数理解析研究所講究録
第830巻 1993年 118-126

波の共鳴と流れの不安定

京大総合人間学部 酒井敏 (Satoshi Sakai)
京大理学部 小林澄人 (Sumito Kobayashi)

1 はじめに

流れの安定性の問題は古くから研究されてきた問題であり, 数学的には固有値問題に帰着する問題であるが, その物理的な意味を考えようとすると, 途端に困難に直面することになる.

その困難の原因は, 解法のプロセスが物理的な因果関係と対応がつかない上, 固有関数の性質もパラメータによって変わってしまったりして, 物理的な現象との対応がつかないところにあると考える.

そこで, 弦の共鳴問題を参考にして, 物理的なイメージを保ちつつ, 流れの安定性の問題を扱う方法を考えてみた.

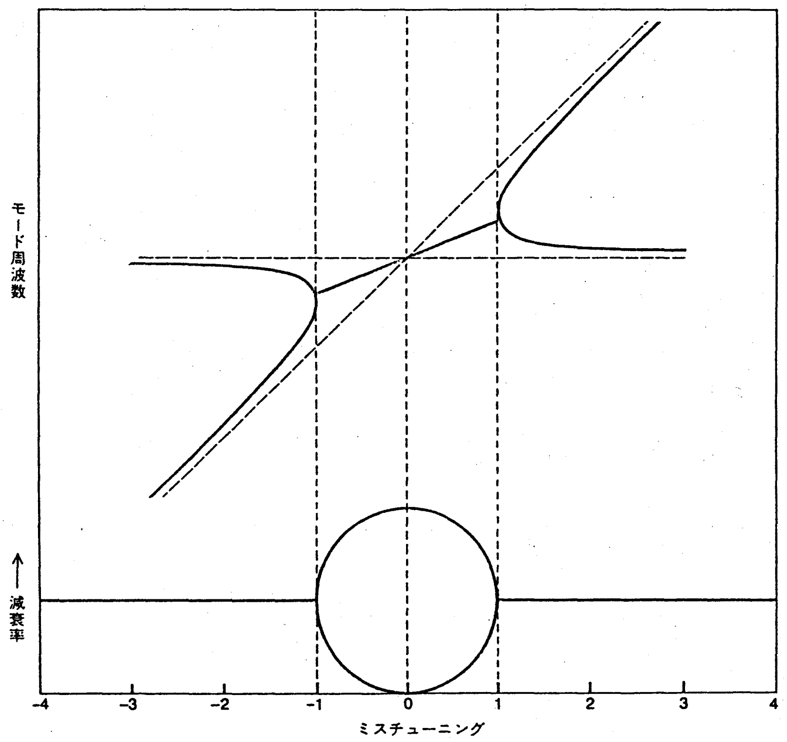

図1: 二本の弦の共鳴関係 (G.Weinreich 日経サイエンス 1979)

2 弦の共鳴

ピアノの弦は1つの音に対して複数の弦が張ってある．それらの弦はお互いに若干異なる張力で張られており，それがピアノ独特の打音と余韻を生み出す仕組みになっている．

異なる張力で張られた複数の弦が振動すれば「うなり」を生じそうな気がするが，これらの弦は同じコマの上に張られており，そのコマの振動を通してお互いに相互作用するために,「うなり」を生じることはない．

今，2本の弦が同じコマの上に張られている状況を考え，

1本の弦の張力を固定して，もう一方の弦の張力を変えることを考える(図2)．それぞれの弦が独立に張られていた時の周波数をそれぞれω_1，ω_2とし，2本が同じコマの上に張られている時の周波数をωとする．弦2本の系においてω_1とω_2が十分に離れている時には，それぞれの弦の周波数がほぼそのままその系の固有値ωとなるが，ω_1とω_2が近い時には，周波数が同じで，減衰率がことなる二つの固有値が現れる．ピアノの場合には，この早い減衰モードが打音となり，遅い減衰モードが余韻となる．

これは，X，Yをそれぞれ弦の振幅とした時，

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} \omega_1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & \omega_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \tag{1}$$

というように，右辺の行列の中が対角成分以外のところに相互作用係数εが存在するような状態である．このεを通してXとYはお互いに外力として他方を励起する関係にあり，ω_1とω_2が近いところでは，お互いに「共鳴」を起こす．この共鳴が減衰率を変化させる要因となっている．

ここで注意すべきことは，我々は，弦が1本しかないようなサブシステムの自由振動を良く知っていて，その自由振動を基底として考えると式(1)の様に，「2本の弦の共鳴」という形で表現できるということである．最初から，全体の系の固

有値を求めてしまえば，それぞれの固有関数は直交するから,「共鳴」という概念を持ち込む余地はなくなってしまう.

流れの安定性の問題も，分散関係および発達率のグラフは定性的に図2と同じであることが多いので，この問題と同じような取り扱いが可能であると予想される．その様に扱えば，基本的な波(弦の振動に相当する)の共鳴問題として不安定を考えることができ，物理的な理解がしやすくなる.

