他のカオス領域、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\delta_1$ 、 $\delta_2$ ではこの基本型の変形したものと考えられそうである。

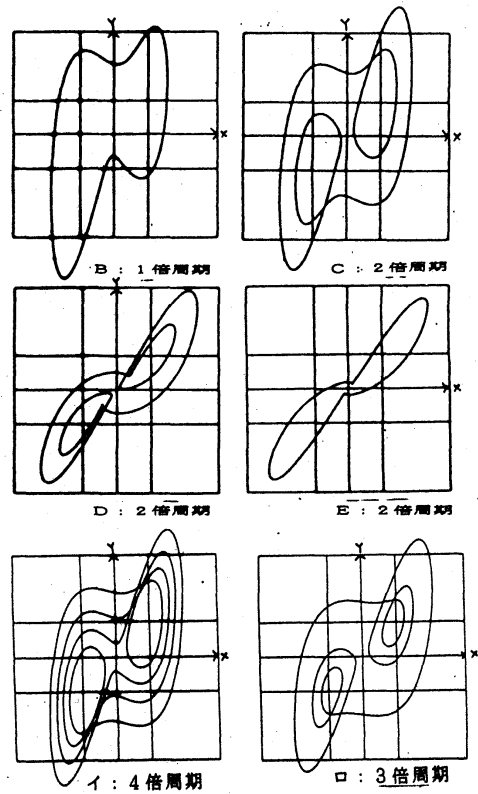


図11. 周期解の解軌道

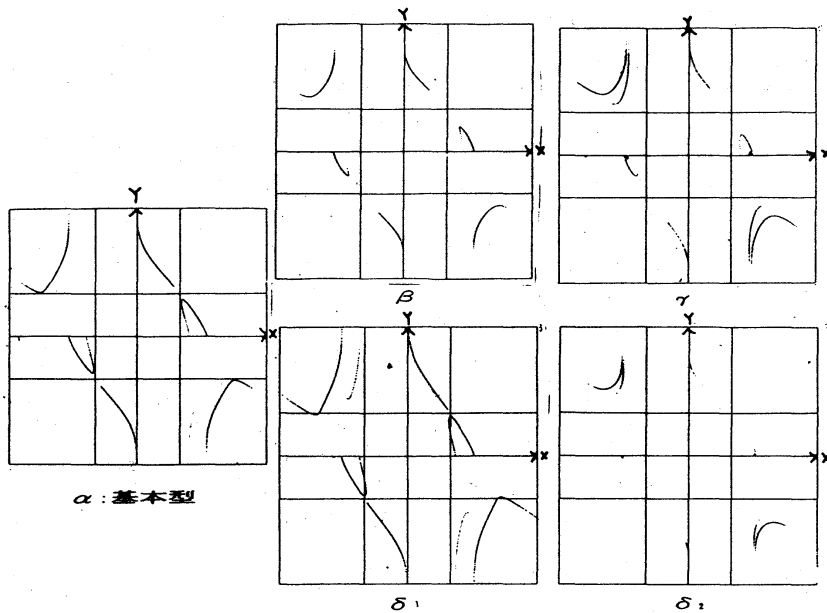


図12. カオス解の写像関数



## § 5. 最後に

以上の考察をもとにして、現実の実験で主流のカオス的反転を起こさせるためにはどのような条件が必要となるであろうか。まず、トーラス内の流れに一次元性が卓越しなければならない。これには、必ずしも4細胞の局所対流がの振幅が小さいことを意味するのではなく、たとえ局所対流が強くても、主流の変動に対して従属的な存在でありさえすればよい。その場合には、§ 1でも述べたように実験パラメータを若干補正するだけで解決するかも知れない。この一次元性が卓越するためにはトーラス容器の形状が重要な要素となる。次に、一次元性が満たされたとしても、無次元パラメータ  $N_p$  の値が 0.5 未満でなければならない。この要請を満たすのは必ずしも容易ではない、なぜなら  $N_p$  の定義に含まれる熱伝達率  $h$  は物性定数ではなく、トーラス内の流れの性質によって、変化するからである。図3のレジーム・ダイアグラムでも解るように、 $\Delta T$  を大きくして行ったとき全体的に  $N_p$  も増大する傾向があった。 $\Delta T = 30^\circ\text{C}$  の時に一度主流の反転が見られて後、反転しなくなったのは、 $N_p$  の値が 0.5 を越えてしまったからかも知れないし、あるいはまた、一次元性の卓越が破れてしまったのかも知れない。現在、チューブ状のトーラス容器に変えて、2重円筒状のトーラスを用いた実験を行なっている。チューブ状に比べて2次元的な流れが実現し易いと期待してのことである。今までに何例か反転が確認できたが、同じ条件のつもりでも実験しても、必ずしも、再現性が無いというやっかいなものである。2次元的な室内実験と数値シミュレーションを比較して、トーラス内の流体自身が一次元性の卓越とカオス的反転を選び取るメカニズムを調べていきたい。

## 参考

三村・須田 (1991)

円環内自然対流の非線形振動 数理解析研究所講究録 740, p196

Osamu Sano (1991) a, b

Cellular structure in a natural convection loop and its chaotic behaviour. I. experiment, II. theory

Fluid Dynamics Research, vol 8 (1991), p189-204, p205-220