問題は，その基底をどのようにとるかということである．線形問題であるから，直交性を要求しなければ基底のとり方には当然任意性がある．この方法の目的は,「物理的な解釈を容易にすること」であるから，その基底は物理的に自然なものであることが望ましい.

以下に，このような方法で流れの安定性を共鳴問題に帰着できる例を示す.

3 順圧不安定

図2のような流速プロファイルを持つ基本場の安定性を考える．支配方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi-U_{yy}\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \tag{2}$$

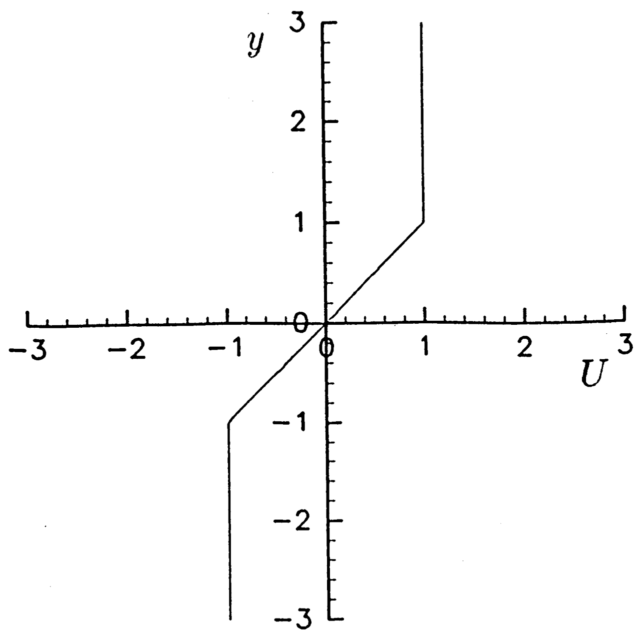

図 2: 順圧不安定の基本場

である．流速プロファイルが2箇所の折れ目を除いて直線的なので流線関数を$\psi \propto \exp(\pm ky)$とおくと，折れ目以外では式(2)を自動的に満たす．折れ目$(y = y_c)$においてはマッチング条件

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \psi}{\partial y} - U_y\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]_{y_c-\varepsilon}^{y_c+\varepsilon} = 0 \tag{3}$$

を満たさなければならない．

ここで，$y = 1$の流速分布の折れ目に捕捉された波を

$$\psi^+ = A^+(t)\exp(-k|y-1|)\exp i(kx) \tag{4}$$

と定義する．$y = 1$でのマッチング条件を適用すると，この

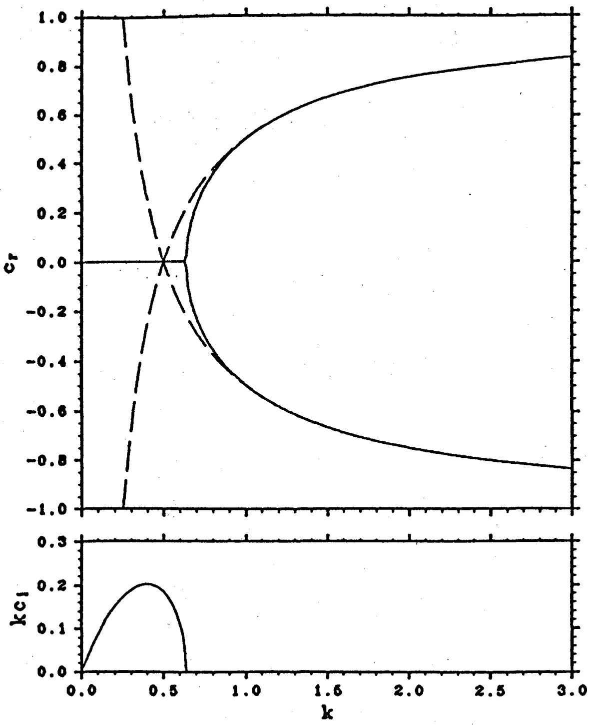

図3: 順圧不安定の分散関係．破線は折り目に捕捉された波の分散関係

波の振動数は

$$\omega^{+} = k - \frac{1}{2} \tag{5}$$

となる．

これは，流速分布に $y=-1$ での折れ目がなく，無限遠まで流速にシアーがある時の中立波動解で，これだけでは $y=-1$ において式(3)を満たさないことに注意されたい．

同様に，$y=-1$ のところに捕捉された波 ψ^{-} を定義し，$\psi = \psi^{+} + \psi^{-}$ を式(3)に代入して整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} A^{+} \\ A^{-} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \omega^{+} & 1/2 \\ -1/2 & \omega^{-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{+} \\ A^{-} \end{pmatrix} \tag{6}$$

を得る．これは式(1)と同じ形で，折り目に捕捉された2つの波の共鳴の形になっている．分散関係は図3である．

4 傾圧不安定

図4のような傾圧場における擾乱の支配方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+z\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+S^{-1}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=0 \tag{7}$$

で与えられる．ここでSは安定度パラメータである．このような場では上下の境界に捕捉された波が存在するが，$\psi\propto\exp(\pm S^{1/2}kz)\exp(ikx)$とおくと式(7)は境界以外では満たされてしまうので，波の性質を決めるのは，上下の境界条件

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+z\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \qquad at \qquad z=\pm1 \tag{8}$$

である．

上の境界に捕捉された波を

$$\psi^+ \;=\; A^+(t)\left(\exp(\mu(z+1))+\exp(-\mu(z+1))\right)\exp(ikx) \tag{9}$$

$$\mu \;\equiv\; k\sqrt{S} \tag{10}$$

と定義する．これは，下の境界で密度変化がない$\partial\psi/\partial z=0$ような解で，上の境界条件より振動数は

$$\omega_+=S^{-1/2}\left(\mu-1+\frac{2\exp(-2\mu)}{(\exp(2\mu)-\exp(-2\mu))}\right) \tag{11}$$

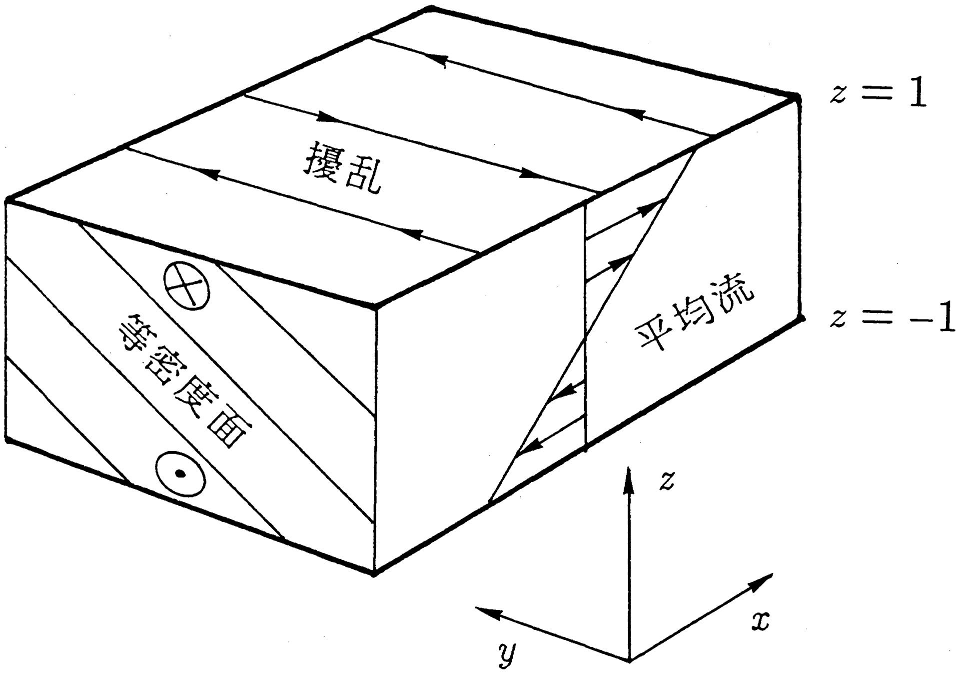

図 4: 傾圧不安定の基本場

となる.

下の境界に捕捉された波ψ^-も同様に定義して, $\psi=\psi^+ + \psi^-$を式(8)に代入して整理すると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} \omega^+ & \varepsilon \\ -\varepsilon & \omega^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\varepsilon \equiv S^{-1/2}\frac{2}{(\exp(2\mu)-\exp(-2\mu))} \tag{13}$$

を得る. この傾圧不安定の分散関係を図5に示す.

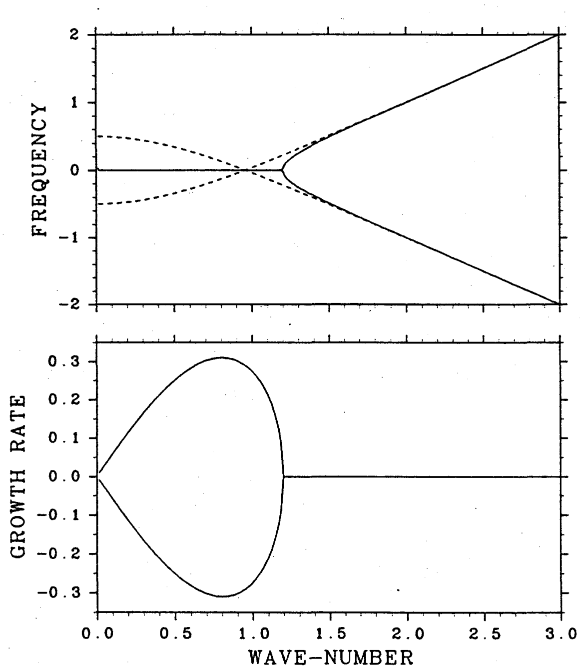

図 5: 傾圧不安定の分散関係．破線は境界に捕捉された波の分散関係

5 おわりに

順圧不安定と傾圧不安定の簡単なケースについて，中立な波の共鳴現象としてとらえられることを示した．このような考え方を一般化するためには，連続モードも同様に扱えることを示さなければならないが，それができれば，流れの不安定のメカニズムの物理的解釈が非常に容易になる．